FUNCIONES
Y
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

GUÍA - TALLER

MARTA BONACINA

Agradecimientos:

Este libro que hoy es una realidad resume mi concepción de la Matemática, su enseñanza. Es el trabajo de muchos años y el resultado de superar problemas de la más diversa índole por lo que quiero aquí dar gracias a quienes de una u otra forma me animaron a no bajar los brazos.

Doy las gracias a mis hijos, Jorgelina, Matías, Santiago, Marta y Julieta por estar siempre a mi lado, por darme ánimo y fuerzas para seguir adelante con la misión que un día me impuse: *educar para transformar*; o sea, *para formar seres libres, pensantes y comprometidos con su entorno*. Sobre todo agradezco a mis hijos porque cada uno a su modo o forma comparte hoy conmigo esta lucha por una Sociedad más justa y solidaria, por ende, y dado su íntima relación con ella, por una nueva forma de hacer Ciencia. Incluyo aquí un recuerdo muy especial para el padre de mis hijos, Gustavo Bortolato, quien aunque ya no esté entre nosotros, fue y sigue siendo el ejemplo que guía nuestros pasos.

Agradezco también a mis colegas Claudia Teti y Alejandra Haidar porque con su aporte técnico, su apoyo con el proyecto que un día les pedí transitaran conmigo, con su estar allí, siempre dispuestas a pesar de escollos, problemas o enojos, contribuyeron también a que finalmente pudiera plasmar mi visión de la "Educación Matemática" en este libro que hoy pongo a disposición de todos mis colegas y alumnos.

Marta Bonacina

PRÓLOGO

Este libro pretende ser un curso de genuina matemática con énfasis en algunas cuestiones normalmente relegadas en los cursos tradicionales. Esencialmente trata de mostrar la diferencia entre el trabajo deductivo, inductivo o heurístico y las manipulaciones algebraicas rutinarias; entre el lenguaje familiar o cotidiano y el científico. En definitiva pretende no ser otra colección de ejercicios cuyo objetivo sea sólo el afianzamiento de reglas algebraicas.

Hace años ya que prestigiosos investigadores sociales vienen destacando el hecho de que la humanidad se encuentra sometida, como nunca antes, a tantos y tan diversos cambios, y prácticamente en todos los campos, que para enfrentarse a ellos y salir airosa de los desafíos que suponen, no le queda otra alternativa que "cambiar". Que lograr esto requiere de hombres y mujeres educados para actuar en un ambiente geopolítico diferente, así como también de científicos y profesionales con *creatividad*, *iniciativa* y *capacidad de perfeccionamiento autónomo*, *comprometidos en su accionar en base a proyectos de clara pertinencia en su contexto social.* En definitiva, cambiar requiere de una educación que rompa con los esquemas tradicionales y se proponga la formación de un individuo con una capacidad de gestión muy distinta a la de las generaciones precedentes. Y de estas consideraciones no queda fuera la Universidad sino que por el contrario, como parte crucial del sistema educativo, es a ella a quien cabe un rol esencial en la génesis del cambio pretendido.

En lo particular, creo que la educación hoy día, y en todo nivel, en lugar de ser un instrumento inductor de cambio ha cedido paso y se ha subsumido en una educación conformista. Que el sistema educativo, en razón directa con la evolución de la tecnología y del conocimiento, ha adoptado un comportamiento arbitrario que no respeta pautas "naturales" de vida; que,

* estructura cada vez más un ambiente externo que opera como fuerte condicionante de los individuos que lo componen.
* establece comportamientos masivos que imponen a los individuos un "patrón de respuesta"; los despersonaliza, disminuye el ejercicio autocrítico y , por ende, la elaboración de respuestas "propias".

Creo que estos fenómenos se manifiestan con particular fuerza y en forma muy clara en el aula de matemática, disciplina que ha sido y sigue siendo la más temida por los alumnos. Pero creo también que este hecho tiene explicación y no es insalvable, que la forma en que se presenta hoy la matemática, descontextualizada, axiomatizada y rigidizada a veces hasta extremos absurdos, es lo que para la mayoría hace de esta disciplina algo incomprensible, difícil de digerir. Sin dudas, esta forma de presentarla más que potenciar y desarrollar capacidades, actúa como elemento paralizante, o cuanto menos, obstaculizador de tal desarrollo. La enorme distancia que existe hoy día entre el concepto matemático *´acabado´* (o sea, en su último grado de abstracción) y los alumnos, no puede menos que desanimarlos, desmotivarlos, cuando no inducirlos a abandonar todo intento por comprender.

¿Cómo producir el cambio pretendido desde el propio sistema educativo ?

Como primer paso debemos establecer claramente el objetivo rector de la tarea a realizar. Este esencialmente debe ser el de crear y difundir el conocimiento pero; "*desempeñando un papel irrenunciable de conciencia crítica de la sociedad en defensa de sus valores éticos y culturales*".

No cabe seguir discutiendo acerca de la causa o razón de la crisis detectada sino que es hora de trabajar para erradicarla. Somos muchos ya los que pensamos que mientras es cada vez más lo que consigue el hombre en sus investigaciones de orden científico tecnológico, es cada vez menos lo que alcanza en su *educación individual*; que esto, sin dudas, *dificulta cada vez más su integración social, el ejercicio de su derecho al aprovechamiento científico para una mejor vida.*

Cabe conjeturar que los fracasos habidos en los distintos intentos por mejorar el sistema educativo señalan la existencia de otras causas a más de las disfunciones internas propias del sistema; entre ellas, que *estos tienen una lógica propia distinta a la de los sistemas productivos, económicos o burocráticos*; la cual, y allí estaría el problema, no se ha intentado `*compatibilizar*´ .

El modelo pedagógico predominante contiene saberes disciplinarios "devaluados", ya sea por presentar la información recortada u atomizada, o por las características de las conceptualizaciones. Es limitado en cuanto a las posibilidades que brinda para la formación de sujetos competentes y creativos, estando más bien asociado a actividades rutinizadas. La información se ofrece recortada de los intereses y necesidades del sujeto que aprende (responde a otros intereses), de la historia de su producción y de sus posibilidades de transformación y aplicación. De esta caracterización no se escapa en absoluto el modelo pedagógico matemático; pudiéndose agregar a las cuestiones generales las propias de la disciplina.

Estimo que para *formar* a un alumno no basta "capacitarlo" en procedimientos tales como "medir" o "calcular". En una simetría total, tampoco sirve "agregar" a los procedimientos antes referidos información respecto a la "teoría" (*en particular la última*) que los sustenta. Se requiere de una "real integración" entre ambos procesos, y además que esta se haga teniendo en cuenta el contexto donde se ejecuta. Es realmente importante que se persiga y así se explicite la "articulación en equilibrio de los elementos cognitivos con los variados elementos técnico-prácticos y siempre con atención de lo ético y cultural"; que se trabaje tanto el "contexto de justificación" como el "contexto de descubrimiento".

Todo lo observado señala que la propuesta educativa a fin de alcanzar la integración deseada debe actuar, esencialmente, *sobre lo actitudinal.* Propender a desarrollar en los alumnos actitudes que lo constituyan en "*observadores críticos de su entorno*"; que lo induzcan a "*indagar, cuestionar, conjeturar, formular hipótesis, avalar o refutar con fundamentos las propias y las de otros*"; que lo capaciten para "*planear y optar por estrategias*"; para "*perseguir y defender el equilibrio en armonía de hombre-técnica-naturaleza*", en definitiva a procurar en todo momento conjugar en un todo: "***saberes y competencias***".

Por ello, abocarnos a una tarea de *transformación educativa* en el sentido señalado exige comprender la educación, y en consecuencia el currículo y las acciones que devenguen de su realización, como un acto continuo en el cual se articulen en forma efectiva las distintas etapas del proceso. Pero, sobre todo y fundamentalmente, exige tener presente que la educación no es una mera entrega de contenidos; sino una,

"transmisión de conocimientos y "actitudes" frente a un campo concreto y por que no ....., frente a la vida".

¿Cómo producir el cambio pretendido desde la Educación Matemática ?

En las últimas décadas, en un intento de revertir la grave crisis que nos aqueja, nace un movimiento a favor de una enseñanza de la Matemática soportada en su faz instrumental. La presente propuesta tiene por sustento las ideas de este movimiento y por motivo la búsqueda de caminos alternativos a los tradicionales. En su momento, un grupo de docentes coincidimos en pensar que la matemática aplicada, bien trabajada, podía ser un camino eficaz para incorporar en forma paulatina, no forzada y acorde a su orden evolutivo los conceptos formales que caracterizan a esta disciplina; convenimos también que el trabajo en talleres, en la resolución de problemas, era la metodología más apropiada al efecto de que los alumnos pudieran dar *sentido y/o significado* al objeto matemático aprendido, produjeran así la efectiva incorporación del mismo a su estructura cognitiva.

Básicamente con esta propuesta se pretende:

» Actualizar las aplicaciones de la Matemática: tratar problemas realmente prácticos, menos idealizados para, a partir de ellos, conocer nuevas operaciones o conceptos comprendiendo el porqué de su necesidad y/o utilidad; logrando así la *significatividad* de los mismos.

» Iniciar al alumno en la matemática *formativa*: los alumnos además de operar correctamente deben poder *pensar*, *razonar, deductiva e inductivamente*.

» Introducción de nuevos tópicos: el alumno de hoy necesita más matemática, pero una matemática distinta a la de 30 o 40 años atrás. Es absurdo pensar que se pueda preparar con los mismos programas a alumnos de distintas épocas, particularmente a los de nuestra época, caracterizada por un avance científico-tecnológico que ha sido y es vertiginoso, que pone al alcance de todos tecnologías cuyo impacto en la educación no puede desconocerse o ignorarse, tales como las computadoras y los software matemáticos.

El logro de estos objetivos se propone aquí a través de una estrategia que llamamos "*Aprendizaje basado en la resolución de problemas*". Las actividades elegidas refieren tanto a problemas de la propia Matemática como a problemas de otras Ciencias (Física, Química, Biología) cuya resolución requiere la búsqueda de un *modelo matemático* del proceso o fenómeno razón del problema.

La *resolución de problemas*, al trabajar con el *proceso* del cual deriva un resultado antes que con el resultado, ofrece importantes oportunidades para accionar en el sentido deseado ya que permite poner en juego cuestiones que hacen a la formación integral pretendida, probar nuevas tecnologías, las posibilidades didácticas que estas ofrecen.

Resolver un problema requiere llevar adelante un proceso cuya correcta ejecución está muy ligada a la destreza algebraica que se posea pero, y esto es lo esencial, *no depende solo de ella*. Concretar este proceso requiere mucho más que recordar y aplicar reglas algebraicas, involucra *capacidades de otro orden y naturaleza*. Por ejemplo, requiere reconocer la *oportunidad de uso* de las operaciones, algoritmos o heurísticas conocidas o aprendidas en el transcurso de nuestras vidas

Sin dudas, la resolución de problemas hace al desarrollo de habilidades intelectuales tales como: *búsqueda de patrones o regularidades, formulación de conjeturas, encadenamiento lógico de argumentos, abstracción* y *generalización*. O sea, posibilita un encuentro con la Matemática basado en el "hacer matemática" (investigar, experimentar, organizar, relacionar, conjeturar, representar, etc) y en el "aplicar matemática" (obtener una respuesta); posibilita también llegar a la abstracción a partir de lo concreto (entorno, cultura), dar prioridad a la comprensión por encima de la aplicación de reglas, privilegiar el *aprendizaje procedimental*, favorecer la interacción y la comunicación, plantear los contenidos en forma cíclica y, fundamentalmente, promover la autonomía personal, la flexibilidad y el espíritu crítico.

La dinámica que planteamos para el trabajo en estos talleres responde a criterios y pautas previamente fijadas las cuales contemplan la explicitación detallada de los *objetivos* del taller así como de las *consideraciones teóricas* necesarias para abordar los problemas propuestos en el mismo. Creemos que tanto la forma de presentación como la metodología con que se implemente una actividad es la que finalmente determina su carácter.

Cada taller tiene un objetivo específico pero no independiente de los otros. Las actividades se presentan en forma *´espiralada´* a lo largo de los distintos talleres; es decir, existe un hilo conductor de las mismas, *el concepto de función*, el cual queda claramente planteado a partir del Taller 4.

Resumiendo el *objetivo particular y final* es:

* desarrollar en los alumnos la capacidad de resolver problemas sin caer en la manipulación de datos y fórmulas; es decir, en la actitud de *reconocer o abandonar*;
* lograr que pase del *´razonamiento basado en evidencias´* al *´razonamiento en término de hipótesis´* ;
* en última instancia, *"la formación integral del estudiante, tanto como profesional como individuo consciente del papel que puede y debe jugar esta formación en su desarrollo y en el de su entorno"*.

El libro está conformado por 11 Talleres, en los cuales, en forma creciente y cíclica se proponen actividades que hacen al desarrollo de las habilidades señaladas. Algunas de estas actividades están planteadas de tal modo que puedan ser resueltas con "lápiz y papel" o con un "utilitario" de fácil acceso. Muchas de ellas están planteadas para resolver con Excel, utilitario que además de proveer todas las herramientas necesarias para resolver los problemas es además, y fundamentalmente, un utilitario de fácil y masivo acceso. Se incluye en este libro y como material auxiliar un Tutorial de Excel especialmente diseñado para las actividades aquí propuestas.

INDICE

TALLER 1

OBJETIVOS

El aprendizaje de nuevos conocimientos matemáticos está estrechamente ligado a la destreza algebraica y dominio del espacio alcanzado en instancias anteriores. Así, un primer objetivo de este taller es repasar cuestiones básicas del Álgebra tales como las operaciones algebraicas ($\pm$; x ; $\div$; $\sqrt{\ }$) y sus propiedades, recordar a la vez figuras y cuerpos elementales de la Geometría Clásica.

Un segundo objetivo es trabajar problemas relativamente sencillos donde se pongan en juego los conocimientos repasados, discutir a través de ellos algunas cuestiones relativas a la resolución de problema tales como la existencia de distintas estrategias para resolver un mismo problema, la cantidad de soluciones que estos pueden tener (*una, más de una ó ninguna*).

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1) Expresar las siguientes expresiones utilizando el lenguaje simbólico y resolver:

a) " el doble de, un número más 1, es igual a 25 ".
b) " la suma de un número y su cuadrado es 20 ".
c) " la mitad del cuadrado de un número menos dicho número es 24 ".
d) " el cubo de la diferencia entre cierto número y 1, es 8 ".
e) " la diferencia entre el cuadrado de cierto número y 1, es 8 ".
f) " el cuadrado de la diferencia entre cierto número y 1, es 9 ".
g) " la suma del cubo de un número y el número, es 0 ".

2) En las ecuaciones que se proponen a continuación se pide:

*) hallar, si existe, el valor de "***a***" que verifique la igualdad, ***para todo*** $w \in \mathbf{R}$.

) si no existe "*a***", analizar si es posible imponer algún tipo de restricción a "***w***" de modo que, bajo tal restricción, la ecuación admita solución *real* para "***a***".
Si esto fuera posible, hallar el valor de "***a***" .

a) $a \cdot w - 1 = 5$

b) $a \cdot (w - 1) = 5$

c) $a \cdot (w^2 - 1) = 5$

d) $a \cdot (w^2 + 1) = 5$

e) $a \cdot w^2 - a \cdot w + 4w = 5$

f) $a^2 + w^2 = 2w^2$

g) $(a + w)^2 - 2aw = 0$

h) $\sqrt{a} - 4w = 0$

i) $[a - \sqrt{a}] \cdot w = 0$

j) $[(a + \sqrt{a})^2 - 2a\sqrt{a} + 3(a + 1)] \cdot w = 0$

3) Graficar la figura o cuerpo cuya área o volumen se indica a continuación. Identificar los elementos que la (o lo) caracterizan con las letras de la fórmula. En cada caso realizar una *conjetura* acerca del efecto producido sobre el área (o volumen) al *duplicar* la variable que se indica. Verificar o refutar la conjetura analíticamente y, en el caso de ser posible, gráficamente.

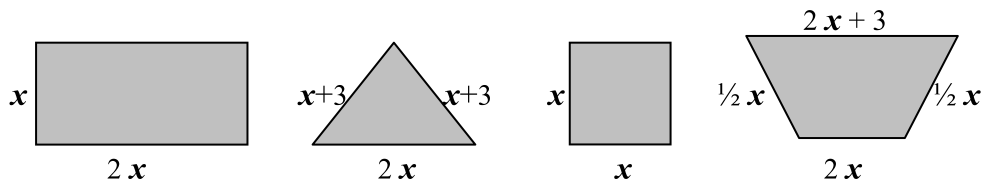
- <u>Área del rombo</u> $A = \frac{D\ .\ d}{2}$; d
- <u>Área del círculo</u> $A = \pi\ .\ r^2$; r
- <u>Área del trapecio</u> $A = \frac{(B + b)\ .\ h}{2}$; h
- <u>Área del rectángulo</u> $A = a\ .\ b$; a
- <u>Área del paralelogramo</u> $A = b\ .\ h$; h
- <u>Área del triángulo</u> $A = \frac{1}{2}\ b\ .\ h$; h
- <u>Volumen del cubo</u> $V = l^3$; l
- <u>Área de las caras del cubo</u> $A = 6\, l^2$; l
- <u>Volumen del paralelepípedo</u> $V = a\ .\ b\ .\ h$; h
- <u>Área de las caras del paralelepípedo</u> $A = 2\ (a.\ b + a.h + b.\ h)$; h
- <u>Volumen del cilindro</u> $V = \pi\ .r^2.\ h$; r y h
- <u>Área total del cilindro</u> $A = 2\ \pi\ .r^2 + 2\ \pi\ .r\ .\ h$; r y h

4) Para las figuras que se indican a continuación, se pide:

a) escribir la expresión algebraica más reducida posible para el perímetro;

b) indicar ***V*** ó ***F*** , justificar: "si se duplica ***x*** entonces se duplica el perímetro".

c) determinar si existe ***x*** para el cual el perímetro sea **3** .



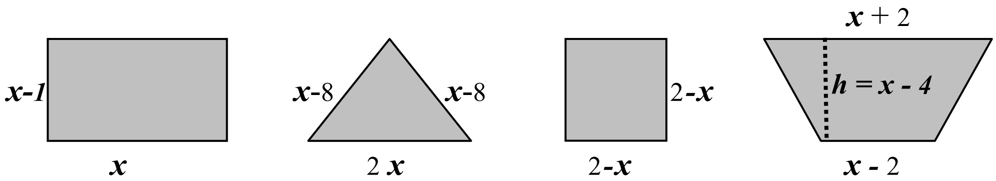
5) a) Indicar ***V*** ó ***F*** , justificar : "*si dos rectángulos tienen el mismo área entonces tienen el mismo perímetro*".

b) Para las figuras que se indican a continuación, se pide:

i) escribir la expresión algebraica más reducida posible para el área;

ii) determinar si existe $x>0$ para el cual el área sea **12** .

**Analizar si existe alguna figura donde, sin hacer cálculos, con el sólo análisis de los datos, es posible "ver" que el problema no tiene solución.*



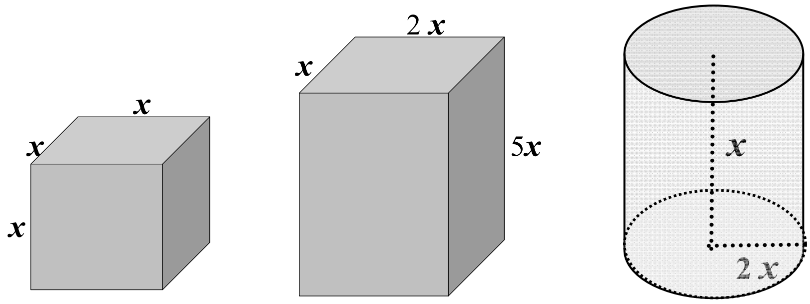
6) Para los cuerpos que se indican a continuación, se pide:

a) escribir la expresión algebraica más reducida posible para el volumen;

b) escribir la expresión algebraica más reducida posible para el área total.

c) hallar x tal que el volumen y el área total del cuerpo, coincidan.

d) indicar ***V*** ó ***F***, justificar: "*si dos paralelepípedos tienen el mismo volumen entonces tienen el mismo área total* ".



7) Leonardo da Vinci ilustra el libro del matemático Luca Pacioli (*De Divina Proportione-1509*) con un dibujo que se hace famoso y hoy se conoce como "*El Hombre de Vitruvio*" . Este nombre se debe a que da Vinci basa su ilustración en un trabajo del arquitecto romano Vitruvio, quien en su momento (30 a.C.) se ocupa de las proporciones del cuerpo humano. Al respecto el mismo Leonardo escribe: "*Vitruvio dice en sus trabajos que las medidas del cuerpo humano han sido distribuidas por la Naturaleza de la siguiente manera: si se abren las piernas de modo de disminuir la propia estatura en* 1/14 *, y se abren los brazos hasta que los dedos medios lleguen al nivel de la parte superior de la cabeza, se sabe que el centro de los miembros extendidos estará en el ombligo y el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero*"... "*la longitud de los brazos ´en cruz´ es igual a su altura*".

Te pedimos entonces que por un momento imagines ser da Vinci y muestres cual sería en tal caso la figura que hoy veríamos en el libro de Pacioli si, como da Vinci, te basaras en las proporciones dadas por Vitruvio (*y Pacioli la hubiera aceptado!!!*)

* <u>*Nota*</u>: sabemos que no sos da Vinci, de modo que para dibujar un hombre puedes usar *elipses, segmentos* o *círculos*. No interesa la calidad artística del dibujo sino la calidad matemática del mismo (*las proporciones*). Para ayudarte te contamos que da Vinci dibujo dos hombres ´superpuestos´, el primero dentro de un cuadrado y el otro (con los miembros extendidos) dentro de una circunferencia trazada tomando cuatro puntos (del cuerpo) de referencia.

TALLER 2

OBJETIVOS:

A partir de la resolución de problemas sencillos el objetivo de este taller es mostrar la existencia de **“problemas tipo”**, la forma o modo de reconocerlos; o sea, es resolver problemas pero con énfasis en el reconocimiento del carácter o naturaleza de los mismos, la estrategia de resolución más conveniente al caso.

Las actividades propuestas están pensadas como *´precalentamiento´* y *´puesta a punto´* del motor antes de entrar de lleno a la resolución de problemas en los próximos talleres. Así, los problemas planteados no presentan grandes dificultades de planteo o cálculos al efecto de no desvirtuar el objetivo del taller, el cual en esencia es “*promover la adquisición de hábitos y estrategias necesarias para el abordaje y resolución de distintos tipos de problemas”*.

En el **ANEXO I** , al final de este taller, presentamos una clasificación básica del tipo de problemas a tratar así como también problemas resueltos a modo de ejemplo. En una primera y muy amplia clasificación reconocemos tres clases de problemas:

A: ***Problemas de “resolver”.***

B: ***Problemas de “demostrar”.***

C: ***Problemas “no A” , “no B”.***

A: *Problemas de “resolver”*

Leer en el **ANEXO I – A** la ***“GUÍA PARA LA FORMUACIÓN MATEMÁTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*** *(de resolver)* ***”.***

Resolver luego, a tu saber y entender (o sea, sin mirar la resolución) los problemas que allí aparecen como ejemplo. Luego de resueltos, te sugerimos que compares tu resolución con la propuesta en el texto, busques similitudes y diferencias, reflexiones acerca de ellas.

A→ ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1) Una nave espacial parte en un vuelo de reconocimiento. En la primera etapa consume la tercera parte del combustible cargado, en la segunda los 2/5 de lo que resta y para la tercera y última le quedan 40.000 litros. ¿qué cantidad de combustible cargó la nave espacial?

2) El viernes Leticia invirtió el 40 % de sus ahorros en ropa. El sábado gastó las 2/3 partes de lo que le quedaba en libros y aún tiene $120. ¿Cuánto gastó en libros?

3) Después de haber gastado los 2/3 de lo que tenía me regalaron $920. Ahora tengo $50 más de los que tenía al principio. ¿Cuánto tenía?

4) Lucas compró los tomos I y II de una colección de libros. El tomo I le salió un 30% más barato que el tomo II. Si por los dos tomos pagó \$136, ¿cuánto pagó por cada uno?

5) El siguiente problema se tomó en cierta oportunidad a alumnos que ingresaban a la Facultad. Te damos el enunciado del problema y a continuación la resolución de un alumno (JP) quien normalmente escuchaba las indicaciones del docente con fastidio no disimulado pues, según sus dichos, "*sólo eran para hacer más complicada cosas que el ya sabía hacer de manera más fácil*".

Respecto a la resolución de JP, la cual dividimos en 4 pasos para facilitar tu análisis, te preguntamos: ¿es correcta?

- Si tu respuesta es SI, indica si lo hubieras resuelto igual o de otra manera.
- Si tu respuesta es NO, indica el paso donde se equivoca, que sería lo que lo induce a equivocarse y cómo hubiera podido evitar el error.

<u>Problema</u>: *Sobre una mesada se apoyan baldes y jarras. Hay la misma cantidad de baldes que de jarras. Cada balde tiene 7 lts. de agua y cada jarra tiene 3 lts. de jugo. Si en total sobre la mesada hay 140 lts. de líquido: ¿cuántos lts. de agua hay sobre la mesada?*

<u>Resolución</u> (JP): $7x + 3y = 140$ (Paso 1)

$x = y$ (Paso 2)

$$\left.\begin{array}{l} 7x + 3x = 140 \\ \quad 10x = 140 \rightarrow x = 14 \end{array}\right\} \quad \text{(Paso 3)}$$

<u>Rta</u> : hay 14 litros de agua sobre la mesada (Paso 4)

6) Leer el ejemplo 2 del **ANEXO I**, resolver luego el siguiente problema:

A partir de una lámina cuadrada de hojalata se quiere construir una caja con base cuadrada, sin tapa y de 64 cm^3 de volumen. Se desea hacer esto a partir de cortar un cuadrado en cada esquina de la lámina, plegar y soldar luego los rectángulos que resultan de este proceso.

Los siguientes valores corresponden a las distintas alturas con que se desea construir este tipo de caja:

a) 0,25 cm.; b) 0,5 cm; c) 1 cm.; d) 2 cm ; e) 4 cm.; f) 8 cm ; g) 16 cm.

Al respecto te pedimos que determines una fórmula para hallar el lado de la lámina cuando el dato es la altura de la caja; que apliques esta fórmula para calcular dicho lado para cada una de las alturas indicadas; que informes los resultados de modo tal que la simple lectura de los mismos permita extraer información útil respecto a distintas cuestiones relativas a este tipo de caja. Finalmente, te pedimos que reflexiones acerca de la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

i) " a mayor altura de la caja, mayor dimensión de la lámina" .
ii) " para una lámina de 12 cm. de lado se obtiene una caja cúbica".
iii) " la caja cúbica es la que requiere la lámina de menor lado " .
iv) " la caja cúbica es, entre todas las dadas, la que tiene *menor área total* ".

B: *Problemas de "demostrar".*

En el **ANEXO I** presentamos una serie de cuestiones cuyo conocimiento es imprescindible para poder resolver este tipo de problema.
Te solicitamos entonces que leas este artículo y luego, acorde a lo allí indicado, resuelvas los problemas que te proponemos a continuación.

6) Refutar las siguientes afirmaciones:

a) la resta de dos naturales es un natural.
b) el producto de dos enteros es un natural.
c) $\forall x \in R$; $(x + 1)^3 = x^3 + 1$
d) $\forall x \in R$; $(x - 4)^2 = x^2 - 16$

7) Analizar el siguiente razonamiento e indicar donde está el error.

» 12 es múltiplo de 3 luego, por def. de múltiplo, $\exists\, k \in N$ tal que $12 = 3\,k$
» 9 es múltiplo de 3 luego, por def. de múltiplo, $\exists\, k \in N$ tal que $9 = 3\,k$

Luego, $12 = 3\,k = 9$, de lo cual concluimos que $12 = 9$.

8) Demostrar o refutar (según corresponda) las siguientes afirmaciones:

a) Si un número natural es múltiplo de 100 entonces es múltiplo de 10
b) Si un número natural es múltiplo de 10 entonces es múltiplo de 100.
c) Si n es un número natural impar, entonces $n^2 - 1$ es múltiplo de 4.
d) Si n y m son números enteros impares, entonces $m - n = 0$.
e) Si n y m son números enteros pares, entonces $m - n$ es par .
f) Si un número natural no es múltiplo de 2 entonces es múltiplo de 3.
g) Si n y m son números naturales pares, entonces $m \,.\, n$ es par.
h) Si n y m son números enteros impares, entonces $m \,.\, n$ es impar .
i) Si $n = 3\,k + 2$ con $k \in N$, entonces n es impar .
j) Si $n = 3\,k + 2$ con $k \in N$, entonces n es divisible por 3.
k) Si $n = 3\,k + 2$ con $k \in N$, entonces n es divisible por 2.

9) Juan ha aprendido tanto que el otro día logró inferir una regla para detectar cuando un número es divisible por 3. Para ello fue probando con distintos números a la vez que iba haciendo cuentas como las siguientes :

* $235 = 2 \,.\, 100 + 3 \,.\, 10 + 5$
$235 = 2.\,(\mathit{99} + \mathit{1}) + 3.(\mathit{9} + \mathit{1}) + 5$
$235 = 2.\,\mathit{99} + 3.\,\mathit{9} + (\mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{5})$
$235 = \mathbf{3}\,(2.\,\mathit{33} + 3.\,\mathit{3}) + (\mathbf{10}) \Rightarrow$ 235 <u>no es divisible por 3</u>

* $237 = 2 \,.\, 100 + 3 \,.\, 10 + 7$
$237 = 2.\,\mathit{99} + 3.\,\mathit{9} + (\mathbf{2} + \mathbf{3} + \mathbf{7})$
$237 = \mathbf{3}\,(2.\,\mathit{33} + 3.\,\mathit{3}) + (\mathbf{12}) \Rightarrow$ 237 <u>es divisible por 3</u>

¿8937 es divisible por 3? ¿Porqué? Realiza el mismo proceso que Juan y concluye. Analiza todos los "experimentos" y trata de concluir "a partir de ellos" una regla general respecto a la divisibilidad por 3 .

(C) *Problemas "no-A" ; "no-B".*

No todos los problemas ´encajan´ en algún ´esquema tipo´.
A veces una leve modificación de una estrategia conocida permite resolver el problema aunque este no sea un ´problema tipo´; otras veces esto no es posible, debemos ser ´creativos´, idear una estrategia de abordaje apropiada al caso.

10) <u>*Método del factor para conversión de unidades*</u>.

Para convertir una magnitud de un sistema de unidades a otro podemos:

1º) multiplicar la cantidad por un "***factor 1*** " (tantas veces como haga falta).
2º) construir el ***factor 1*** como un cociente donde numerado y denominador representen la misma "*cantidad de magnitud*" pero, en "*distintas unidades"*.

Ej.: 172.800 seg. a horas → $\mathbf{172.800}\ \cancel{\mathbf{seg.}} \cdot \dfrac{1\ \cancel{m.}}{60\ seg} \cdot \dfrac{1\ h.}{60\ m} = \mathbf{48\ hs}.$

a) Pasar 38 Km. a m. ; 38 Km/h. a Km/seg. ; 38 Km/h. a m/seg.
b) Si la velocidad de la luz es aproximadamente de 3.10^5 Km/seg., indicar Verdadero ó Falso:
"*en una hora la luz recorre (aprox) mil ochenta millones de Kms.* "

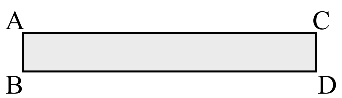
11) En Química trabajarás con el concepto de MOL y verás que:
"*un MOL es la cantidad de materia que contiene un número de partículas igual al número de Avogadro (aproximadamente igual a seiscientos dos mil trillones)*"
Para darte una idea de la magnitud de este número (difícil de apreciar en forma inmediata) te pedimos que trabajando con notación científica, calcules cuál sería (aprox.) la dimensión de la caja cúbica necesaria para guardar 1 mol de bolillas de hierro de 1g. cada una. (*densidad Fe* = 7,86 g/ml ; 1 ml = 1 cm^3).

12) En el **ANEXO II** presentamos un extracto del artículo ***"Notación Científica"***
Al respecto te solicitamos que leas este artículo y expliques luego porqué, en base a qué cálculos, en dicho artículo se afirma que:
a) .... la señal (algún tipo de onda electromagnética) enviada desde la otra galaxia tiene que haber viajado *´más rápido que la luz´*; específicamente, *´12.5 veces más rápido que la luz´.*
b) ... hoy aceptamos que, *´no hay velocidades mayores a las de la luz´.*

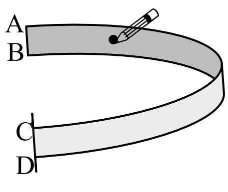
13) En el **ANEXO III** presentamos un extracto del artículo ***"La matemática y los misterios de la vida".*** Al respecto te solicitamos que leas el párrafo: "***Modelos Matemáticos y Química***"; que luego procedas a verificar que, como dice en el mismo, la cinta de Moebius tiene un solo lado o cara.
(*Sugerencia*: construye una cinta de Moebius; luego a partir de un punto y por el medio de la superficie traza una línea que la vaya recorriendo paralela al borde).

a) Tomar una cinta.
b) Doblarla.
c) *Girar* el extremo CD y pegar:
- A con D
- B con C

(a)



(b)

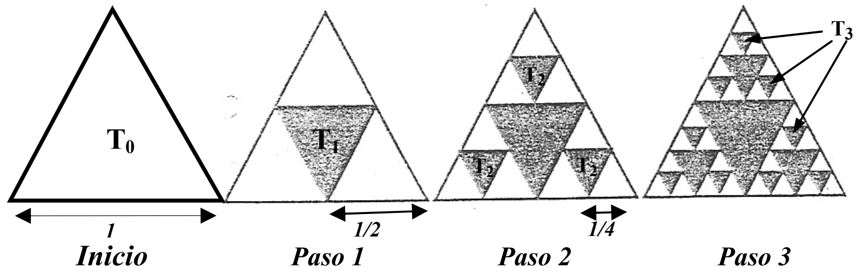


14) En el **ANEXO III** - ***"La matemática y los misterios de la vida"*** se encuentra también el párrafo titulado: "***Matemática e Ingeniería Genética***". Al respecto te solicitamos que lo leas y realices luego las actividades dadas a continuación, cuyo objetivo es trabajar las nociones de ***secuencia*** y ***patrón*** allí mencionadas.

a) Dibuja un triángulo equilátero que ocupe una hoja y asigna al lado del mismo la medida ***1***. Identifícalo como $\mathbf{T_0}$ y calcula $\mathbf{A_o}$, el área de $\mathbf{T_o}$ (sin usar decimales) Luego aplica la siguiente regla repetidas veces:

- ***"****coloca un triángulo equilátero negro en el centro de cada uno de los triángulos blancos generado en el* ***paso n****, identifícalos como* $\mathbf{T_n}$.***"***

El resultado de aplicar la regla tres veces luce así:



Este proceso, que puede continuarse indefinidamente, genera en cada paso triángulos cada vez más chicos; o sea, determina las siguientes ***sucesiones*** de objetos matemáticos:

* ***sucesión de ▲ equiláteros negros*** : $\mathbf{T_1}$; $\mathbf{T_2}$; $\mathbf{T_3}$; ..... ; $\mathbf{T_n}$; ....

* ***sucesión de "área de ▲"*** ($\mathbf{A_i}$ = ***área*** $\mathbf{T_i}$): $\mathbf{A_1}$; $\mathbf{A_2}$; $\mathbf{A_3}$; .... ; $\mathbf{A_n}$; ....

b) Diseña una estrategia que sin necesidad de acudir a la "*fuerza bruta*" , o sea, sin necesidad de repetir 100 veces el proceso, te permita establecer:
- cuantos triángulos negros habrá en el paso 100;
- el área *total* cubierta por los triángulos negros generados en el paso 100.

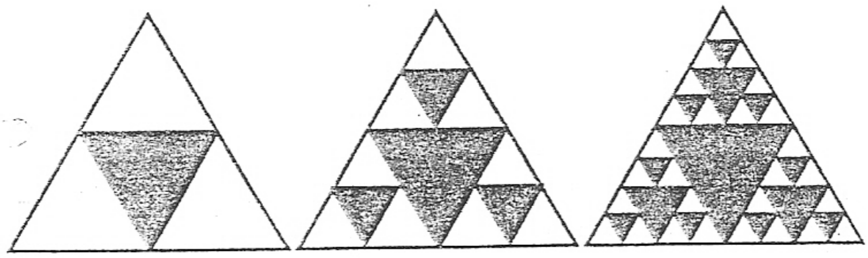
ⓘ Por suerte existe una forma de resolver este problema más interesante que la de repetir el proceso 100 veces; una forma que no pone en juego sólo la paciencia a la vez que hace al desarrollo de capacidades de un mayor nivel intelectual. En este caso, la de sistematizar apropiadamente la información obtenida en cada paso a los efectos de luego, por simple inspección y si existe, ***detectar cualquier regularidad del proceso***, ***descubrir un patrón de formación*** para los elementos generados al aplicar la regla indefinidamente. Conocer este patrón permite "***inducir***" una "***fórmula general***" para la obtención de cualquiera de dichos elementos. Para el caso, y por ejemplo, permite hallar la cantidad de triángulos negros en el paso 100 con solo aplicar la fórmula hallada, con ***n = 100***.

Para ayudarte a resolver este problema te mostramos como sistematizar la información a través de un cuadro de situación, te pedimos que lo verifiques y completes calculando lo que se estimes necesario al efecto de hallar el ***patrón que rige la formación de los triángulos, sus áreas;*** que analices la *forma* de los resultados para los primeros pasos, obtengas una fórmula general para la cantidad de triángulos negros en el ***paso n***, el área de cada uno de ellos, el área total.
Finalmente, que uses esta fórmula para calcular lo que se pide en esta actividad.

		Medidas del ▲ del paso n			Área Total (paso n)
Paso	**Total de ▲**	***lado***	***altura***	$A_n =$ *área* T_n	$a(n) = T_n . A_n$
0	$T_0 = 1$ *(blanco)*	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$A_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	
1	$T_1 = 1 =$........	½	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$A_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$a_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$T_2 = 3 =$.......	$1/4$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$A_2 = \frac{1}{32} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	
3	$T_3 = 9 =$........	$1/8$		$A_3 =$ .... $\frac{\sqrt{3}}{2}$	
....	....	....	....		
n	$T_n = ??$			$A_n = ??$	$a(n) = ??$

Te proponemos también algunas cuestiones para reflexionar:

* El proceso de generar triángulos negros , ¿termina en algún momento??
* *El número de triángulos negros*: ¿aumenta indefinidamente?
* *El área cubierta por los triángulos negros*: ¿aumenta indefinidamente?
* *Con los triángulos negros*: ¿llegamos en algún momento a cubrir todo el triángulo blanco inicial?



ⓘ Si estas preguntas te generan algún tipo de duda existencial, si estas absolutamente desconcertado, entonces, ***vamos bien!!!.***

Para quienes estén desconcertados (para que se queden tranquilos), les cuento que por esta misma desazón pasaron los primeros matemáticos que tropezaron con este tipo de problemas: "*algo* que crece indefinidamente y que, sin embargo, ocupa un *espacio finito* ".
Algunos llegaron a decretar que estos conjuntos no eran "*normales*", que eran casos patológicos de la matemática y por lo tanto no valía la pena ocuparse de ellos.

Pero otros, los de mente y espíritu abierto, se ocuparon de ellos y, ¿qué pasó?,
descubrieron una nueva geometría: ¡¡¡ la geometría fractal !!!.

ANEXO I

<u>Resolución de problemas</u>:

Resolver un problema requiere llevar adelante un ***proceso*** cuya correcta ejecución está ligada a muchas y muy variadas cuestiones las cuales tratamos en este anexo.
En general, y en cuanto al mencionado ***proceso***, se observa la existencia de ***dos subprocesos*** que ***cofuncionan***; es decir, que se alternan aún estando incompletos.

Estos son:

**** el de comprensión***, a través del cual organizamos un modelo mental de situación; decidimos acerca de la ´*naturaleza del problema*´.

**** el de búsqueda,*** a través del cual inspeccionamos evidencias y metas para generar una *estrategia* para hallar la solución; resolver acorde a ella.

¿Naturaleza del problema?; ***¿qué es esto?***:
dado dos problemas puede ser que el *proceso de resolución* de los mismos sea muy distinto o *presente similitudes muy importantes*. En este último caso decimos que los problemas tienen la misma ***´naturaleza´.*** Este hecho (igual o distinta naturaleza) permite agrupar los problemas en ***´clases´*** a las que llamamos ***´problema tipo´***.

En una primera y muy amplia clasificación reconocemos dos tipos de problemas:

(A) - ***Problemas de Resolver***

(B) - ***Problemas de Demostrar***

(A) - ***Problemas de Resolver***

El propósito de un problema de ´*resolver*´ es descubrir o hallar cierto objeto que es desconocido (la *incógnita* del problema) sobre el cual se tiene cierta información (los *datos* del problema). Estos problemas pueden ser *abstractos o concretos*, *serios o simples acertijos*.
Los elementos característicos de los problemas de resolver son tres:
<u>incógnita(s)</u>, <u>datos</u> , <u>condición que vincula datos e incógnita</u>.

(B) - ***Problemas de Demostrar***

El propósito de un problema de ´*demostrar* ´ consiste en mostrar de modo concluyente la verdad o falsedad de una afirmación claramente enunciada.
En un problema clásico de este tipo, los elementos característicos son dos:
<u>la hipótesis</u> y <u>la conclusión o tesis</u> .

Asociado a cada ***´problema tipo´*** en general hay ***´esquemas de procedimientos tipo´*** los cuales facilitan la exploración, búsqueda, planteo, etc.; en definitiva, las acciones necesarias al efecto de resolver el problema.

Se conoce una gran variedad de ***esquemas tipo***, como por ejemplo:
regresivo, progresivo, progresivo-regresivo, por inducción, por contradicción, por enumeración, contrarrecíproco, bifurcación, construcción, selección…

En esta instancia nos abocamos en particular a distinguir los problemas de “resolver” de los de “demostrar”.

A: ***<u>Problemas de Resolver</u>***

En general no existen reglas para resolver problemas pero en el caso de los *problemas de resolver* se observa la existencia de una secuencia de pasos comunes a todos ellos, normalmente cuatro, lo cual permite el diseño de una *guía para su resolución*.

GUÍA PARA LA FORMUACIÓN MATEMÁTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (de resolver).

I.- Entender el problema *(proceso de comprensión):*

Debemos realizar una lectura cuidadosa y completa de ***todo*** el problema. Esta lectura proporciona una visión global; permite reconocer la naturaleza del problema, las *partes* del mismo. Resumidamente, *leer y releer el problema*.

II.- Separar las partes del problema *(proceso de comprensión)***:**

En esta etapa procedemos a identificar variables o hechos relevantes para la resolución; particularmente procedemos a *reconocer*:

1.- *Datos* (¿Qué conozco?)
2.- *Incógnitas* (¿Qué busco?)
3.- *Vinculación entre datos e incógnita* (¿Cómo se relacionan?)

El resultado de esta acción lo plasmamos en símbolos a partir de:

* *etiquetar* y *describir* los datos o variables reconocidos:
<u>*etiquetar*</u> → asignar una letra
<u>*describir*</u> → expresar con una palabra o frase corta que representa la letra.

* proponer un *modelo de palabra* de la relación detectada (describirla en palabras).

* *plantear* todas las ecuaciones o leyes conocidas en las que aparecen relacionados datos e incógnitas; *destacar* las que estimemos útiles para el caso. Hacer lo propio con todas las *restricciones* a las que quedan sujetas las variables según según el *contexto* donde se da el problema.

ⓘ Estas acciones facilitan la *búsqueda* de solución, permiten *organizar* la misma. La *visión global* de todo aquello relacionado al problema resulta de gran ayuda en Su resolución, orienta en la elección de la estrategia más apropiada al efecto.

ⓘ Para etiquetar los datos o las incógnitas es habitual el uso de las letras x, y, z,... siendo esta elección puramente convencional, por costumbre. Así, cuando intervienen cantidades *concretas* (magnitudes) conviene elegir una letra representativa de aquello a lo que el dato o incógnita refiere. Por ejemplo, si la incógnita es un *área* conviene representarla con la letra "*a*"; si es un *perímetro* con la letra "*p*" , etc.

III.- Elaborar un plan de trabajo *(proceso de búsqueda)*:

Identificada la naturaleza del problema, sus partes, debemos proceder a evaluar las mismas al efecto de diseñar un plan de acción, decidir la ***estrategia*** más apropiada para su resolución. Para ello vamos a:

a) ***confeccionar diagramas o figuras que faciliten el análisis:*** En general resulta útil dibujar una figura, gráfico o esquema que ayude a *´visualizar´* la situación: variables relevantes, ecuación que las vincula, etc. Esta acción también facilita el reconocimiento (*si existe*) de *restricciones* o *condiciones de contexto* que limiten los valores que pueden tomar las variables más allá de las cuestiones de orden netamente algebraicas propias del caso.

b) ***reformular la vinculación hallada entre datos e incógnitas en términos de ecuaciones, inecuaciones, etc.; o sea, traducir las relaciones halladas en el paso anterior en términos del ´lenguaje matemático´ , decidir la estrategia matemática con la que vamos a proceder a buscar la incógnita***

Hecho esto procedemos a:
* *clasificar* la expresión obtenida (ecuación, inecuación, función, ..)
* *explicitar* todo lo que conozcamos respecto a la misma, por ejemplo:
☞ ecuación → tipo y cantidad de incógnitas, de soluciones, etc;
☞ función → dominio, gráfica, ceros, etc.

ⓘ Al expresar *matemáticamente* la relación entre *datos* e *incógnitas* lo que hacemos es construir un ***modelo matemático*** de la situación. Pueden existir distintas formas de construir este modelo, que una de ellas *´optimice´* el proceso de resolución. . Hallar la estrategia optima depende de nuestros conocimientos de *´esquemas tipo´*, de que podamos detectar la analogía o similitud con otros problemas resueltos del mismo estilo, de la capacidad que tengamos de idear nuevas estrategia cuando no podamos reconocer el problema como ´problema tipo´, etc. Este paso es uno de los más conflictivos pues aquí entran en juego la tenacidad y creatividad que cada uno posea.

IV.- Ejecutar el plan *(proceso de búsqueda)*.

Se distinguen distintas instancias:

a) ***Resolución algebraica .***
aquí nos limitamos a resolver la o las expresiones algebraicas halladas en el paso anterior; a hallar *todas las soluciones* que estas expresiones admitan.

b) ***Resolución del problema.***
aquí analizamos cual de las soluciones halladas en (a) es solución del problema (*todas*?; *algunas*?; *ninguna*?). Hacemos esto confrontado las mismas con los datos del problema, verificando que se cumplen las condiciones del mismo, desechando soluciones extrañas, etc.

c) ***Respuesta***: damos la respuesta en oración, en forma destacada y precisa.

d) ***Reflexiones de orden " metacognitivo"***: una vez resuelto el problema reflexionamos acerca de los obstáculos hallados, del proceso realizado, (si fue el óptimo), si existe la posibilidad de *´generalizar´* el mismo, etc.

ⓘ En lo que sigue resolvemos un problema a modo de ejemplo. Debido a que se trata de un *ejemplo* indicamos el *paso* de la guía ejecutado en cada instancia. En la práctica habitual no hacemos esto sino que lo damos por sobrentendido.

Ejemplo 1

Un grupo de niños en viaje de estudio visita el Parque Nacional de la Bandera y queda sorprendido por la altura del mástil. Al preguntarle al guía cuanto mide, éste le contesta: "el mástil está formado por tres caños de 20, 18 y 15 cm. de diámetro respectivamente. La mitad del mismo corresponde al caño más grueso, la tercera parte al de 18 cm. y lo que resta mide 5 m." .
Jaime Palillos, mira a sus compañeros y dice: "¿quien preguntó como estaba hecho el mástil ?; además ...., no ve que mide mucho más de 5 m.?!!!.
Lo ayudamos a Jaime?, le explicamos su error y le decimos cuanto mide el mástil.

I.- Entender el problema:

Jaime se queda con la *última parte* de lo que dice el guía, no entiende que lo que está haciendo este es darle *datos* para que ellos *calculen* la longitud del mástil.

II.- Separar las partes de un problema:

Incógnita : $\boldsymbol{l}$ = longitud en metros del mástil → $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}$ *metros*.
$\boldsymbol{x}$ = ***medida*** *del mástil* (→ $\boldsymbol{x} > 0$).

ⓘ acordado que la longitud se trabaja en metros, para simplificar escritura y facilitar la operatoria *obviamos la unidad*; o sea, trabajamos con las *´**medidas**´*

Datos : c_1 = *medida del 1er caño* (diam. 20 cm). → $c_1 = \frac{1}{2}\,x$
c_2 = *medida del 2do caño* (diam. 18 cm). → $c_2 = \frac{1}{3}\,x$
c_3 = *medida del 3er caño* (diam. 15 cm). → $c_3 = 5$

Vinculación: $x = c_1 + c_2 + c_3$

III.- Elaborar un plan (o estrategia):

por datos → $x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 5$ ***Ecuación lineal, una incógnita*** | cantidad de soluciones: ***1***

IV.- Ejecutar el plan:

a) $\frac{1}{6}x = 5$
$x = 30$ ***Solución / Ecuación***

b) $x > 0$ → $x = 30$
$l = 30$ m. ***Solución / Problema***

c) *Rta*: ***el mástil tiene una longitud de 30 m.***

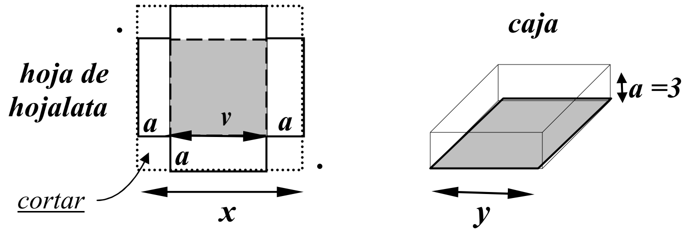
d) *Reflexión*: el problema es muy sencillo, sólo cabe reflexionar acerca del texto, la importancia de "*no quedarnos con lo último que escuchamos o vemos* ".

Ejemplo 2

Se quiere construir una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de una lámina cuadrada de hojalata. Se desea que la altura de la caja sea de 3 cm. y su volumen de 48 cm^3 . Qué dimensiones debe tener la pieza de hojalata para que podamos construir la caja cortando las cuatro esquinas, plegando y soldando luego las piezas a unir?

Incógnita: l = long. en cm. del lado de la lámina de hojalata → $l = x$ cm.

x = ***medida*** del lado de lámina (→ $x > 0$).



Datos: a = *altura de la caja* → $a = 3$ (cm.)

v = *volumen de la caja* → $v = 48$ (cm^3)

base de la caja: *cuadrada*

y = medida del lado de la base de la caja.

Vinculación:
- v = *sup. base* . a
- *sup. base* = y^2
- $y = x - 2a = x - 6$ *(1)* → condición: $y > 0 \Rightarrow x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6$

Resolución: v = *sup. base* . a

por datos → $48 = y^2 . 3$

por (1) → $48 = (x - 6)^2 . 3$ — ***Ecuación 2º grado Incógnita: x*** — cantidad de soluciones: ***2***

$(x - 6)^2 = 16$ → $\sqrt{(x-6)^2} = \sqrt{16}$

$|x - 6| = 4$ — ***Ecuación valor abs. Incógnita: x*** — cantidad de soluciones: ***2***

$x - 6 = 4$ → $x_1 = 10$
$x - 6 = -4$ → $x_2 = 2$
— ***Solución / Ecuación***

restricción ($x > 6$) → $x_1 > 6$ → $x = x_1 = 10$ — ***Solución / Problema***

Rta: ***el lado de la hoja de hojalata debe ser de 10 cm.***

d) ***Reflexiones***:

➲ La ***ecuación*** tiene ***2*** soluciones pero ***sólo una*** es ***solución del problema***.

➲ ¿Existirá alguna combinación de *altura* y *volumen* de la caja para la cual el *problema* tenga *dos soluciones*? ¿Para qué puede servir contestar este interrogante?

ⓘ Para contestar esto último debemos trabajar en ***forma genérica***; o sea, con ***letras***:

a = *altura de la caja*

V = *volumen de la caja.*

En tal caso, la resolución queda:

por datos y (1) → $V = (x - 2a)^2 \cdot a$

resolviendo → $(x - 2a)^2 = \frac{V}{a}$ — ***Ecuación 2º grado. Incógnita: x*** — cantidad de soluciones: ***2***

resolviendo → $|x - 2a| = \sqrt{\frac{V}{a}}$ — ***Ecuación valor abs. Incógnita: x*** — cantidad de soluciones: ***2***

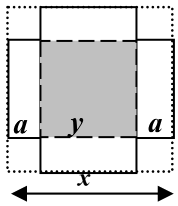
$$\boxed{\begin{array}{l} x - 2a = \sqrt{\frac{V}{a}} \rightarrow x_1 = 2a + \sqrt{\frac{V}{a}} \\ x - 2a = -\sqrt{\frac{V}{a}} \rightarrow x_2 = 2a - \sqrt{\frac{V}{a}} \end{array}}$$

Solución / <u>Ecuación</u>

<u>restricción</u>

$x > 2a$ →

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 > 2a \rightarrow x_1 \text{ solución del problema} \\ x_2 < 2a \rightarrow x_2 \text{ nunca es sol. prob.} \end{array}}$$



$$\boxed{x = x_1 = 2a + \sqrt{\frac{V}{a}}}$$

Solución / <u>Problema</u>

<u>Rta</u>: ***el problema siempre tiene solución, y esta es siempre <u>única</u>.***

ⓘ Resolver la cuestión anterior sirve para saber que existe una única forma de construir la caja pedida; que no existen entonces opciones en cuanto al gasto a realizar en la construcción de dicha caja. (si hubiera más de una solución tendríamos opción a elegir aquella para la que dicho gasto fuera mínimo) . Vemos así que esta cuestión de reflexionar sobre lo hecho tiene su utilidad; que, entre otras cosas, sirve para resolver cuestiones concretas como saber si existe la opción de gastar *´lo menos posible´* en la confección de estas cajas.

B: ***Problemas de Demostrar***

En esta instancia nos ocupamos de los ***´problemas de demostrar´***, revisando previamente conceptos y nociones necesarios para trabajar con este tipo de problema.

Reglas, Leyes y Demostraciones

En la actualidad reconocemos tres tipos de reglas o leyes:

- las ***arbitrarias***, es decir las validadas por un "***criterio de autoridad***" .
  Ejemplo: las reglas de tránsito.
- las ***deducidas lógicamente***; es decir, las validadas por un "***criterio lógico***".
  Ejemplo: $\forall$ a, b$\in$ R ; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab+ b^2$
- las ***inferidas inductivamente***; es decir, las validadas por un "***criterio experimental***".
  Ejemplo: "*la distancia recorrida por un cuerpo en caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo*" ; Ley de Galileo

Entre las reglas empíricas (*las inferidas*) y las reglas matemáticas (*las deducidas*), existe una diferencia fundamental. Para las matemáticas la validez de la regla se *demuestra para todos los casos*, mientras que para las empíricas la validez de la regla se *infiere de un número finito de casos*. Es decir, para las empíricas se *asume* (no se demuestra) que lo observado para un número finito de casos, *vale para todos*, incluidos los no observados. Así, a diferencia de las reglas matemáticas, para las empíricas nunca podemos estar totalmente seguros de su validez.

Como dijera Einstein: "*ninguna cantidad de experimentos puede demostrar que estoy en lo cierto, mientras que uno solo puede demostrar que me equivoqué"* .

Por ejemplo, "*todos los números naturales son menores que 100.000.000*" es una afirmación *falsa* aunque se puedan mostrar millones de números menores que 100.000.000 (tantos como 99.999.999). Basta mostrar un número (100.000.001) para echar por tierra esta afirmación .

Esto nos da la pista de como justificar un verdadero y como un falso. Así, tenemos:

*** *Justificación del Falso:*** a través de un *contraejemplo*. (*ej. donde la afirmación no se cumple*).

*** *Justificación del Verdadero:*** por medio de una *demostración* .

(Demostrada la verdad de una afirmación, la misma recibe el nombre de ***teorema***).

Demostración. Demostrar consiste en *deducir* la verdad de una afirmación a partir de afirmaciones cuyo valor de verdad se conoce o acepta (la palabra *deducir* refiere a un proceso sujeto a *las reglas de la lógica*). La historia muestra como poco a poco y a lo largo del tiempo fueron apareciendo reglas útiles a los efectos de decidir la verdad de una afirmación; por ende, reglas que ayudan a *razonar*. Estas reglas se reunieron y perfeccionaron hasta conformar una nueva disciplina, la Lógica. Así, hoy día disponemos de *´reglas para razonar´* cuyo conocimiento aliviana la tarea de *demostrar*; más aún, facilita el ***aprender a demostrar***.

Un primer paso para ***aprender a demostrar*** es entender una demostración hecha por otro (por ej, un ***teorema***), ser capaz de usar la misma en una demostración propia. El análisis, estudio y reproducción de demostraciones hechas por otros facilita la producción de las propias demostraciones. A partir de este ejercicio podemos aprehender ciertas técnicas o peculiaridades del quehacer matemático, reconocer que ***es tan importante aprender reglas algebraicas como ´aprender a demostrar´***.

A su vez, entender o reproducir una demostración matemática resulta más sencillo si se conocen las diferentes ***técnicas para demostrar;*** esto permite que la mente se concentre en los aspectos importantes de la demostración, no se distraiga en los pasos auxiliares o cálculos que la misma requiera.

* ***Problemas de demostrar***

Estos problemas son esencialmente teóricos y su propósito es establecer de modo concluyente la verdad o falsedad de un enunciado claramente establecido.

Los elementos clásicos de un problema de este tipo son: ***la hipótesis (ó dato) y la tesis (ó conclusión);*** es decir, estos son generalmente enunciados de la forma ,

"Si $\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\textit{hipótesis}}$, entonces $\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\textit{tesis}}$ ".

Por ejemplo: "si *n es múltiplo de 6*, entonces *n es par* " .

Los enunciados de este tipo se conocen con el nombre de "***implicaciones***" y se representan en forma genérica como " **p ⇒ q**" (**p** = *hipótesis* ; **q** = *tesis*) .

ⓘ la proposición **" p ⇒ q"** se puede "leer" de distintas formas:

* si pasa p, entonces pasa q .
* p es condición suficiente para q .
* q es condición necesaria para p.

ⓘ ***Implicaciones derivadas:*** ***recíproca***; ***contra recíproca*** y ***contraria***

Asociado a una *implicación* (la directa) hay tres enunciados que también son *implicaciones* y a los cuales llamamos: *recíproco, contra recíproco* y *contrario*.

» ***directa*** : **p ⇒ q** Ej: "Si (n es múltiplo de 6), ***entonces*** (n es par) "

» ***recíproca***: **q ⇒ p** Ej: "Si (n es par), ***entonces*** (n es múltiplo de 6) "

» ***contra recíproca:*** ***no*** q ⇒ ***no*** p Ej: "Si (n ***no*** es par), ***entonces*** (n ***no*** es múltiplo de 6)"

» ***contraria***: ***no*** p ⇒ ***no*** q Ej: "Si (n ***no*** es múltiplo de 6), ***entonces*** (n ***no*** es par) "

Observaciones:

1) Dado una afirmación verdadera su *recíproca puede o no ser verdadera*. La confusión entre estas dos afirmaciones (directa y recíproca) es fuente habitual de errores.
2) En el caso que una afirmación y su recíproca fueran ambas verdaderas entonces se pueden enunciar en forma conjunta como sigue: "*hipótesis* ***si y sólo si*** *tesis*" ó " **p ⇔ q**"
En este caso se dice que "p" y "q" son ***equivalentes.***
3) Se demuestra que si la afirmación directa es verdadera la *contra recíproca también lo es*. Dado que "la contra-recíproca de la contra-recíproca es, *la directa*" (***no***, no p = p), este resultado ofrece otro camino para demostrar una implicación: demostrar su contrarecíproca.

Demostrar la verdad de una afirmación de la forma "p ⇒ q " requiere, "aceptar la verdad de p, deducir lógicamente y a partir de allí, la verdad de q".

Existen distintos métodos o técnicas para demostrar y cual conviene depende del caso. Entre los métodos para "*demostrar*" tenemos:

a) el directo,
b) el indirecto o por contra-recíproco
c) por el absurdo ó contradicción
d) por enumeración,
e) por inducción,
f) por refutación.

a) <u>Método Directo</u>: para demostrar **p** $\Rightarrow$ **q** ó que, *la hipótesis* $\Rightarrow$ *la tesis*

Se parte de "***p***" y se trata de llegar a "***q***" a través de una *cadena de afirmaciones* intermedias donde cada afirmación de la cadena es *consecuencia lógica* de la anterior. Es decir, ***se asume la verdad de p*** y se busca una afirmación p_1 que ***se derive de p*** (o sea, que sea verdadera para ***p*** verdadera). Se repite el proceso a partir de p_1 y se obtiene p_2; a partir de p_2 se obtiene p_3 y así se continúa (*si se puede*) hasta que, en algún paso, se obtiene "***q***".

$$\begin{array}{lcccccccccc} p \text{ (hipótesis)} & \Rightarrow & p_1 & \Rightarrow & p_2 & \Rightarrow & p_3 & \Rightarrow & \ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & q \text{ (tesis)} \\ \text{(V)} & \Rightarrow & \text{(V)} & \Rightarrow & \text{(V)} & \Rightarrow & \text{(V)} & \Rightarrow & \ldots\ldots\ldots & \Rightarrow & \text{(V)} \end{array}$$

ⓘ Para la construcción de esta cadena de proposiciones debemos acudir tanto a definiciones, axiomas y propiedades ya conocidas como a teoremas ya demostrados. En cualquier caso debemos indicar el resultado que estamos usando para obtener la proposición derivada. Para no interrumpir la línea de razonamiento señalamos estos lugares con un número entre paréntesis y damos el significado de dicho número al final de la demostración.

***<u>Ejemplo 1</u>*:** demostrar que "$\forall$ n$\in$ N ; si $\overbrace{n \text{ es impar}}^{p}$, entonces $\overbrace{n^2 \text{ es impar}}^{q}$ ".

$$\textbf{n impar} \overset{(1)}{\Rightarrow} \text{existe } k \in N \text{ tal que } n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} n^2 = (2k)^2 + 2.\,2k\,.1 + (1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} n^2 = 2\,(\,2k^2 + 2k\,) + 1 \overset{(4)}{\Rightarrow} n^2 = 2.\boldsymbol{K} + 1 \overset{(5)-(1)}{\Rightarrow} \mathbf{n^2 \text{ es impar}}$$

(1) propiedad de impar.
(2) binomio de un cuadrado: $(a+b)^2 = (a)^2 + 2.\,a\,.b + (b)^2$
(3) sacando factor común "2".
(4) $2k^2 + 2k = \boldsymbol{K}$
(5) $\boldsymbol{K} \in$ N

b) <u>Método Indirecto</u> (o por contra-recíproco)

Dada la equivalencia entre un enunciado y su contra-recíproco, un enunciado del tipo "***p*** $\Rightarrow$ ***q*** " también se puede demostrar a partir de demostrar su contra-recíproco; o sea, a partir de *demostrar* que "***no q*** $\Rightarrow$ ***no p*** " es verdadero.

***<u>Ejemplo 2</u>*:** demostrar que "$\forall$ n $\in$ N, si $\overbrace{n^2 \text{ es par}}^{p}$, entonces $\overbrace{n \text{ es par}}^{q}$".

ⓘ la demostración *directa* se complica (comprobar). Luego, intentamos con el contra-recíproco.

» ***<u>contra-recíproco:</u>*** "$\forall$ n $\in$ N, si $\overbrace{n \text{ es impar}}^{no\ q}$, entonces $\overbrace{n^2 \text{ es impar}}^{no\ p}$".

En el ejemplo 1 demostramos que esta afirmación es verdadera; así, en base a lo obtenido en dicho ejemplo concluimos que ***no*** q $\Rightarrow$ ***no*** p es verdadera.

» *<u>luego</u>*, **p** $\Rightarrow$ **q** también lo es ; o sea que:

"$\forall$ n $\in$ N, si (n^2 es par) entonces (n es par) " es verdadera.

c) Método por ´reducción al absurdo´ o por ´contradicción´ .

Dada una afirmación del tipo $p \Rightarrow q$, en el método por reducción al absurdo en vez de demostrar en forma *directa* la verdad de ***q*** *a partir* de la verdad de ***p***, lo que hay que demostrar es que si ***p es verdadero*** entonces ***q, no puede ser falso***. Para ello basta demostrar que si se supone ***q falso*** entonces se llega a un ***absurdo*** o ***contradicción*** (por ejemplo, a contradecir ***p***)

En definitiva, una demostración por contradicción consiste en demostrar que: "si ***q fuera falso*** entonces ***p sería falso*** "; o sea, en llegar al ***absurdo*** o ***contradicción*** de negar la verdad de ***p*** (la que *de partida* sabemos que es verdadera).

Si llegamos a un absurdo en algún lugar debe haber un error. Así, y en el caso de haber realizado correctamente el proceso de deducción, la única posibilidad de error está ***al inicio de la cadena***, es decir, en el supuesto inicial de que ***q*** era ***falso***. Concluimos de esta manera que ***q no puede ser falso***; ó, equivalentemente, que ***q es verdadero***.

Y queda demostrado así que la verdad de ***p*** implica la de ***q***; o sea, que $p \Rightarrow q$.

Ejemplo 2: demostrar que "$\forall$ n $\in$ N, si $\overbrace{n^2 \ es \ impar}^{p}$, entonces $\overbrace{n \ es \ impar}^{q}$ "

p: "n^2 es impar" → (verdad por hipótesis)
q: "n es impar" → (hecho a *demostrar* a partir de la verdad de ***p***).

Suponemos ***q falso*** y de allí partimos con la demostración:

$$q \text{ falso} \Rightarrow \text{"n no es impar"} \Rightarrow \text{"n es par"} \overset{(1)}{\Rightarrow} \text{existe } k \in N \text{ tal que } n = 2k$$

$$\Rightarrow n^2 = (2.k)^2 \Rightarrow n^2 = 2.(2.k^2) \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{n^2 \text{ es par}}$$

(ABSURDO, contradice la hip.)

Luego, ***q no es falso*** $\Rightarrow$ ***q es verdadero*** $\Rightarrow$ "***n es impar*** " .

Conclusión "$\forall$ n $\in$ N, si *n^2 es impar* entonces *n es impar*", es verdadera.

(1) por propiedad de par.

d) demostración por enumeración

Dada una afirmación del tipo $p \Rightarrow q$, si la afirmación "***p***" se puede descomponer en un número finito de casos entonces analizamos caso por caso la validez de "***q***"

Ejemplo 4: "si n $\in$ N, entonces $\cos(n\pi) = (-1)^n$ "

n $\in$ N $\Rightarrow$ n par *ó* n impar ($\Rightarrow$ 2 casos)

» **n par** $\Rightarrow \exists\, k \in N$ / $\mathbf{n} = 2k \Rightarrow \mathbf{\cos(n\pi)} = \mathbf{\cos}(2k\pi) = 1 = (-1)^{2k} = \mathbf{(-1)^n}$ ✓

» **n impar** $\Rightarrow \exists\, k \in N$ / $\mathbf{n} = 2k+1 \Rightarrow \mathbf{\cos(n\pi)} = \mathbf{\cos}((2k+1)\pi) = -1 = (-1)^{2k+1} = \mathbf{(-1)^n}$ ✓

e) Método por Inducción :

Este método es más complicado que los anteriores (y no lo vemos aquí). Se usa para probar proposiciones que afirman que algo vale *para todo número natural*, como por ejemplo el siguiente enunciado:
"***La suma de los sucesivos números impares es igual a la cantidad total de sumandos elevada al cuadrado*"; ó equivalentemente,**
"$\forall$ n $\in$ N ; $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$ " .

f) método por refutación (para demostrar que una afirmación es ***falsa***)

Si la demostración de una afirmación o conjetura se hace imposible, si ninguno de los métodos resulta efectivo, cabe pensar que la misma sea ***falsa***. Existen dos formas de probar un ***falso***: con un *contraejemplo* ó por *contradicción* .

* ***Refutación a partir de un ´contraejemplo´:***

En este caso, para refutar una proposición, simplemente procedemos a dar un ejemplo en donde la misma no se cumpla. A este ejemplo lo llamamos, ***contraejemplo.***

Ejemplo 5: refutar la afirmación, "$\forall$ n $\in$N, n impar $\Rightarrow$ n^2 par ".

Para refutar esta afirmación basta mostrar *un número impar* cuyo cuadrado *no sea par*.

Por ej.: n = 3 (impar) basta para refutar la proposición pues $3^2 = 9$, que es *impar*.

* ***Refutación por contradicción*:**

En este caso aceptamos la conjetura como *verdadera* y a partir de allí procedemos a deducir consecuencias. Si en este proceso llegamos a una afirmación que contradice algún teorema, propiedad conocida o dato, concluimos que la conjetura es ***falsa***.

Ejemplo 5: refutar la proposición " $x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\;$ x es un número racional ".

Aceptamos la afirmación como *verdadera* y sacamos conclusiones a partir de ella:

- **x es racional** $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ existen p, q $\in$ Z, ***no ambos pares***, $q \neq 0$ tal que $x = \frac{p}{q}$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow q^2\, x^2 = p^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} q^2\, \mathbf{2} = p^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} p^2 \text{ es par}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{p} \textbf{ es par}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \text{existe } k \in N \text{ tal que } p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} q^2\, \mathbf{2} = 4k^2 \Rightarrow q^2 = \mathbf{2}\, k^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} q^2 \text{ es par} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{q} \textbf{ es par}}$$

De donde concluimos que tanto ***p*** como ***q*** serían pares, lo cual ***contradice*** (1).
Así, aceptar que la afirmación es verdadera conduce a una ***contradicción***, por lo tanto hay un error en algún lado. Como todos los pasos son correctos, el error sólo puede estar al principio, o sea, en el supuesto inicial de que la proposición era verdadera. Luego, es falsa.

(1) por definición de número racional.
(2) *por hipótesis*: $x^2 = \mathbf{2}$
(3) por propiedad de par .
(4) reemplazando en *(2)*.

ANEXO II

NOTACIÓN CIENTÍFICA por Lic. Manuel Vara Orozco - MÉXICO
(Extracto del artículo publicado en el BOLETÍN:
LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA MEDIA – URUGUAY)

El ser humano mandó señales hacia una galaxia que está a *25 años luz de distancia*, por medio de un radiotelescopio.
Se enviaron, por *código binario*, datos sobre nosotros: que medimos cerca de 1.70 m, cómo es nuestro ADN, que ocupamos el tercer planeta de nuestro sistema planetario,...
La respuesta llegó luego de *27 años* y quedó plasmada en los campos de trigo de Inglaterra, donde ya otras veces han aparecido marcas extrañas, corno el campo magnético de un imán. La respuesta fue similar a la enviada con código binario y los habitantes de esa galaxia nos dicen que miden aproximadamente un metro de estatura, que su ADN es diferente, quizá en unas partes más complicado, que ocupan el cuarto y el quinto planetas de su sistema y, además, ocupan un satélite de uno de sus planetas.
Podemos no creer nada de esto, pero *sí sabemos* que los ingleses, al hacer pasar rayos de luz por helio congelado, obtuvieron que la luz alcanza una velocidad algo mayor a los 300.000 *km/seg.*
Si fuera cierto que la señal *regresó en 27 años* (y que la *enviada* no cambia su comportamiento en el espacio exterior cercano a la otra galaxia), tendríamos entonces que la señal tarda *25 años* en llegar *y 2* en regresar. Esto permite *´conjeturar´* que el tipo de señal (alguna onda electromagnética) enviada *desde la otra galaxia* tiene que haber viajado *´12.5 veces más rápido que la luz´.*

> Para llegar a esta conclusión basta saber que ***un año luz*** es la ***distancia*** recorrida por la luz en un año; obtener luego, con simples cuentas, la *distancia* a la que se encuentra la galaxia a la que se envió la señal ($2{,}36682.10^{14}$ km.), dividir la misma por el tiempo (en segs.) que tarda en volver. (tomando: 1 año $\cong$ 325,25 días).

Suena interesante y de fábula, ¿no?
Particularmente resulta difícil aceptar toda esta historia porque lo que hoy *sabemos* (o *´creemos´*) es que *´no hay velocidades mayores a las de la luz´.* Según el físico alemán Albert Einstein, cuando la velocidad (v) es cercana a la de la luz, para calcular el tiempo (ya que ocurre su dilatación) tenemos que aplicar la siguiente fórmula:

$$t = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad (\text{ t en segundos ; } c = \text{velocidad de la luz })$$

de donde se concluye que *´no hay velocidades mayores a las de la luz´.*

De aquí entonces el escepticismo en cuanto a aceptar que *´contestaron´* el mensaje, que hicieron esto con un tipo de onda cuya velocidad es *´12.5 veces la de la luz´.*
Pero antes de ser tan dogmáticos y negar la posibilidad, ¿no habrá que pensar que pueden existir *otras forma de medir el tiempo*? ; *desarrollar nuevas teorías*?
Sabido es que el mismo hombre que se coloca límites, es el que los rompe.
Así en su momento Newton expande la Física de Galileo y más tarde Einstein hace lo propio con la de Newton. O sea, la evolución del conocimiento es imparable y se da en función de los hombres que no temen adentrarse en la aventura del más allá, que saben que hipótesis que parecen *absurdas* pueden ser la razón de nuevas teorías.

ANEXO III

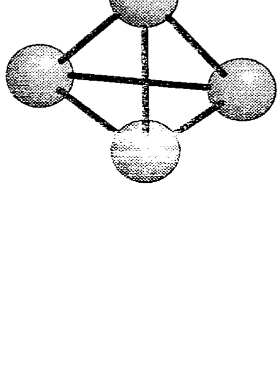
LA MATEMÁTICA Y LOS MISTERIOS DE LA VIDA por Theoni Pappas
(Extracto del libro: "El Encanto de la Matemática" - Colección de Mente)

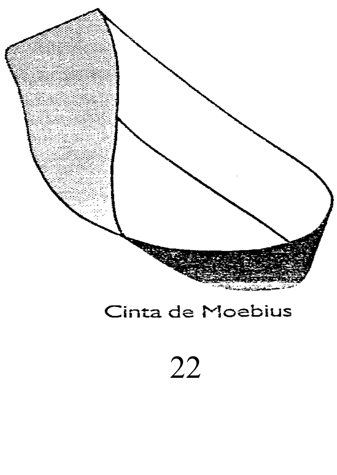
El mundo científico usa constantemente ideas matemáticas en su intento por develar los misterios de la vida. Así, la investigación científica y la matemática son una combinación esencial para descubrir los misterios del cuerpo humano, para analizar sus funciones. Veremos aquí algunos ejemplos en los que se emplea la matemática en busca de respuestas a cuestiones tales como el funcionamiento del cuerpo o la evolución de los seres vivos. Resulta difícil entender como una disciplina que esencialmente se ocupa de objetos inanimados u objetos de la imaginación pueda dar respuestas a semejantes cuestiones. Quizás sea hora de revisar nuestras creencias, preguntarnos si esta capacidad infinita que tiene la matemática de describir la vida y la belleza no está indicando que es mucho más compleja de lo que imaginamos, que simplemente todavía no hemos logrado ´capturar su esencia´.

➢ ***Modelos Matemáticos y Química***

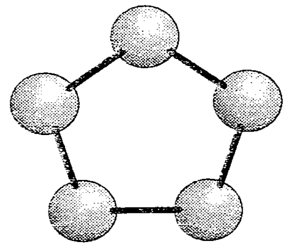
Los objetos matemáticos están presentes en muchas sustancias químicas. Así al estudiar la estructura molecular de las mismas encontramos pentágonos bajo la forma de desoxirribosa, tetraedros en las moléculas de silicato, hélices dobles en el ADN, formas poliédricas en cristales y otras formaciones moleculares. Por eso no sorprende el hecho que al crear nuevas sustancias los químicos se basen en modelos matemáticos. Los átomos de carbono pueden asimilarse a ´bloques de construcción´ pues con ellos se pueden construir cadenas, anillos o estructuras tridimensionales de todo tipo. Por ejemplo en 1938, un químico de la Universidad Estatal de Ohio formó una molécula similar a un dodecaedro con 20 átomos de carbono rodeados por 20 átomos de hidrógeno. Se parecía a una pelota de fútbol y fue denominada *dodecaedrano.* Pero los modelos euclideanos no son los únicos que se utilizan. En 1983, químicos de la Universidad de Colorado obtuvieron un compuesto al que denominaron *tris.* Este compuesto adopta la forma de la cinta de Möebius (superficie de un solo lado y un único borde descubierta en 1848 por A. Möebius). El *tris* está compuesto por cadenas de átomos de carbono y oxígeno que terminan en grupos de alcoholes los cuales tienen la propiedad de unirse cuando se imprime *un medio giro* a la cadena, adoptando así la forma de la cinta de Möebius. Las propiedades geométricas de esta ´*cinta*´ están sin dudas relacionadas con las propiedades físico/químicas del respectivo compuesto; así, conocer estas propiedades facilita el estudio del mismo.

Silicatos



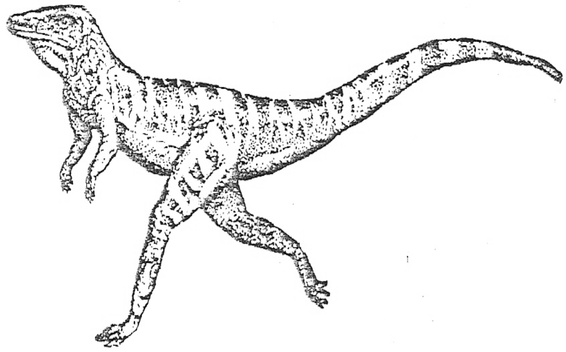


Cinta de Moebius



Desoxirribosa

➢ ***<u>Matemática e</u> <u>Ingeniería Genética</u>***



Jurassic Park ha dado sin dudas una clara conciencia de las maravillas y horrores de la ingeniería genética. El drama de la vida se despliega dentro de una *célula*. Una célula que sea humana, de pez, planta o insecto es el hogar de una molécula *helicoidal* de ADN.
Pero, ¿qué hace una hélice o espiral matemática en el interior de la célula de todo ser vivo? ¿Qué propiedad de su estructura hace se encuentre allí, en el centro mismo de la vida? ¿Cuál es su función?, ¿cómo influye en la relación de los genes – los trasmisores de las características de cada forma de vida – con el ADN?

La molécula de ADN con sus genes proporciona el *mapa* de la vida de la célula. Es sorprendente considerar que estos *mapas genéticos* son absolutamente distintos de un organismo a otro, que no se repiten, aún cuando *los elementos constitutivos esenciales de todas las células sean unos pocos y siempre los mismos.* ¿Cómo puede ser?, ¿cómo se explica este fenómeno? La explicación está dada por la cantidad de ***combinaciones*** que se pueden obtener a partir de unos pocos elementos: estas pueden ser miles o millones. La estructura de un ser vivo es el resultado de la forma como se "*combinan*" o "*secuencian*" los "*símbolos*"[1] que usan los genes para trasmitir información. De aquí que, aunque los genes usen los mismos "*símbolos*", pueden ser prácticamente infinitas la cantidad de estructuras diferentes por ellos generados.

¿Cómo desciframos estos ***códigos*** y demás misterios de la célula viva? En este punto entran en juego los ***conceptos matemáticos de <u>patrón</u>, <u>combinación</u>, <u>secuencia</u>, <u>relación</u> y <u>correspondencia uno a uno</u>***, conceptos todos que desempeñan un papel crucial en la revelación de tales misterios. Así, el conocimiento y dominio de estos conceptos constituye un paso ineludible para poder estudiar y categorizar las infinitas combinaciones que determinan naturaleza y constitución de los seres vivo.

La ***ingeniería genética*** se ocupa, en esencia, de la manipulación de la estructura de las moléculas de ADN. Los científicos que se ocupan del tema (ingenieros genéticos, biólogos, etc) han encontrado la manera de duplicar, alterar, dividir y unir secuencias de códigos; en otras palabras, ***<u>han hallado el modo de cambiar el mapa de una célula</u>***. Pueden también hacer el denominado ADN recombinante, un ADN que consiste en una combinación de bases tomadas de organismos totalmente diferentes, como por ejemplo, una célula humana y una célula bacteriana. ***Y así la alteración de los códigos genéticos puede hacerse ahora en una fracción del tiempo que insume la ocurrencia del suceso por selección natural.***

¿Es esto deseable, útil, dañino? Todo depende de la responsabilidad con que se proceda en estas manipulaciones tan fáciles de concretar, tan difíciles de evaluar en cuanto a las consecuencias de las mismas.

---

[1] - elementos que forman el *código* de la célula.

TALLER 3

OBJETIVOS

Trabajar los conceptos de *distancia entre puntos* y *entorno*. El interés en afianzar estos conceptos radica en que su conocimiento y dominio resulta fundamental a la hora de abordar con éxito la definición de límite, particularmente la comúnmente conocida como "definición épsilon-delta" (cuarta y quinta letras del alfabeto griego tradicionalmente usadas para indicar números positivos pequeños).
Dado que la definición de ambos conceptos está ligada a la de "*valor absoluto de un número real*" la comprensión de los mismos requiere poseer una importante destreza en el manejo algebraico del *valor absoluto*. Así, otro objetivo de este taller es el desarrollo de tal destreza, cuestión que abordamos a través del trabajo con otro concepto básico del Análisis Matemático, el de "*error*".

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. a) Leer en el **Anexo IV** el siguiente texto:

"*Números exactos - Números aproximados y Errores*"

b) (propagación del error por cálculos aproximados).

Dado $A = \dfrac{1}{x - 0.666\,666\,65}$; calcular a para $x = 2/3 = 0.66666666666\ldots\ldots$

de las tres formas que se indican a continuación ; comparar los resultados:

(i) Trabajando con la expresión decimal de 2/3 , " truncada" en 8 decimales

2/3 → 0.666 666 66⌋

(ii) Trabajando con la expresión decimal de 2/3 , "redondeada" en 8 decimales

2/3 → 0.666 666 67⌋

(iii) Pasando **0.666 666 65** a fracción y operando luego con fracciones.

c) Escribir las mediciones que se dan a continuación según la *notación habitual*. Luego, determinar y graficar el *intervalo de incerteza* correspondiente a cada una de ellas.

i) va_p = 2.65 gr. ; cota del error = 0.01 gr.
ii) va_p = 2.6518 gr. ; cota del error = 0.0001 gr.
iii) va_p = 73.2 gr. ; cota del error = 0.2 gr.
iv) va_p = 78 mm. ; cota del error = 1 mm.
v) va_p = 37.8 cm^3 ; cota del error = 0.5 cm^3.
vi) va_p = 3825 mm^3 ; cota del error = 40 mm^3.

2. *Valor absoluto - Distancia*.

En las proposiciones que se indican a continuación,

i) "si $|t - 3| < \delta$ entonces $|x - 6| < 1$".
ii) "si $|t + 5| < \delta$ entonces $|x + 10| < 4$".
iii) "si $|t - 3| < \delta$ entonces $|-x + 6| < 1$".
iv) "si $|t - 3| < \delta$ entonces $|x - 6| < -1$".
v) "$\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $|t - 3| < \delta$ entonces $|x - 6| < \varepsilon$".

las variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{t}$ se encuentran ligadas según la relación $\boldsymbol{x = 2t}$.

Usando este dato te pedimos:

a) hallar (si existe) un número positivo δ tal que las proposiciones sean verdaderas;
b) en cada caso en que δ exista, expresar la proposición con el δ hallado y en término de ***distancia entre puntos*** ⓘ;
c) en cada caso en que δ exista, expresar la proposición con el δ hallado y en término de ***entornos*** ⓘ;
d) Trazar dos ejes paralelos, asignar la variable ***t*** al primero y la ***x*** al segundo. Marcar en cada eje los entornos hallados en (c). Luego, y según la relación que liga ***t*** con ***x***, marcar la correspondencia entre los puntos *sobresalientes* de cada entorno (*extremos* y *centro*).

ⓘ ***distancia entre puntos***: $\forall\, a; b \in R$, $d(a;b) = |b - a| = |a - b|$.

ⓘ ***entorno de x_o de radio r***: $\mathbf{E}(x_o; \boldsymbol{r}) = \{ \boldsymbol{x} \in R \,/\, d(\boldsymbol{x}; x_o) < \boldsymbol{r} \} = (x_o - \boldsymbol{r};\ x_o + \boldsymbol{r})$

Ejemplo: Siendo $x = 2t$, hallar $\delta > 0$ tal que: "si $|\mathbf{t - 2}| < \delta$ entonces $|\mathbf{x - 4}| < \mathbf{2}$".

<u>*Incógnita*</u>: $\delta > 0$ tal que: si $|t - 2| < \delta$ entonces $|x - 4| < 2$

<u>*Datos*</u>: $x = 2t$; $|x - 4| < 2$.

<u>*Estrategia de resolución:*</u> analizar si el problema es "resoluble".
Si lo es, ***reemplazar*** x por 2t en el valor absoluto que es ***dato***, trabajar algebraicamente hasta llegar a una expresión en **t** donde figure el *valor absoluto* a acotar por δ. Finalmente, operando conveniente y apropiadamente con *desigualdades* hallar la incógnita; o sea, el valor de **δ.**

<u>*Resolución:*</u>

$$|\mathbf{x - 4}| \overset{x=2t}{=} |2t - 4| = |2(t-2)| \overset{\text{prop. valor abs.}}{=} |2|\,|t-2| \overset{\text{def. valor abs.}}{=} \mathbf{2}.|\mathbf{t - 2}| \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\mathbf{x - 4}| = \mathbf{2}.|\mathbf{t - 2}|}$$

Si en esta igualdad hacemos $\mathbf{2.|t - 2| < 2}$ entonces $|\mathbf{x - 4}| < \mathbf{2}$;

o sea, si $|\mathbf{t - 2}| < \mathbf{1}$ entonces $|\mathbf{x - 4}| < \mathbf{2}$.

Luego, para que la proposición sea ***verdadera*** basta tomar $\delta = \mathbf{1}$.

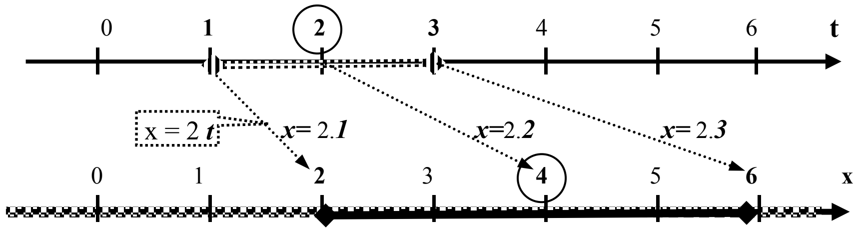
<u>**Rta (a)**</u>: $\delta = \mathbf{1}$

b) "si $d(\boldsymbol{t};2) < \boldsymbol{1}$ entonces $d(\boldsymbol{x};4) < \boldsymbol{2}$".

c) "si $\boldsymbol{t} \in E(2;\boldsymbol{1})$ entonces $\boldsymbol{x} \in E(4;\boldsymbol{2})$".

d) $E(2;\boldsymbol{1}) = \{ \boldsymbol{t} \in R \;/\; d(\boldsymbol{t};2) < \boldsymbol{1} \} = \mathbf{(1;\,3)}$ (entorno de centro 2 y radio $\delta = \boldsymbol{1}$).

$E(4;\boldsymbol{2}) = \{ \boldsymbol{x} \in R \;/\; d(\boldsymbol{x};4) < \boldsymbol{2} \} = \mathbf{(2;\,6)}$ (entorno de centro 4 y radio $\varepsilon = \boldsymbol{2}$).



☞ Todas las actividades que se proponen a continuación tienen una estructura análoga: *dos magnitudes ligadas a través de una relación conocida, más el dato del entorno donde se mueve una de ellas*. El objetivo es hallar el entorno donde, según la relación que las liga, se mueve la otra magnitud. Tenemos así: ***datos*** *e* ***incógnita*** ⇒ "***problemas de resolver***"

Estrategia de resolución: aplicar la "Guía para la resolución de problemas (de resolver)"

I -II) Explicitar claramente incógnita, datos y toda otra cuestión atinente al problema. Proponer la vinculación entre datos e incógnitas a través de la expresión: **"si d (...; ....) < δ entonces d (...; ....) < ε".**

III -IV) trabajar acorde lo visto en el ejercicio anterior (2) .

ⓘ En problemas relativos a *errores*, tendremos en cuenta que $\mathcal{E}$ mide la ***distancia*** entre el *verdadero valor* (*vv*) y el *aproximado* (va_p), o sea, que $\mathcal{E} = d(\boldsymbol{vv};\, \boldsymbol{va_p}) = |\, \boldsymbol{vv} - \boldsymbol{va_p} \,|$)

Ejemplo 1 **:**

Se desea verter 500 cm^3 de agua en un recipiente de base cuadrada y 1000 cm^3 de capacidad. Si el lado de la base mide exactamente 10 cm, ¿cuál es, *como máximo*, el error con que podemos medir la altura de agua en el recipiente, para estar seguros de tener 500 cm^3 de agua con un error (*máximo*) de 25 cm^3 ? .

Datos: **R** = recipiente *base cuadrada*, capacidad 1000 cm^3

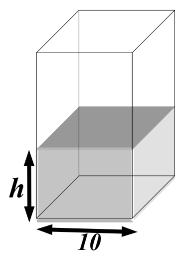
$\boldsymbol{l}$ = lado de la base de R = 10 (cm)

$\boldsymbol{h}$ = altura del agua en R .

V = volumen de agua en R

*** *vinculación***

↦ $\boxed{\mathbf{V = 100.\,\boldsymbol{h}}}$



$\mathcal{E}_V$ (*error vol.*) $= |\, V_{calc.} - V_e \,|$ → $\mathcal{E}_V < 25$

$\mathcal{E}_h$ (*error alt.*) $= |\, \boldsymbol{h}_{med.} - \boldsymbol{h}_e \,|$ → $\mathcal{E}_h <$ ¿¿ δ??

$V_e = V_{exacto} = 500$

$\boldsymbol{h}_e = \boldsymbol{h}_{exacta}$ = altura exacta de agua [$V_e = 500$ → $\boldsymbol{h}_e = \mathbf{5}$]

Incógnita: error *´máximo´* posible en $\boldsymbol{h}_{med\cdot}$ (altura medida) tal que $\mathcal{E}_V < 25$;

o sea, $\delta > 0$ tal que "si $\mathcal{E}_h < \delta$ entonces $\mathcal{E}_V < 25$ " ;

ó, $\delta > 0$ tal que "si $|\,\boldsymbol{h}_{med} - \boldsymbol{h}_e\,| < \delta$ entonces $|V_{calc.} - V_e\,| < 25$ ".

Resolución: *Reconocemos el tipo de problema (ejercicio 2) y resolvemos teniendo en cuenta la relación entre las variables (* $\boldsymbol{V} = 100 \,.\, \boldsymbol{h}$ *).*

$$|\,\mathbf{V}_{calc.} - \mathbf{V}_e\,| = |100.\boldsymbol{h}_{med} - 500\,| = |100.(\boldsymbol{h}_{med} - 5)| = \mathbf{100.}|\,\boldsymbol{h}_{med} - \boldsymbol{h}_e\,|$$

Luego, $\forall\, \boldsymbol{h}\ /\ 100.\,|\,\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}_e\,| < 25$ resulta $|\,\mathbf{V}_{calc.} - \mathbf{V}_e\,| < 25$;

ó, $\forall\, \boldsymbol{h}\ /\ |\,\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}_e\,| < \frac{25}{100}$ resulta $|\,\mathbf{V}_{calc.} - \mathbf{V}_e\,| < 25 \Rightarrow \delta = \boldsymbol{0.25}$

Rta: **0.25 cm** es el error que, como *máximo*, podemos cometer en la medida de ***h***, para tener 500 cm^3 de agua con un error (*máx.*) de $\pm 25\ cm^3$.

☞ *Vimos ya que existen distintas "formas" de resolver un problema, desde aquella que aplica "la fuerza bruta" hasta la "óptima". Las ventajas de la segunda forma son obvias (ahorra tiempo, disminuye la posibilidad de errores, etc.); luego, insistimos en la importancia de "aprehender" dicha forma; aunque al principio cueste más. Logrado esto podemos luego reconocer y resolver problemas del mismo tipo, sin dificultad y en la mejor forma. Obviamente, la "óptima" es la forma que pretendemos que aprendas, por ende, la que usamos en los problemas resueltos que te proponemos como ejemplo.*

(Te sugerimos que antes de leer la resolución del problema que sigue, lo hagas según tu criterio; compares luego tu resolución con la que damos aquí y saques conclusiones al respecto. Te recordamos también que cualquiera sea la forma como resuelvas un problema, siempre, como primer paso, debes explicitar datos, incógnitas y relaciones entre ambos).

Ejemplo 2 **:**

Un auto viaja a una velocidad constante de 80 km/h. Durante el trayecto atraviesa una ciudad, cuyo centro (***C***) dista 160 Km. del punto de partida. Si el auto inicia el viaje a las 0 hs, se desea saber cual fue el *intervalo de tiempo* durante el cual la distancia del auto al centro ***C*** de la ciudad fue menor a 4 Km. (a 2 Km.? ; a 5 Km.? , ...)

Reconocimiento de la situación (*análisis de datos, incógnita, vinculación*)**:**

Datos:

$\boldsymbol{v}$ (velocidad) $= \mathbf{80}$ (Km/h)

$\boldsymbol{t}$ = tiempo (hs.) ; $\boldsymbol{t_o}$ ***(tpo inicial)*** $= \mathbf{0}$

$\boldsymbol{x}$ = ***posición*** de **A** (auto) en el instante $\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{x_o}$ (posición de **A** en $\boldsymbol{t_o}$) $= \mathbf{0}$ (Km)

$\boldsymbol{c}$ (posición de **C**) $= \mathbf{160}$ (Km)

$\boldsymbol{t_c}$= tiempo que tarda **A** en llegar a **C**.

* ***vinculación***

$\rightarrow \boxed{\boldsymbol{x} = 80.\,\boldsymbol{t}}$

$\rightarrow \boldsymbol{160} = 80.\boldsymbol{t_c} \rightarrow \boldsymbol{t_c = 2}$

Representación gráfica:

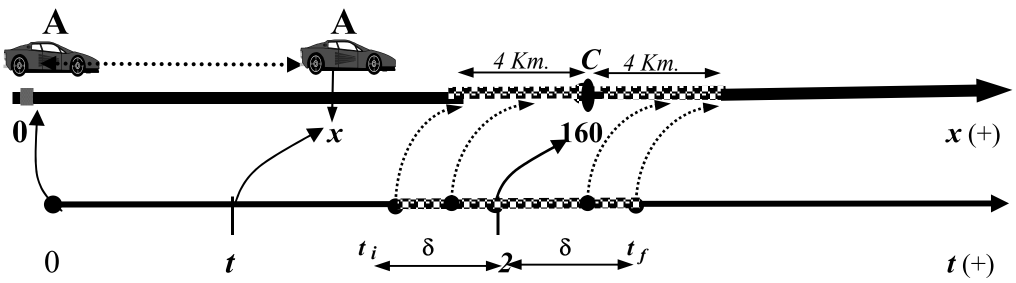
Para representar el desplazamiento de **A** según transcurre el tiempo necesitamos un ***eje de referencia*** (recta graduada donde distinguimos origen y sentido (+) de recorrido). Construimos entonces un eje apropiado al caso y asumimos que **A** se desplaza sobre el mismo. En tal caso tenemos que x (***posición*** de **A** en el instante t) es la ***coordenada*** de **A**, en el instante t.

Recordamos que: x = ***coordenada de* A** = distancia ***con signo*** de **A** al origen **O**:

$$\begin{cases} \textbf{A} \text{ sobre el semieje (+)} \rightarrow x > 0 \rightarrow x = \mathbf{d\,(A;O)} \\ \textbf{A} \text{ sobre el semieje (-)} \rightarrow x < 0 \rightarrow x = \mathbf{-\,d\,(A;O)} \end{cases}$$

ⓘ **A** se desplaza sobre una *ruta*, la que no siempre es *recta*, puede tener tramos curvos. Este hecho parece complicar la determinación del *eje de referencia;* pero la naturaleza del problema más el hecho que en las rutas existen carteles indicadores de Km. permite ignorar los tramos curvos, *"representar la ruta, con una recta".*
Esta es una forma usual de representar la posición de un móvil en el tiempo la cual prioriza la visualización de la "*trayectoria*" seguida por el mismo. Existen otras formas de representar el desplazamiento las cuales priorizan la visualización de otras propiedades relativas al movimiento y donde la trayectoria queda desdibujada (u oculta).

ⓘ Para visualizar mejor la cuestión suelen considerarse dos ejes *paralelos entre sí*, representar el desplazamiento de **A** sobre uno de estos ejes (eje x) y el paso del tiempo sobre el otro.



Reconocimiento de la incógnita: t_i , t_f (tiempo inicial y final), tal que

si $t \in (t_i ; t_f)$ entonces la distancia de **A** a **C** es menor a 4 (Km.) → d(A;**C**) < 4

ⓘ $v = cte$; así, para recorrer 4 Km. el auto tarda lo mismo a izquierda que a derecha. Luego, si δ = *tiempo para recorrer 4 Km.*, observamos que $(t_i ; t_f) = \mathbf{E}(2; \delta)$, podemos así pasar de dos incógnitas (t_i , t_f) a una (δ), detectar un camino más *rápido* para resolver el problema (hallar δ).
Para ello, planteamos la incógnita, como sigue:

Incógnita: δ > 0 tal que "si $t \in E(2; \delta)$ entonces $d(x ;160) < 4$ " ;

ó; δ > 0 tal que "si $| t - 2 | < \delta$ entonces $| x - 160 | < 4$ ".

ⓘ *Reconocemos el tipo de problema (ejerc. 2) y resolvemos teniendo en cuenta la relación entre las variables ($x = 80.t$).*

Resolución: $|x - 160| = |80.t - 160| = |80.(t - 2)| = \mathbf{80.}|t - 2|$

Luego, $\mathbf{80.}|t - 2| < \mathbf{4} \quad \Rightarrow \quad |x - 160| < \mathbf{4}$;

o sea, $|t - 2| < \frac{4}{80} = 0.05 \Rightarrow |x - 160| < 4 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.05$.

Hallado δ, obtenemos $(t_i ; t_f)$:

$|t - 2| < 0.05 \Leftrightarrow 2 - 0.05 < t < 2 + 0.05$; (0.05 *hs.* = *3 min.*)

1 h 57´ < *t* < *2 hs. 3´*

Rta: (*1 h 57´ ; 2 hs. 3´*) es el intervalo de tiempo durante el cual la distancia del auto a ***C*** es ***menor a 4 Km***. Dicho de otra manera, durante ± ***3 min***. alrededor de las ***2*** de la mañana, el auto estuvo siempre a menos de ***4 Km*** de ***C***.

- ¿d(*A*;**C**)< *2*?: observar que aprendido el ´*esquema*´ lo podemos aplicar directamente, resolver así en forma clara y rápida esta cuestión; más aún, podemos ´generalizar´ el proceso para α ***Km***.; calcular luego con el sólo recurso de reemplazar α por 2.

  Hecho esto, quedaría: $|t - 2| < \frac{\alpha}{80} = \Rightarrow |x - 160| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\alpha}{80}$

Problemas *(continuación)*

3. Se desea verter una cierta cantidad de agua en un recipiente R de base cuadrada y 1000 cm^3 de capacidad. Si el lado de la base mide exactamente 10 cm,

a) ¿cuál es, *como máximo*, el error que podemos cometer al medir la *altura de agua en* R, para estar seguros de tener 800 cm^3 con un error (*máx*) de 25 cm^3 ?

b) ¿cuál es, *como máximo*, el error que podemos cometer al medir la *altura de agua en* R, para estar seguros de tener 400 cm^3 con un error (*máx*) de 25 cm^3 ? .

c) Comparar los resultados obtenidos en (a) y (b), analizar la situación y, de ser posible, *generalizar* el fenómeno observado.

4. Se desea verter una cierta cantidad de agua en un recipiente R de base cuadrada y 1000 m^3 de capacidad. Si el lado de la base mide exactamente 10 m,

a) ¿cuál es, *como máximo y en cm,* el error admitido al medir la *altura de agua en* R, para estar seguros de tener 500 m^3 con un error (*máx*) de 25 m^3 ?

b) ¿cuál es, *como máximo y en* m^3, el error que podemos tener en el volumen si al medir la *altura de agua en* R el error (*máx*) admitido es de 10 cm ? .

c) ¿cuál es, *como máximo y en* m^3, el error que podemos tener en el volumen si al medir la *altura de agua en* R el error (*máx*) admitido es de 5 cm ? .

d) Comparar los resultados obtenidos en (b) y (c), analizar la situación y, de ser posible, *generalizar* el fenómeno observado.

5. Un vaso cilíndrico de 1000 cm^3 de capacidad tiene un radio interior de 5 cm. ¿Cuál es, *como máximo*, el error que podemos cometer al medir la altura de agua en el vaso para estar seguros de tener 500 cm^3 de agua con un error (*máximo*) de 5 cm^3?

6. Un ciclista viaja a una velocidad constante de 10 km/h. Durante el trayecto atraviesa un puente de 2 Km de largo cuyo "centro" (***C***) dista 40 Km. del punto de partida. Se desea saber cual fue el intervalo de tiempo durante el cual el ciclista estuvo sobre el puente:
a) si inicia el viaje a las 0 hs.
b) si inicia el viaje a las 10 hs.

7. Un maratonista corre a una velocidad constante de 2,5 Km/h. Durante el trayecto atraviesa una ciudad, cuya entrada y salida distan, respectivamente, 5 y 18 Kms. del punto de partida. Si el maratonista inicia el recorrido a la 8 hs. y su novia, que vive en la ciudad, lo quiere acompañar desde que entra hasta que sale de la misma, ¿cual es el intervalo de tiempo durante el cual corren juntos?
(*Sugerencia*: establecer la correspondencia 8hs. ↔0 hs.; trabajar con $t_o = 0$).

8. Dos ciclistas, Juan y Kevin, parten de Rosario a la misma hora, sobre la misma ruta, pero en distintas direcciones. Mientras Juan se dirige a Santa Fe (capital) Kevin va hacia Bs.As. Si Juan va a 15 Km/h. y Kevin a 10 Km/h , se pide:

a) trazar un eje de referencia tal que el origen sea Rosario y el *sentido positivo* apunte hacia Santa Fe (S.F.)
b) hallar una ley para x_j , posición de Juan en cada instante t.
c) hallar una ley para x_k , posición de Kevin en cada instante t.
d) representar sobre el eje la posición de J y K a las 2 horas de haber partido; establecer "gráficamente" la distancia entre ambos (en ese momento). Luego, "calcular" dicha distancia. Idem para la ½ h. de haber partido.
e) hallar en que momento la distancia entre ambos es de 6,25 Km.
f) hallar el intervalo de tiempo en que la distancia entre ambos es menor a 6,25 Km.

9. Con el objetivo de estudiar las características físicas de cierto tipo de células, se procede a bombardear una de ellas con cierta partícula (P) producida por un aparato emisor (A). La célula es circular, de radio 0.8 cm. y su centro (C) se halla sobre la recta de acción de las partícula, a 20 cm. de A. La partícula se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme a una velocidad de 4cm/seg. y, atravesada la célula, se incrusta en una pantalla ubicada a 60 cm. del aparato emisor.

a) Hallar una expresión para calcular d (P; C) , conocida ***x***, posición de P.
b) Establecer, en término de distancias y coordenadas de puntos, la condición que debe cumplir P para estar *dentro de la célula*.
c) Establecer *el intervalo de tiempo* durante el cual P se encontraría *dentro de la célula*, si al momento de ingresar a la misma su velocidad no variara.
d) Si observamos que todas las partículas emitidas desde A se incrustan en la pantalla a los 15 seg. de ser emitidas; ¿qué permite conjeturar esto acerca de la velocidad con que las partículas atraviesan la célula?
e) Si algunas partículas impactan la pantalla a los 15 segs. y otras no la impactan nunca, ¿qué podemos conjeturar acerca de lo que está pasando?

10. Manuel se quiere casar y hacer una fiesta original. Sabe que existe un extraño pueblito en Córdoba, Ischilín, donde puede encontrar lo que busca. Decide ir a conocerlo y así, toma el mapa y analiza que rutas puede tomar. Observa que Ischilín se encuentra sobre la *ruta 12*, que puede salir de Rosario por la *ruta 9* ya que esta ´corta´ la 12 a 240 Km. de Rosario. Por último observa que Ischilín se encuentra 10 Km. hacia el Norte de la intersección de ambas rutas. Como la novia (que trabaja en teledetección satelital) ´desconfía´ le promete que va a ir a ***100 km/h***. todo el viaje y sin parar, así ella puede ubicarlo sobre el camino, cada vez que quiera. La novia (muy perspicaz) le dice: *si no vas a parar*, *¿para que vas?* El contesta que, *si va* (ya le quedan pocas ganas) va a parar exactamente dos horas en Ischilín (para averiguar todo). La novia le sonríe y Manuel parte raudamente. Se pide:

a) Dar una *ley* que permita ubicar a Manuel (M) sobre su trayectoria, en cada instante t a partir que sale de Rosario (R) y *antes* de que llegue a Ischilín (I).

b) Hallar una expresión que, *conocida* $\boldsymbol{x}$ (*posición de Manuel*), permita calcular la distancia a la que se encuentra de Ischilín.

c) *Indicar **V** ó **F**:*

"si M está sobre la ruta 12, entre **I** y el cruce de rutas, entonces $|\,\boldsymbol{x} - 250| < 10$ "

"si $|\boldsymbol{x} - 250| < 10$, entonces $\boldsymbol{x}$ indica la posición de M sobre la ruta, para algún t "

d) Hallar una ley que permita ubicar a Manuel sobre su trayectoria en cualquier instante "t" a partir que sale de Rosario.

e) Idem, si decide volver sin parar en **I**.

ANEXO IV

Números exactos - Números aproximados y Errores

Los números con los que trabajamos normalmente se pueden dividir en dos categorías muy amplias: "***exactos***" y "***aproximados***".

≅ Cuando decimos: 2 balanzas, 3 cajas, área del círculo = πr^2 ; usamos *números exactos*.
≅ Cuando decimos: área del círculo$_{(r = 2)}$ = 12,56 cm^2 ; usamos *números aproximados.*

Números Aproximados:

Por "*número aproximado*" entendemos cualquier número que circunstancialmente usamos para aproximar un número exacto cuyo verdadero valor, por alguna razón, no podemos dar.

La existencia de números aproximados obedece a dos razones, ambas de orden "práctico":

☞ los números cuya representación decimal contiene "infinitos decimales" (π, 1/3, $\sqrt{2}$, etc) no pueden ser "exactamente" escritos en su forma decimal ya que es materialmente imposible dar las infinitas cifras que lo forman. Luego, para poder usar esta forma del número procedemos a "redondear" o "truncar" la parte decimal a un número finito de decimales. Así, y acorde lo señalado, el número que obtenemos es un *número aproximado.*

Ej: *área círculo de radio 2* $= \pi\ 2^2 = \pi . 4 =^{(*)} 3{,}14 . 4 = 12{,}56$.

En (*) reemplazamos π por 3,14 ; es decir, por un número que *aproxima* el verdadero valor de π (constituido este por *infinitos decimales*). Así, y en este sentido, 3,14 es un *número aproximado*. Obviamente y en el mismo sentido, 12,56 también es un *número aproximado* (en este caso en relación al verdadero valor del área del círculo).

☞ normalmente al informar sobre el resultado de una medición cometemos un error que por su naturaleza llamamos "*error de apreciación*"; es decir, no damos el *verdadero valor* de la magnitud medida sino un valor afectado de un *"margen de incerteza"*. Así, y acorde a lo antes dicho, lo que damos es un "*número aproximado*" (ó, "*valor aproximado*").

La necesidad de establecer un margen de previsibilidad para el acto de medir o el de operar con números decimales truncados, requiere definir con rigurosidad los conceptos de ***"error"*** y ***"cota del error".***

Error **:** llamamos error , **E**, a la diferencia entre el *verdadero valor* de un número o magnitud y un *número aproximado* relativo al mismo.

$$\mathbf{E} = vv - va_p \quad (\textit{verdadero valor – valor aproximado}).$$

* $\mathbf{E < 0} \rightarrow$ la aproximación es *por exceso*.
* $\mathbf{E > 0} \rightarrow$ la aproximación es *por defecto.*

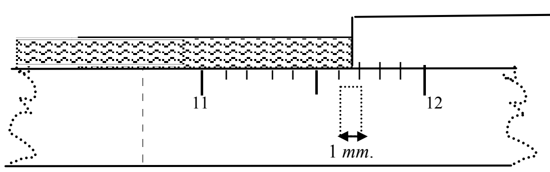
Habitualmente se trabaja con el ***valor absoluto del error*** $\rightarrow \mathcal{E} = |\mathbf{E}| = |\ vv - va_p\ |$

Dado que el error no puede conocerse con exactitud (si se pudiera no habría error), resulta de suma importancia poder apreciar la *magnitud* del mismo. Esta cuestión es simple de resolver si se conocen "***cotas del error***"; es decir, dos valores entre los que sin dudas se encuentra comprendido el *verdadero valor*. Si trabajamos con $\mathcal{E}$, valor absoluto del error, basta un único valor para acotar el error. Luego, y en relación $\mathcal{E}$, definimos el concepto de "***cota del error***".

Cota del error :

Es todo *número* que con certeza se sabe es *mayor* *a*l *valor absoluto del verdadero error.*

Por ejemplo, en una regla milimetrada, las marcas distan 1mm. entre sí; luego, el error de apreciación *no puede ser mayor* de ½ mm. (0.05 cm.). Así 0.05 es una *cota del error* .
O sea; $\mathcal{E} < 0.05$ cm (la cota se da en la unidad en que se mide).



long. aproximada

$\underbrace{11.6}_{\text{cifras ciertas}}\underbrace{5}_{\text{cifra estimada}}$ **cm.** $\Rightarrow \mathcal{E} < \underbrace{0.05}_{cota}$ *cm*.

Habitualmente para dar el resultado de una medición usamos una expresión en la que condensamos toda la información del caso: "***valor aproximado***" (va_p) de la magnitud medida y "***cota del error*** "; por ej., la medición anterior se informa: **11. 65 ± 0.05 cm.**

Observación: debemos tener cuidado de no confundir la notación con lo que ella representa. El valor que sigue al "± " es una *cota del error;* es decir, *no es el error* (este es desconocido) sino el valor que, *como máximo,* puede llegar a tomar el mismo. En definitiva, ***el error cometido es un valor desconocido***, ***menor al valor que sigue al*** ± . En el ej: $\mathcal{E} < 0.05$ cm.
Este hecho determina la existencia de un ***intervalo de valores*** posibles para el error; por ende, un ***intervalo de valores*** posibles para el ***verdadero valor.***
Al intervalo donde con seguridad se encuentra el verdadero valor le damos el nombre de "***intervalo de incerteza***" y lo indicamos **Ii.**

***Ejemplo*:**

$$va_p = \mathbf{11.65} \text{ cm. ; } \textit{cota del error} = \mathbf{0.05} \text{ cm. } \xrightarrow[\textit{habitual}]{\textit{notación}} \mathbf{11.65 \pm 0.05}$$

$$\mathbf{11.65 \pm 0.05} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} < \mathbf{0.05} \quad \Rightarrow \quad |\, vv - va_p \,| < \mathbf{0.05}$$

$$|\, vv - 11.65 \,| < 0.05$$

por propiedad de valor absoluto:

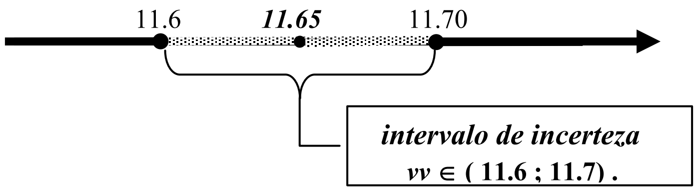
$$-0.05 < vv - 11.65 < 0.05$$

$$11.65 - 0.05 < vv < 0.05 + 11.65$$

$$11.60 < vv < 11.70$$

Conclusión: ***vv*** , el *verdadero valor* (o medida) del objeto medido, es un número que se encuentra entre **11.60** y **11.70** (*cms.*).

Luego, **Ii = (11.60 ; 11.70) .**



TALLER 4

OBJETIVOS

El objetivo principal de este módulo es el ***concepto de función***, concepto que, de aquí en más, es el eje conductor de las actividades propuestas.

Para trabajar el concepto en toda su dimensión elegimos un tipo de problema que llamamos "***problemas con variables condicionadas***". Lo que caracteriza a estos problemas es que las variables involucradas son ***tres*** *(o más)* y que la resolución desemboca en el planteo de una ***ecuación en tres variables*** *(o más)*. Resolverlos resulta relativamente sencillo si ***dos*** de las tres variables están ***relacionadas*** a través de alguna ***condición***, ***restricción*** ó ***función*** ya conocida o dato del problema.

Requisitos para el abordaje del taller: las actividades planteadas demandan el conocimiento y dominio del concepto de ***función***, ya sea porque se usan en la resolución de las mismas o porque son la incógnita del problema. El objetivo final es destacar la utilidad o rol de cada uno de los elementos constitutivos de este concepto, en particular la del dominio, conjunto al que habitualmente se presta poca atención aunque en muchos casos sea decisivo en la resolución del problema. Así, y acorde al objetivo perseguido, proponemos una definición de dominio (***dominio natural***) distinta a la convencional. A este respecto sugerimos leer el **Anexo V** donde se resume la definición de función adoptada en este trabajo así como notación, distintas formas de representación y algunas otras cuestiones relativas al concepto con las cuales vamos a trabajar de aquí en más.

⏭ **PLAN DE ATAQUE, para "problemas con variables condicionadas"**

I – II) ***Reconocimiento de la situación***:

- *reconocer* las *variables relevantes* para el problema, *cuantas son*.
- *etiquetar* y *describir* estas variables.
- explicitar la *incógnita*
- resumir los *datos*.
- relevar ecuaciones o funciones conocidas que vinculen las variables.

III) ***Elaborar un plan de trabajo.***

En esta instancia, dibujar una figura, un gráfico o esquema ayuda a *ver* cuales y cuantas son las ***variables relevantes***, cual es la ecuación que las vincula. También facilita el reconocimiento (*si existe*) de una restricción o condición que vincule a ***dos*** de las variables y solo a ellas.

Un esquema general para la resolución de este tipo de problemas es el siguiente:

(1ro) detectar cuales y cuantas son las variables *relevantes* para el problema. (***tres****?*)

(2do) a) establecer una ***ecuación*** o ***función*** que vincule las ***tres variables***.

b) reconocer la existencia de una restricción o condición que ligue a sólo ***dos de las variables***; identificarlas con el nombre de ***variables condicionadas*** . Expresar la restricción a través de una ecuación: ***la ecuación de restricción***.

c) identificar la 3er variable con el nombre de ***variable libre***.

(3ro) En la ***ecuación de restricción*** hallada en (b) detectar la variable que, según la ***incógnita*** del problema, conviene tomar como *independiente*. Despejar la otra variable en función de ella y determinar el dominio natural de la ley que resulte. O sea, ***obtener la función que vincula las variables condicionadas***, la que identificamos con el nombre de ***función de restricción***.

(4to) En la ecuación que vincula las ***tres variables***, usar la función de restricción obtenida en el paso anterior para hacer *´desaparecer´* a una de las condicionadas, obtener así una ***ecuación en dos variables: la libre y una condicionada.***

IV) *Ejecutar el plan*:

Ejecutado los cuatro pasos antes señalados, *llegado a la ecuación en dos variables*, continuar con la resolución resulta fácil si previamente se ha establecido clara y explícitamente el *carácter de la incógnita*. Pueden darse dos situaciones:

i) ***la incógnita es el valor de una de las variables*** *(libre o condicionada)* para el cual se satisfacen las condiciones planteadas.
En este caso, resolver el problema se reduce a calcular el valor incógnita en la ecuación en dos variables con los datos (*numéricos*) del problema.

ii) ***la incógnita es una función escalar***. *(ó, función real a variable real)*
O sea, una función que relaciona sólo dos variables. En razón de ello una de las variables (en el caso que haya tres), prácticamente debe *´desaparecer´* de escena.
A la variable condicionada que *literalmente desaparece* en el 4to paso de la resolución la llamamos ***variable oculta (v.o.)*** ya que, aún cuando no la veamos, está. Es decir implícitamente interviene cada vez que aplicamos la función; incide por lo tanto en el resultado de tal aplicación. Luego, es la que mayor cuidado demanda a la hora de hallar el dominio de la función pues, como *no la vemos*, existe el riesgo de olvidarnos de ella. Debemos tener especial cuidado entonces en considerar las distintas restricciones a las que están sujetas las variables: ***las algebraicas, las propias de las variables y las propias del modelo*** (aquí, existencia de "*v.o*").

En este módulo, trabajamos problemas del tipo **(ii)** → ***la incógnita es una función***.
Reconocida la incógnita, como en todo problema procedemos luego a:

a) la resolución algebraica de la o las ecuaciones planteadas.

b) la resolución del problema en sí. La verificación de la solución hallada.

c) dar la respuesta en forma destacada y en oración.

d) hacer reflexiones de orden metacognitivo.
Repasar todo el proceso; *reflexionar* acerca de lo hecho, de los mecanismos y conocimientos puestos en juego, los obstáculos enfrentados, los que resolvimos solos, los que no.
Preguntarnos acerca de formas más simple de resolver el mismo problema.
Registrar todas las respuestas que nos vamos dando.
Generalizar, de ser posible, el problema y el proceso de resolución a los efectos de configurar un *´esquema de resolución´* para el problema del caso. Una forma de hacer esto consiste en reemplazar los coeficientes de la ecuación de restricción por "*parámetros*", obtener la solución en función de ellos. Esto pone a nuestra disposición una herramienta con la que analizar en forma sistemática y fácil distintas situaciones que se puedan plantear dentro del marco del mismo problema (para ello basta asignar valores a los parámetros y resolver).

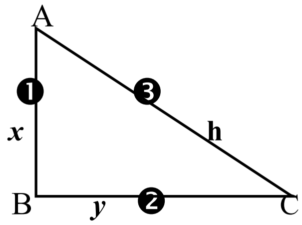
Ejemplo 1

Tres ciudades, A, B y C, se encuentran unidas por tres rutas las cuales tienen la particularidad de formar un triángulo rectángulo. A y B están unidas por la ruta ❶, B y C por la ❷, mientras que C y A lo están por la ❸.
Si sabemos que la ❶ y la ❷ se cortan perpendicularmente; que si para ir de A a C pasando por B son 7 Km., se pide hallar una función que permita calcular la distancia entre A y C por la ruta ❸, conocida la distancia entre A y B por la ❶.

I-II) *Reconocimiento de la situación*

Datos : A ←❶→ B ←❷→ C ←❸→ A

❶ ⊥ ❷ → Bajo estas condiciones las ciudades sólo pueden disponerse de esta forma:



d(A;B) + d (B;C) = 7 (*1*)

d(A;B) ("conocida") (#)

Variables: h = d (A; C) ($h > 0$).
x = d (A; B) ($0 < x < h$).
y = d (B; C) ($0 < y < h$).

Incógnita: f (función) / $h = f(x)$ con h = v.d. ; x = v.i. (por #)

III- IV) *Diseño y ejecución de un plan de trabajo*

Ecuaciones pertinentes al caso.

Pitágoras → $h^2 = x^2 + y^2$ (*2*) → (***tres variables***: x ; y ; **h**)
Por (*1*) → $x + y = 7$ (*3*) → (***ecuac. de restricción***)
(x e y ; ***variables condicionadas***)

*Detección de la **función de restricción***.

En (*3*), despejamos una de las variables condicionadas en *función* de la otra.. En este caso *no es indistinto cual*, debemos despejar ***y en función de x*** (por #) .

$y = 7 - x$ (*4*)
[$y = r(x)$ *con* $r(x) = 7 - x$]

$$\left.\begin{array}{l} \Pi\ x > 0;\ y > 0 \Rightarrow 0 < x < 7 \\ \Pi\ x < \mathbf{h} < x + y < 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{0 < x < 7} \Rightarrow Dr = (0; 7) \quad \mathbf{(5)}$$

***Resolución del "problema en sí"*:**

por **(*2*)** → $\mathbf{h}^2 = x^2 + y^2$; (*ecuación en* ***tres*** *variables*)

por **(*4*)** → $\mathbf{h}^2 = x^2 + (7 - x)^2$; (*ecuación en* ***dos*** *variables*)

aplicando raíz → $|\,h\,| = \sqrt{x^2 + (x-7)^2} \xrightarrow{h>0} h = \sqrt{x^2 + (x-7)^2}$

despejando "h"

RTA: $h = f(x)$ tal que →

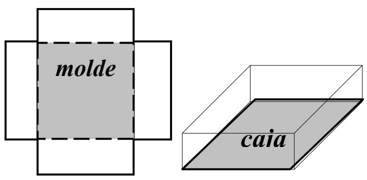
- $f(x) = \sqrt{x^2 + (x-7)^2}$ Π 1) $rest_s$. alg_s.: ∄
  2) rest. var_s : $x > 0$
  3) rest. modelo: ***v.o: y ;***
  luego, por **(5)** : $x < 7$
- $Dnf = (0; 7)$

Ejemplo 2

Un grupo de amigos decidió llevar adelante un microemprendimiento: fabricar cajas para vender a un negocio vecino en el cual necesitan cajas de cartón de base cuadrada, sin tapa, con una capacidad de 18 cm^3 y más de 0,5 cm de altura. La idea que se les ocurrió fue armar cada caja a partir de una hoja de cartón cuadrada, recortando las esquinas y plegando luego hacia arriba las aletas resultantes. Obviamente querían gastar lo menos posible, así antes de fabricarlas deciden buscar las dimensiones de la caja para las que la cantidad de cartón a usar sea la *´mínima posible´*. Como están muy atareados trajeron el problema al Dpto de Matemática. Nosotros ya lo resolvimos, pero deseamos comprobar nuestros resultados; así que te pedimos:

- que busques las dimensiones posibles para la caja según lo requerido y lo deseado (gasto mínimo), nos informes de tus conclusiones explicándonos en detalle *el proceso* a partir del cual llegas a las mismas. (si no coinciden con las nuestras queremos saber porqué, de quien es el error).
- que nos indiques si podemos usar una lámina cuadrada de cartón, de 6 cm. de lado.

I) *Reconocimiento de la situación* : *entender el problema*

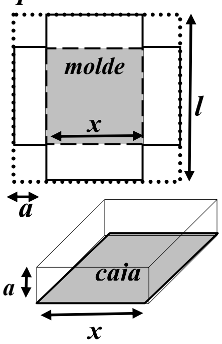


El análisis de la situación indica que el gasto en cartón será mínimo siempre y cuando la *superficie de la caja* sea mínima.
Luego, la incógnita sería dimensiones de la caja (***base; altura***) para las que la ***superficie*** resulte mínima; pero.....
con una ***condición***: que el volumen sea 18 cm^3.

ⓘ A esta altura del curso no contamos todavía con los recursos teóricos que permitan resolver este problema en forma *óptima* (exacta y *´elegante´*). No obstante ello, con los recursos que tenemos podemos abordar la solución, hallar una respuesta *útil* (o sea, *aplicable* a la situación planteada).
Podemos, por ejemplo, *calcular el área de la caja para distintas bases y alturas para las que el volumen sea 18; comparar las áreas obtenidas, encontrar la ´menor´ de ellas (entre las calculadas)*
Y esto lo podemos hacer de dos manera, aplicando la *´fuerza bruta´* (o sea, zambulléndonos a calcular y calcular sin un plan o idea previa de la cosa), u optimizando recursos.
Quienes prefieran la primera forma no han percibido todavía cuan tediosa y poco satisfactoria es esta forma de trabajar. Por ese camino difícilmente puedan encontrar una *buena aproximación* o, peor aún, puede ser que la encuentren *pero no tendrán forma de saberlo*; o sea, no hay forma de *verificar* cuan cerca o lejos se está de una *´buena´* respuesta (la más próxima a la verdadera y útil a los fines de la situación concreta que se está resolviendo). Y esto, evaluar la *´calidad´* de la respuesta, es tan importante como *´dar una respuesta´*.
Así la cosa, si antes de zambullirnos a calcular analizamos un poco más la situación reconocemos la existencia de 3 variables (*base*, *altura* y *superficie*) con dos de ellas (*base* y *altura*) sujetas a una condición (volumen *fijo*); o sea, reconocemos el *´tipo´* de problema que tenemos en las manos: 3 variables con 2 de ellas *´condicionadas´*. Recuperamos entonces el *´esquema´* visto para resolver este tipo de problemas, lo aplicamos y encontramos así en forma rápida y elegante una respuesta al mismo pero, y esencialmente, tenemos elementos para verificar la calidad de la misma.

Luego, el procedimiento a seguir es: obtener (*usando la restricción del problema*) ***el área de la caja en función de una sola variable*** *(por ej: el lado de la base)*; analizar luego en forma *metódica* y *con ayuda de la función hallada* cómo varía el área al variar el lado de la base; concluir.

II) ***Reconocimiento de la situación*** *: separar las partes del problema*



Datos : V = ***volumen*** ; $V = 18$ (cm^3)

Variables: l = lado hoja de cartón ($l > 0$).
a = altura de la caja ($a > 0$).
x = lado de la base/$_{caja}$ ($x > 0$).
A = área total de la caja

Incógnita: f / $A = f(x)$; A = v.d. ; x = v.i.

III- IV) ***Diseño y ejecución de un plan de trabajo***

Ecuaciones pertinentes al caso.

A = ***área base + área lateral*** = $x^2 + 4\,a.x$ (*1*) → (***tres variables***: x ; a ; A)
V = ***sup base*** x ***altura*** = $x^2 . a$
DATO → $V = 18$ → $x^2 . a = 18$ (*2*) → (***ecuac. de restricción***)
(x , a: $v_{s.}$ ***condicionadas***)

Detección de la función de restricción.

En (*2*), despejamos ***a en función de x*** .

$a = \dfrac{18}{x^2}$ ***(3)***

[$a = g(x)$ *con* $g(x) = \dfrac{18}{x^2}$]

Π 1) rest$_s$. alg.: $x \neq 0$
Π 2) rest$_s$. var$_s$: $x > 0$; $a > 0$
Π 3) rest$_s$. modelo: $x + 2a = l$
$a > 0.5$

⇒ $0 < x < 6$ ⇒ Dg = (0; 6)
(4)

Resolución del "problema en sí":

por (*1*) → $A = x^2 + 4\,a.x$; (*ecuación en* ***tres*** *variables*)

por (**3**) → $A = x^2 + 4\,\frac{18}{x^2}.x$

$A = x^2 + \frac{72}{x}$; (*ecuación en* ***dos*** *variables*)

Luego: $A = f(x)$ tal que:

- $f(x) = x^2 + \frac{72}{x}$ Π 1) $rest_s$. alg.: $x \neq 0$

  2) rest. var_s: $x > 0$; $A > 0$

  3) rest. modelo: $v.o = a$; $0.5 < a \rightarrow 0 < x < 6$
- Dn f = **(0; 6)**

El trabajo realizado permite obtener ***f*** en su ***forma algebraica***; forma que no permite *visualizar* el dato que necesitamos. Procedemos entonces a representar la función de otra forma, más útil a nuestros propósitos (y conocimientos). En este caso, la f_{num}
Para ello:
****calculamos*** valores de **A** para distintos ***x*** en el rango permitido.
**organizamos* la información presentándola en forma de TABLA NUMÉRICA.

ⓘ Y aquí es donde el esfuerzo hecho para hallar ***f*** tiene su recompensa ya que poseer una *fórmula* para calcular el área, entre otros beneficios, agiliza enormemente los cálculos. Particularmente, este hecho permite acudir a utilitarios mucho más potentes que la calculadora, por ej. ***Excel***, los que no sólo facilitan el cálculo sino que permiten también obtener la f_{graf}, formular conjeturas, verificarlas, etc.
En lo que sigue trabajamos con Excel. Para que puedas efectuar tus propias búsquedas y experiencias te ofrecemos un "***Tutorial para Excel***" elaborado para este curso.

Elegimos un rango de valores "*aceptable*" para el caso (recordamos que son ***cm***), en este caso de ***1*** a ***6***, y calculamos el área variando ***x*** en ***0.5*** (cm) cada vez.
ⓘ por uso y costumbre se acude a letra griega Δ (delta) para indicar la variación de ***x***. En este caso: $\Delta x = 0.5$

La lectura de esta TABLA permite "***ver***" que el menor valor del área (***32.82***) se produce para ***x= 3.5***; que, para valores menores o mayores que ***3.5***, el área es siempre mayor que ***32.82***.
Como ***3.5*** cm es un valor *razonable* para el lado de la caja, concluimos que esta es la respuesta de nuestro problema.
Con ella calculamos $a \rightarrow a = \frac{18}{3.5^2} \rightarrow a = 1.47 \approx 1.5$
y, ***controlamos:*** $V = (3.5)^2 \,.\, 1.5 = 18.3$ (*aceptable*?)

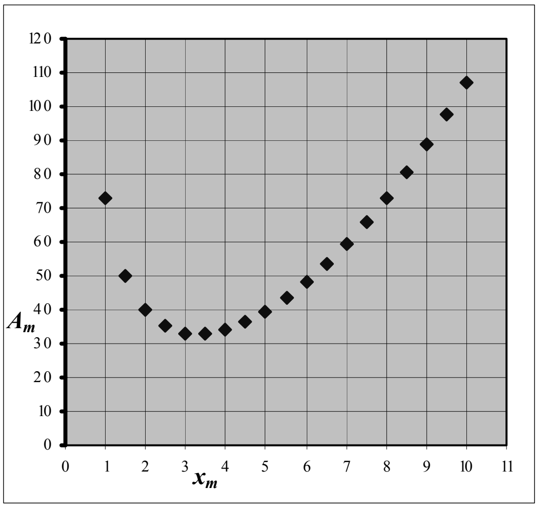
Rta: para tener un gasto mínimo en cartón, podemos tomar el lado de la base, ***x = 3.5 cm***,
y la altura de la caja, ***a = 1.5 cm***.
Para ello necesito una hoja de:
$l = x + 2\,a = 3.5 + 2.1.5 = 6.5$ (cm. de lado)

x (*base*)	$A = x^2 + \frac{72}{x}$
1	**73.00**
1.5	50.25
2	40.00
2.5	35.05
3	33.00
3.5	***32.82***
4	34.00
4.5	36.25
5	39.40
5.5	43.34
6	**48.00**
6.5	53.33
7	59.29
7.5	65.85
8	73.00
8.5	80.72
9	89.00

☞ ***Reflexiones***:

Sin dudas está claro que si bien son "*muchos*" los valores del lado para los que calculamos el área, muchos más son aquellos para los que no la calculamos. Así, podría ser que el valor hallado no sea en realidad el "*menor*" valor del área.
Está claro también que en este caso el valor hallado es "*aceptable*" como solución del problema ya que el verdadero valor no puede diferir de ***3.5*** en más de ***½ cm***. Además ***3.5*** (o ***1.5*** cms) se pueden "*medir*" y, si bien la caja no queda exactamente de 18 cm^3, la diferencia es insignificante. O sea, podemos ***evaluar la calidad de la solución***: es aceptable (próxima a la exacta) y razonable (podemos construir cajas con esas medidas).

Respecto al problema algebraico en sí, *el valor mínimo del área, ¿se puede hallar?; mas aún, ¿existe este valor? Con los conocimientos con que contamos hasta aquí, no podemos resolver esta cuestión sin asomo de duda; pero, con un poco de sentido común y la ayuda de un utilitario, podemos hacer algunas apreciaciones válidas al respecto. Por ejemplo, podemos representar **f** a través de su gráfico; o sea, obtener f_{graf} con la que visualizamos mejor aún que con $f_{num.}$ la información dada por **f**.*



De la tabla o el grafico "*vemos*" que:

* hasta **x = 3.5**, "crece $x \Rightarrow$ decrece **A**",
* a partir de **x = 3.5** , "crece $x \Rightarrow$ crece**A**"

Intuitivamente entendemos que:
*si x variara con "*con continuidad*" entonces **A** también lo haría.

* que si **A,** variando con continuidad**,** pasa de <u>decreciente a creciente</u> debe existir un valor de x (x_m) donde se produce el cambio, es decir, un valor donde ´*justo*´ deja de decrecer, empieza a crecer. Que este sería el valor de x donde el ***área*** alcanza su ***mínimo***.

Es fácil ver que x_m (x donde el área alcanza su mínimo valor) no puede ser determinado con *exactitud* ni de f_{num} ni de f_{graf}. Ambas representaciones sólo permiten dar un valor *aproximado* de x_m (aunque tan próximo como queramos). A tal efecto, existen mecanismos a través de los cuales podemos ir obteniendo valores cada vez más y más aproximados a x_m .
Por ejemplo con Excel podemos ***refinar*** la tabla numérica con solo tomar otro rango de valores (por ej: 3 a 4) y un Δx más chico (0.2; 0.1; 0.05; etc.), dependiendo esto de la precisión con que queramos o necesitemos dar el resultado.

x	A
3	33.00
3.1	32.84
3.2	32.74
3.3	**32.71**
3.4	32.74
3.5	32.82
3.6	32.96
3.7	33.15

→ de esta tabla obtenemos una mejor aproximación de x_m.

$x_m \approx 3.3$ y $A_m \approx 32.71$

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. Tres ciudades, A, B y C, se encuentran unidas por tres rutas las cuales tienen la particularidad de formar un triángulo rectángulo. A y B están unidas por la ruta ❶, B y C por la ❷, mientras que C y A lo están por la ❸.
Si sabemos que la ❶ y la ❷ se cortan perpendicularmente; que para ir de A a B pasando por C son 18 Km., se pide:

a) hallar una función que permita calcular la distancia entre A y B por la ruta ❶, conocida la distancia entre A y C por la ❸.

b) d(A; B) si le informan que d(A;C) = 10 (Km.); ¿d(B;C) en este caso ?

c) d(A; B) si le informan que d(A;C) = 18 (Km.). (..pensar antes de actuar!).

2. Sabiendo que los lados iguales de un triángulo isósceles tienen 2 m. de longitud se pide:

a. Hallar una *función* que permita calcular el área de este tipo de triángulos en el caso que el único dato que se tenga sea *la longitud de la base*.

b. ¿Puede un triángulo del tipo indicado cubrir una superficie de **4** m^2 ?

c. Calcular el área de los triángulos cuya base (en metros) se indica a continuación:

$x_1 = ½$; $x_2 = \mathbf{1}$; $x_3 = \mathbf{3/2}$; $x_4 = \mathbf{2}$; $x_5 = \mathbf{5/2}$; $x_6 = \mathbf{3}$; $x_7 = \mathbf{7/2}$; $x_8 = \mathbf{4}$

d. Para triángulos del tipo dado y a partir de la función hallada en (a), ¿podemos sacar conclusiones generales acerca del comportamiento del área al variar la longitud de la base ?

3. El Sr K, dueño de un terreno cuadrado de exactamente 100 m^2 de superficie, desea cercar dentro del terreno y con alambre electrificado, una superficie rectangular de 10 m^2. Para realizar esto sólo le falta comprar el alambre. Al respecto sostiene el siguiente diálogo con la Sra K :

Sr K : voy al pueblo a comprar 14 m. de alambre.
Sra K: ¿no es mucho?; ese alambre es muy caro. ¿No hay forma de gastar menos?
Sr K: no, el rectángulo a cercar tiene que tener 10 m^2 ; o sea, 2 y 5 ms. de lado.

En ese momento, el joven K (que llega de la escuela), interviene y dice:

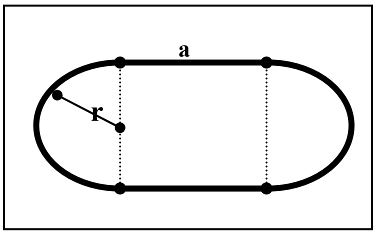
J.K: esperá, dame tiempo que hago algunas cuentas y veo si existe alguna forma de gastar menos; mejor aún, lo mínimo posible.

Respecto a la situación planteada se pide:

a. Analizar el diálogo e inferir: que es lo *supone* el Sr K; qué es lo que *sabe* su hijo. Si JK le dice al padre que compre 12.65 m y cerque un cuadrado de lado 3,15 m.; ¿es "razonable" el concejo de JK?

b. Si el Sr K. deseara construir también una pileta circular de 3 m. de radio con centro en el cruce de las diagonales del cuadrado, ¿quedaría en tal caso espacio para cercar la superficie rectangular deseada? Si pudiera hacer ambas cosas y para sus propósitos diera lo mismo cercar una superficie que otra, ¿qué le conviene cercar para gastar menos?, ¿la pileta o el terreno?

4. Con dos tramos rectos y dos semicirculares, deseamos construir una pista de autitos de carrera con una longitud total de 8 mts (ver figura). Para ello necesitamos conocer qué valores del tramo recto (a) y del tramo circular (r) podemos tomar de modo que la pista entre en una habitación de área "**A**", quede espacio para circular a su alrededor. (*Nota*: admitimos que la pista no tenga tramo recto, o circular)
Te pedimos que nos ayudes en esta búsqueda, que para ello:



a) halles una *función* que permita calcular el área abarcada por la pista al considerar distintos radios.
b) determines a partir de ella las dimensiones posibles para la pista, la forma que tendría en cada caso, cual sería la mayor área que podría abarcar.
Sugerencia: establecer el rango de variación de r, analizar luego la situación para distintos radios.
r = 1/π ; 2/π ; 3/π ; 4/π ; 5/π ; 6/π ; 7/π ......

c) analices si podemos construir la pista en una habitación de **3**m. x **3**m.; de **5**m. x **2**m.

5. Sabiendo que la superficie abarcada por un triángulo rectángulo es 25 m^2; se pide:

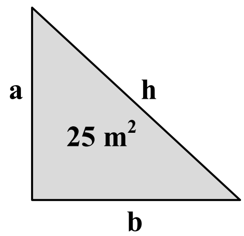
a. Hallar una *función* que permita calcular la hipotenusa de este tipo de triángulo en el caso que el único dato que se tenga sea *el perímetro* del mismo.
b. Analizar si existe un triángulo como el indicado cuyo perímetro sea 20. En caso que exista; indicar cuáles son las dimensiones de los otros lados. En términos de la función hallada en (a), ¿qué se estaría investigando aquí?

ⓘ *Este problema, es una generalización del tipo de problemas tratados en este taller.*

Su resolución requiere el tratamiento de una ecuación en cuatro variables y la existencia de dos condiciones (o restricciones) que permitan separar las variables en condicionadas y libre.

A continuación te proponemos el "*reconocimiento de situación*", te pedimos que completes la resolución a partir de allí.

Reconocimiento de situación:
Graficamos y determinamos las variables relevantes al problema.



- b = base del triángulo → (desconocida ; b > 0).
- a = altura del triángulo → (desconocida ; a > 0).
- h = hipotenusa del triángulo →(desconocida; h > 0).
- p = perímetro del triángulo → (***supuesto dato***; p > 0)
- A = área del triángulo → (***dato*** ; A = 25)
- *Fórmulas*:

$\mathbf{p = a + b + h}$; (*4 variables*: **p ; a ; b ; h**) (*1*)

$\mathbf{A = \frac{1}{2}\ a \cdot b} \xrightarrow{A=25} \mathbf{a \cdot b = 50}$; (*restricción sobre* **a** *y* **b**) **(2)**

$\mathbf{h^2 = a^2 + b^2}$; (*restricción sobre* **a ; b ; h**) **(3)**

° ***Incógnita*** : ***f*** *(función)* / **h =** ***f*** **(p)**

ANEXO V

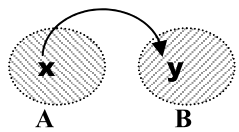
<u>FUNCIONES</u>:

Gran parte del Cálculo implica el empleo de números reales o de variables para describir cantidades cambiantes; particularmente, implica el uso de *funciones* a los efectos de describir la relación entre tales variables, proceder al análisis de problemas que las involucran. El estudio y resolución de estos problemas resulta fundamental en un mundo de cambios constantes, pleno de cuerpos en movimiento y con fenómenos de flujo y reflujo; de allí que el Cálculo, como cuerpo de técnicas de cómputos y conceptos esenciales, siga teniendo vigencia, siga sirviendo como el principal lenguaje cuantitativo de la ciencia y la tecnología.
En esta sección nos dedicamos a establecer el concepto de *función*, la notación y terminología con la que vamos a trabajar en los distintos talleres planteados en este libro.

§ 1- DEFINICIONES y NOTACIONES

Definición de función:

Dados dos conjuntos, **A** y **B**; una ***función de A en B*****,** es una ***regla*** o ***ley*** que a cada elemento de **A** asigna un único elemento de **B**.

SIMBOLO	Elementos que la ***caracterizan***	***Condiciones*** sobre la ***ley***	REPRESENTACION
Para nombrar una función usamos una letra. *(f, g, h ...)* Generalmente y por costumbre, usamos: f	♦ dos conjuntos: **A** ; **B** ♦ una ***regla*** o ***ley*** de asignación	asignar a ***<u>cada</u>*** elemento de **A** un ***<u>único</u>*** elemento de **B**	f **: A → B** **x → y** 

CONVENCION DE NOMBRES y SIMBOLOS:

- f **: A → B** ; se lee: f **aplica A en B** .
- al conjunto de *partida* (**A**), lo llamamos: **DOMINIO**
- al conjunto de *llegada* (**B**), lo llamamos: **CODOMINIO**
- a los elementos del dominio o del codominio los llamamos: **VARIABLES.**
  A las *variables* las representamos con letras minúsculas: x, y, z, t., u, ….
- si y representa el valor obtenido al aplicar f a un x de **A** entonces, a

y • —— ***lo llamamos*** → ***imagen de x por f***

y • —— ***lo indicamos*** → $y = f(x)$

Símbolo que usamos para enfatizar la función aplicada (f) y, la variable elegida (x).

RESUMIENDO: estamos ante una función cada vez que:

(I) podamos identificar ***dos conjuntos***, uno de partida y otro de llegada. [DOMINIO y CODOMINIO]
(II) podamos reconocer la existencia de una ***regla ó ley*** que asigne a todo elemento del dominio *uno* (*y solo un*), elemento del codomino.

🛈 Los talleres propuestos en este libro tienen como principal objetivo trabajar el concepto de función, primer y fundamental peldaño en esta escalera que es el Cálculo ó Análisis Matemático. En particular, el de ***función escalar***.

Función Escalar: llamamos *función escalar* a toda función en la que tanto el dominio (**A**) como el codominio (**B**) son conjuntos de números reales.

O sea; tales que: **A ϕ R** y **B ϕ R** con **R** el conjunto de todos los números reales.

🛈 La regla de asignación puede venir dada por una o más leyes. En el caso de estar dada por *dos o más leyes* la función recibe el nombre de *seccionalmente definida*.

🛈 Normalmente se da sólo la ley de la función; es decir, es habitual que dominio y codominio no aparezcan expresamente indicados. En tal caso se asume que estos conjuntos quedan *´naturalmente determinados´* por la ley de asignación. Así, convenimos en darles el nombre de ***dominio y codominio ´natural´***.

DOMINIO NATURAL (**Dn**): *mayor conjunto* de **R** *donde la ley de asignación ´tiene sentido´; o sea, donde pueda ser aplicada.*

CODOMINIO NATURAL (**Cn**): cualquier conjunto que contenga *todas* las imágenes.

🛈 La determinación de estos conjuntos, a los que a partir de ahora llamaremos simplemente dominio ó codominio dando por sobreentendido que nos referimos al *´natural´* resulta de suma importancia en el estudio y aplicación de funciones. Al respecto, la determinación de,

- el *codominio* no ofrece dificultades; basta detectar cual es el *mayor conjunto* admisible en el marco del problema a resolver. Dado que vamos a trabajar sólo con *funciones escalares* en nuestro caso este conjunto será "**R**" .
- el *dominio* es más complicado ya que existen distintas cuestiones que inciden en la posibilidad o no de aplicar la ley de la función.. Estas son:

  ❶ ***restricciones de orden algebraico***: las propias de la *fórmula o expresión* matemática que expresa la ley de correspondencia.

  ❷ ***limitaciones según la naturaleza de las variables***: particularmente en el caso que las mismas representan magnitudes.

  ❸ ***limitaciones propias del ´modelo matemático´***: las que resultan de considerar el *´contexto físico´* donde la función está *´actuando´*.

ⓘ Las variables no tienen el mismo rol, este difiere en forma importante de una a otra.

"los valores de las variables del dominio se toman en forma *arbitraria* (dentro del dominio), los correspondientes del codominio son el *resultado* de esa elección"

Luego, y teniendo en cuenta esta particularidad las distinguimos del siguiente modo :

variable independiente (v.i) ⟶ la del *dominio*
variable dependiente (v.d) ⟶ la del *codominio*.

ⓘ En conclusión, cada vez que detectemos una *relación de dependencia* en que la correspondencia sea *unívoca*, *estamos ante una función* aún cuando dominio y codominio no estén explícitamente indicados. Para *representar* una función en forma genérica usamos tres letras, una para la función y las otras dos para las variables (dependiente e independiente). Si la función *no tiene una interpretación concreta* (las variables no representan magnitudes), por *costumbre* la indicamos con ***f*** (podemos usar otras letras como g, h, ó p); mientras que a un elemento genérico del dominio lo indicamos con ***´x´*** y del codominio con ***´y´***

ⓘ Cuando hablamos de *´relación de dependencia´* instintivamente pensamos en una relación del tipo *´causa-efecto´* y en la mayoría de las funciones de uso cotidiano esto es realmente así. Pero la concepción moderna de la palabra función es mucho más amplia. Como se desprende de la definición, solo se pide que cada elemento del dominio tenga *´asociado´* un único del codominio, pudiendo esta asociación estar establecida en forma arbitraria. Así, por ejemplo, si a cada alumno se le asigna un número al azar, se tiene una función cuya ley no obedece a ninguna relación *causa-efecto*. En cambio si se le asigna su nota en el parcial, ¡¡si que se tiene relación *causa-efecto* !! (aunque no se pueda dar una "fórmula" para la regla de asignación).

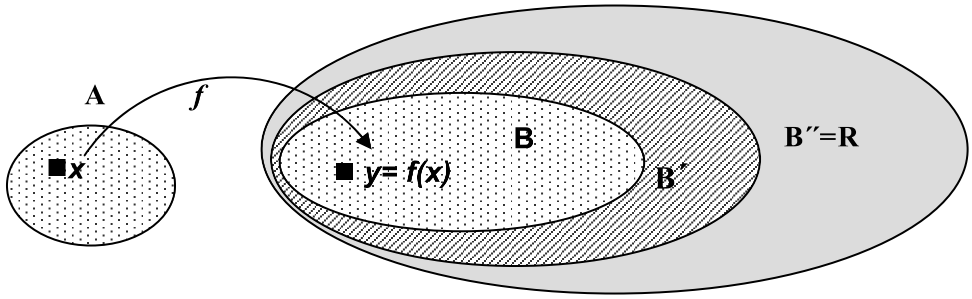
CONJUNTOS MÁS IMPORTANTES ASOCIADOS A UNA FUNCION: *DOMINIO NATURAL, IMAGEN Y GRAFICO DE UNA FUNCION*.

➢ ***Dominio natural***: proponemos aquí un ejemplo para aclarar el concepto; la determinación del dominio natural en tres funciones que tienen la misma *fórmula.*

Función	$y = \frac{100}{x - 0.2}$	$w = \frac{100}{u - 0.2}$	$P = \frac{100}{V - 0.2}$
Variables	*v.i.* → *x* *v.d* → *y*	*v.i.* → *u* *v.d* → *w*	*v.i.* → *V (volumen)* *v.d* →*P (presión)*
restricciones: ❶ algebraicas: ❷ según variables: ❸ según modelo:	 $x \neq 0.2$ ninguna ninguna	 $u \neq 0.2$ ninguna ninguna	 $V \neq 0.2$ $V > 0$; $P > 0$ $V > 0.2$
Dominio Natural	**Dn=R-{0.2}**	**Dn=R-{0.2}**	**Dn = (0.2; +∞)**

ⓘ ***Igualdad de Funciones:*** las distintas propiedades de las funciones, como ser *monotonía, simetrías, inyectividad, etc,* dependen tanto de la ley de la función como de los otros elementos que la definen, particularmente del dominio de la misma. Funciones con la misma ley pero distinto dominio pueden tener distintas propiedades. Luego, y dado que parece razonable que funciones con propiedades distintas sean *distintas*; tenemos que para que dos funciones sean iguales no basta con que tengan la misma ley, que en la comparación debemos considerar también los otros elementos que la definen. Convenimos así que: "*dos funciones son iguales si y solo si tienen la misma ley, el mismo dominio y el mismo codominio*".

➢ ***<u>Conjunto Imagen para</u>*** $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ($\to$codominio o conjunto de *´llegada´* de f).



De la definición resulta evidente que hallado *un codominio*, cualquier otro conjunto que lo contenga (por ej: **B´** ó **B´´**) también puede ser tomado como codominio. Así, a la hora de decidir el codominio tenemos muchos conjuntos entre los que optar. Luego:

✓ en general y para simplificar la cuestión convenimos en tomar como codominio el *mayor* de todos los posibles. Así, si f es una función escalar; $C_n = \mathbf{R}$.

✓ en particular, en algunas situaciones muy puntuales será necesario considerar el ***menor codominio*** posible; o sea aquel que contenga todas las imágenes de x por f, ***y solo ellas***. A este conjunto ordinariamente se lo conoce con el nombre de: ***conjunto imagen, rango ó recorrido***.

DEFINICION: ***Conjunto imagen***	Dada $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ llamamos conjunto imagen al conjunto de todas las imágenes de x por f. Lo indicamos: ***Im f***. $Im\, f = \{ y \in \mathbf{R} \,/\, y = f(x) \text{ para algún } x \in \mathbf{A} \}$; $Im\, f \subseteq \mathrm{B}$

➢ ***<u>Gráfico de una función</u>***.

DEFINICION: ***gráfico de f***	Llamamos ***gráfico de f*** al conjunto de todos los pares ordenados cuya primer componente es un elemento del dominio (x), y la segunda es la imagen de x por f: $graf\, f = \{(x; y) \,/\, x \in \mathbf{A},\ y = f(x)\} = \{(x; f(x)) \,/\, x \in \mathbf{A}\}$

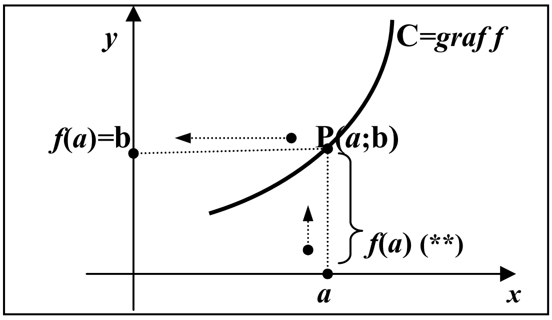
ⓘ Introducido un sistema de coordenadas plano, dada la identificación que existe entre *pares ordenados de números reales* y *puntos del plano*, podemos representar gráficamente al conjunto ***graf f.*** A esta representación también la llamamos ***graf f*** .

- ✓ si el dominio de una función es un *conjunto discreto*, su gráfico también lo es. (*conjunto discreto*: conjunto formado por puntos *´aislados´*).
- ✓ si el dominio de una función es un *conjunto continuo*, su gráfico también lo es (*conjunto o curva continua*: sin cortes ni agujeros).
- ✓ el ***graf f*** da idea del *comportamiento global* de la función ya que permite visualizar la misma en forma íntegra, conocer su *´historia de vida´*. Luego, resulta un elemento muy útil a los fines de estudiar propiedades o rasgos característicos de la función.

De cómo "leer" del gráfico de f , la imagen de x por f .

P(*a*;b)∈ *graf f* ⇔ ***a*** **∈ D_nf** y **b=*f*(*a*)**

- dominio ↔ eje horizontal ⇒ ***a* ∈ *eje x***
- imagen ↔ eje vertical ⇒ **b** ∈ ***eje y***



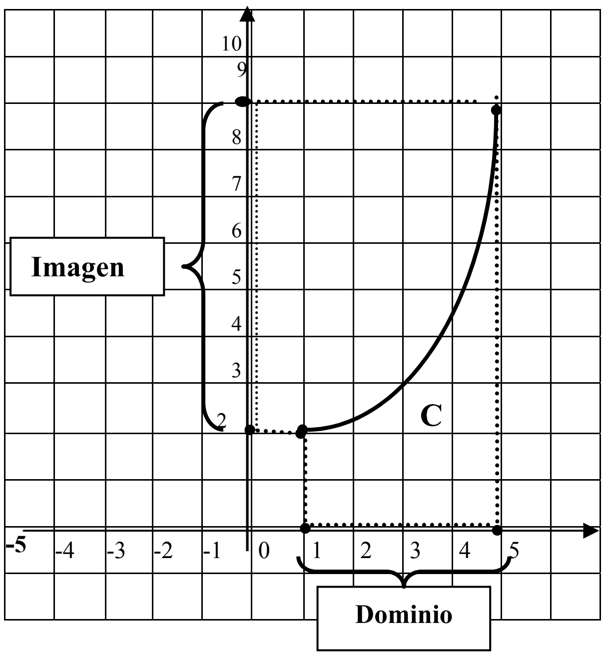
Para leer ***f*(*a*)** desde el gráfico:

» partir de ***a*** y subir (ó bajar) hasta tocar la gráfica de ***f*** en un punto (**P**). Si nunca cortamos la gráfica ⇒ no existe ***f(a)***.

» al llegar a **P**, doblar en ángulo recto y avanzar hacia el ***eje y.***

» al llegar al ***eje y***, leer el valor alcanzado. Este valor es ***f(a).***

Determinacion de Dn f e Im f en una curva C tal que C = graf f



Sea **C ≅ graf f** ; luego:

- **Dn** = ´proyección´ de **C** sobre el eje x.
- **Im f** = ´proyección´ de **C** sobre el eje y.

En el ejemplo:

Dn = [1 ; 5]
Im f = [2 ; 9]

<u>De como detectar si una curva plana es el gráfico de una función</u>

▪ ***Prueba de la recta vertical*** :

Una ***curva plana C*** es el gráfico de una función con fórmula $\boldsymbol{y = f}(x)$ si y sólo si toda recta vertical corta a la curva, como máximo, en un punto.

DISTINTAS FORMAS DE ´DAR´ (representar) UNA FUNCION.

I - Algebraicamente → con una, dos ó más *fórmulas*.	(la nombramos: $\boldsymbol{f}$)
II - Numéricamente → con una *tabla de valores*.	(la nombramos: $\boldsymbol{f}_{num}$)
III - Gráficamente → con un *gráfico*.	(la nombramos: $\boldsymbol{f}_{graf}$)
IV- Verbalmente → con una descripción en palabras.	

ⓘ Existen funciones que pueden ser representadas de las cuatro maneras. En tal caso resulta útil pasar de una forma a la otra ya que cada forma de representar una función *destaca aspectos que las otras no hacen*. Así, combinando las distintas formas vamos a tener mucho más información sobre la función que con solo una de sus representaciones.

TALLER 5

OBJETIVO

El objeto de este módulo es ocuparnos de las ***operaciones entre o sobre funciones.*** El dominio de tales operaciones resulta imprescindible para el estudio de cada una de las ***clases*** en que podemos subdividir el conjunto de las funciones. (ver [❶] en **Anexo VI**).

Para estudiar cada ***clase de función*** (***función tipo*** o ***prototipo*** que la caracteriza, parámetros que la identifican y distinguen, características geométricas o físicas de dichos parámetros, comportamiento global y/o tendencial de las funciones componentes, etc), resulta de suma utilidad explorar el efecto sobre la función de lo que genéricamente llamamos ***operaciones gráficas*** o ***de trasformación*** (traslaciones, reflexiones, etc.). (Ver [❷] en **Anexo VI**).

Conocer las ***funciones prototipos*** asociadas a cada clase es imprescindible (aunque no suficiente) para resolver cualquier problema que involucre magnitudes variables pues, en general, la resolución de estos problemas requiere la obtención de una función que *modelice* el proceso motivo o razón del problema.

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. Analizar cual de las siguientes ecuaciones determina una función "**f**" con fórmula " **y = f(x)** ".

(a) $2x + 5y = 4$
(b) $4x^2 - 2y = 8$
(c) $4x - y^2 = 0$
(d) $x^2 + y^2 = 25$
(e) $x.y = 1$
(f) $x^2.y = 1$
(g) $x^2.y^2 = 1$
(h) $x.(y+1) = y$
i) $x^2.y + x\,y^2 = 1$
j) $y = 3$
k) $|\,y\,| = 2$
l) $x - 2 = 0$

2. *DEFINICION*: f se dice *positiva* si y solo si $f(x) > 0$; $\forall\ x \in Df$
f se dice *no negativa* si y solo si $f(x) \geq 0$; $\forall\ x \in Df$
f se dice *negativa* si y solo si ....(completar)
f se dice *no positiva* si y solo si .... (completar)

a) Dar una definición equivalente de función positiva en términos del gráfico de f.

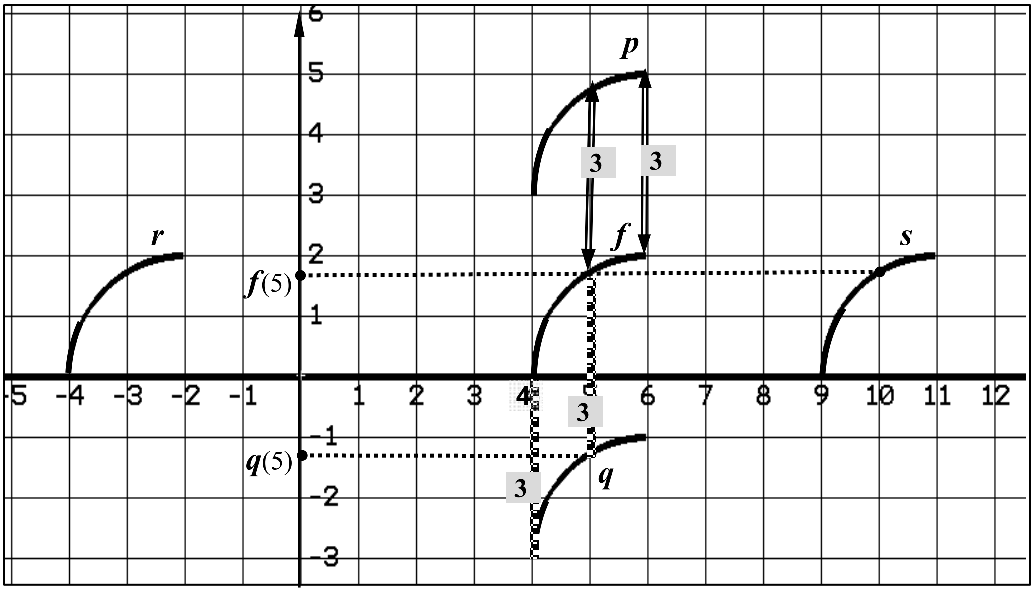
b) Decimos que una función tiene "SIGNO DEFINIDO" si no cambia de signo en todo su dominio; o sea, si es siempre *positiva* (ó *negativa, ...*). Se pide entonces analizar si las siguientes funciones tienen "SIGNO DEFINIDO" en su dominio. Si lo tienen proceder a clasificarlas.

$f_1(x) = x^2$ $\quad f_2(x) = x^2 + 1$ $\quad f_3(x) = -x^2$ $\quad f_4(x) = -x^2 - 4$

$f_5(x) = x^2 - 4$ $\quad f_6(x) = -3/x^2$ $\quad f_7(x) = x^3$ $\quad f_8(x) = |\,x\,|$

$f_9(x) = -|\,x\,|$ $\quad g_1(x) = \text{sen } x$ $\quad g_2(x) = -\text{sen } x$ $\quad g_3(x) = |\,\text{sen } x\,|$

3. El gráfico que se propone a continuación muestra una función, f, y las funciones que resultan de realizar distintas ***operaciones de transformación*** sobre ella.



Respecto a este gráfico se pide:

a) Dar dominio e imagen de f ; p ; q ; r y s.

b) Dar la ley de p en función de f; o sea, a través de una expresión donde se vea claramente la ***operación de transformación*** a realizar sobre f, para obtener p.
Para ello: **1)** leer del gráfico imágenes de p usando como dato las correspondientes imágenes de f.
2) buscar algún ***patrón*** en las imágenes halladas e ***inducir*** a partir del mismo la ley de p. Indicar el resultado de la operación efectuada sobre f.

Idem **(b)** para q ; r y s.

Ejemplo: q → leemos del gráfico: $\mathbf{D}q = [4; 6]$; $\mathbf{Im}\, q = [-3 ; -1]$

$$\left.\begin{array}{l} q(4) = -3 = f(4) - 3 \\ q(6) = -1 = f(6) - 3 \\ q(5) = ...?.. = f(5) - .... \end{array}\right\} \Rightarrow q(x) = f(x) - 3 \quad \text{(restamos } 3 \text{ u. a } f\text{)}$$

* Si *restamos* **3** unidades a f, entonces el ***graf f*** se desplaza *verticalmente y hacia abajo* **3** unidades; no cambia ***el dominio***.

c) Generalizar lo observado en (b), completando las siguientes afirmaciones:

*1- Si *sumamos* a ...... un $k \in R^+$, entonces el ***graf f*** se desplaza *verticalmente hacia arriba*............; no cambia ....

*2- Si *restamos* a ...... un $k \in R^+$, entonces el ***graf f*** se desplaza *verticalmente hacia abajo* ....; no cambia ....

*3- Si *restamos* a ...... un $h \in R^+$, entonces el ***graf f*** se desplaza *horizontalmente hacia la derecha* ....; no cambia ....

*4- Si *sumamos* a ...... un $h \in R^+$, entonces el ***graf f*** se desplaza *horizontalmente hacia la izquierda* ....; no cambia ....

d) Si nos informan que $\boldsymbol{f}$ es el gráfico de un arco de circunferencia con centro en (6;0) y radio 2, se pide dar la ley de $\boldsymbol{f}$ con fórmula $y = f(x)$. Obtener luego, y a partir de ella, las correspondientes leyes para $\boldsymbol{p}$; $\boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$. (verificar). Los gráficos de $\boldsymbol{p}$; $\boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$, ¿corresponden a arcos de circunferencia?

A continuación se da una guía para trabajar este item. Resolver y completar la misma

Circunferencia centro **P**(a;b), radio r → $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Circunferencia centro **P**(6;0), radio 2 → $(x - ......)^2 + (y - ......)^2 = ...$

Cálculos auxiliares:

Π ´***despeje***´ ***de y*** :

$(x - ......)^2 + y^2 = ...$

$y^2 = ... - (x - .....)^2$

$|y| = ...$

$y_1 = ...$

$y_2 = ...$

• $y = f(x)$ con $f(x) =$ ____________________

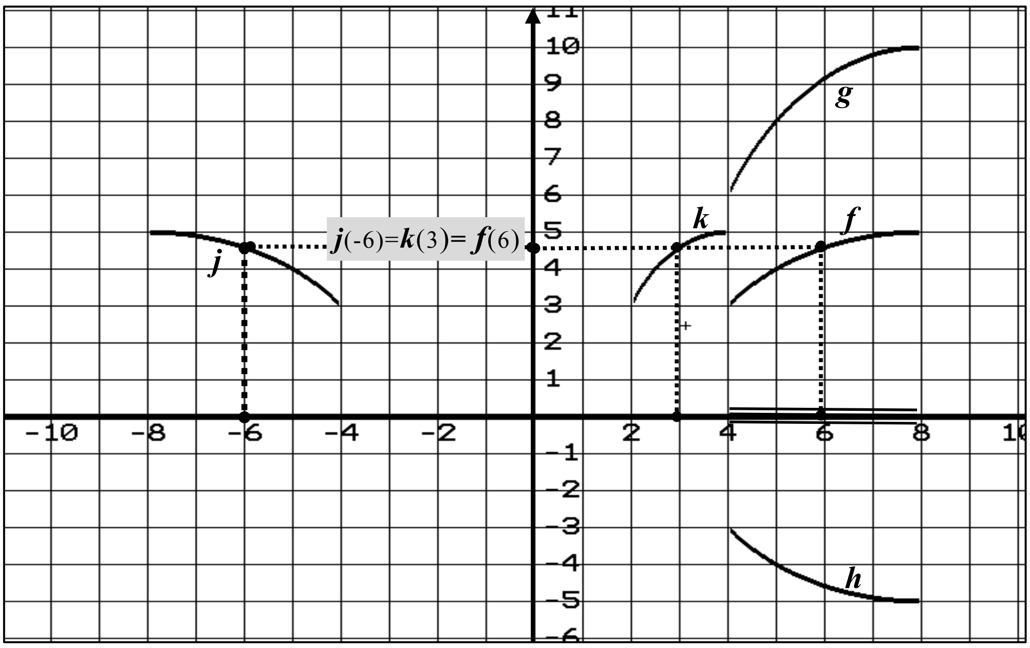
• p → $p(x) = f(x) + 3 =$ __________________ $+\ 3$

• q → $q(x) =$ ___________________________

• r → $r(x) =$____________________________

• s → $s(x) =$ _____________________________

4. El gráfico que se propone a continuación muestra una función $\boldsymbol{f}$ y las funciones que resultan de realizar distintas ***operaciones de transformación*** sobre ella.



Respecto a este gráfico se pide,

a) Dar dominio e imagen de ***f*** ; ***g*** ; ***h*** ; ***j*** y ***k***.

b) Dar la ley de ***g*** en función de ***f*** ; o sea, a través de una expresión donde se vea claramente la ***operación de transformación*** a realizar sobre ***f***, para obtener ***g.***
Para ello: **1)** leer del gráfico imágenes de ***g*** usando como dato las correspondientes imágenes de ***f*** .
2) buscar algún ***patrón*** en las imágenes halladas e ***inducir*** a partir del mismo la ley de ***g***. Indicar el resultado de la operación efectuada sobre ***f.***

Idem (b) para ***h*** ; ***j*** y ***k***.

Ejemplo: ***k*** → leemos del gráfico → $f(4) = 3$; $f(8) = 5$; Dk = [2; 4]; Im k = [3; 5] .

$$\left.\begin{array}{l} k(\overset{\times 2}{2}) = 3 = f(4) = f(....2) \\ k(4) = 5 = f(8) = f(....4) \\ k(3) = \quad\;\; f(6) = f(...3) \end{array}\right\} \Rightarrow k(x) = f(2x) \text{ (multiplicamos por } 2 \text{ a } x\text{)}$$

* Si *multiplicamos* a ..***x***.. por ***2*** , entonces el ***graf f*** se *comprime horizontalmente*; no cambia ...***la imagen***....

c) Generalizar lo observado en (b), completando las siguientes afirmaciones:

*5- Si *multiplicamos* a ...… por un $c \in \mathbb{R}$, tal que $c > 1$,
entonces el ***graf f*** se *comprime horizontalmente*; no cambia ....
*6- Si *multiplicamos* a ...… por un $c \in \mathbb{R}$, tal que $c > 1$,
entonces el ***graf f*** se *alarga verticalmente*; no cambia ....
*7- Si *multiplicamos* a ...… por (-1),
entonces el ***graf f*** se *refleja respecto del eje x*; no cambia ....
*8- Si *multiplicamos* a ...… por (-1),
entonces el ***graf f*** se *refleja respecto del eje* y; no cambia ....

d) Si nos informan que ***f*** es el gráfico de un arco de circunferencia con centro en (8;0) y radio 5, se pide dar la ley de ***f*** con fórmula $y = f(x)$. Obtener luego, y a partir de ella, las correspondientes leyes para ***g*** ; ***h*** ; ***j*** y ***k***. (verificar).
Los gráficos de ***g*** ; ***h*** ; ***j*** y ***k*** , ¿corresponden a arcos de circunferencia?

Cálculos auxiliares:	Circunf. centro **P**(8;0), radio 5 →$(x - ....)^2 + y^2 =$ .....
Π ***´despeje´ de y*** :	• $y = f(x)$ con $f(x) =$ ____________________
$(x - ......)^2 + y^2 =$	• ***g*** → $g(x) =$ ____________________
$y^2 =$ ...... - $(x - .....)^2$	• ***h*** → $h(x) =$ ____________________
$\lvert y \rvert =$	• ***j*** → $j(x) =$ ____________________
$y_1 =$	• ***k*** → $k(x) = f(2x) =$ ____________________
$y_2 =$	

5. Siendo **f** la función del gráfico adjunto se pide:

a) Graficar las funciones que se indican a continuación usando la Tabla de Transformaciones del **Anexo VI**.

$g(x) = - f(x)$

$h(x) = f(x) + 2$

$j(x) = f(x) - 5$

$v(x) = 3.f(x)$

$w(x) = 1/3 .f(x)$

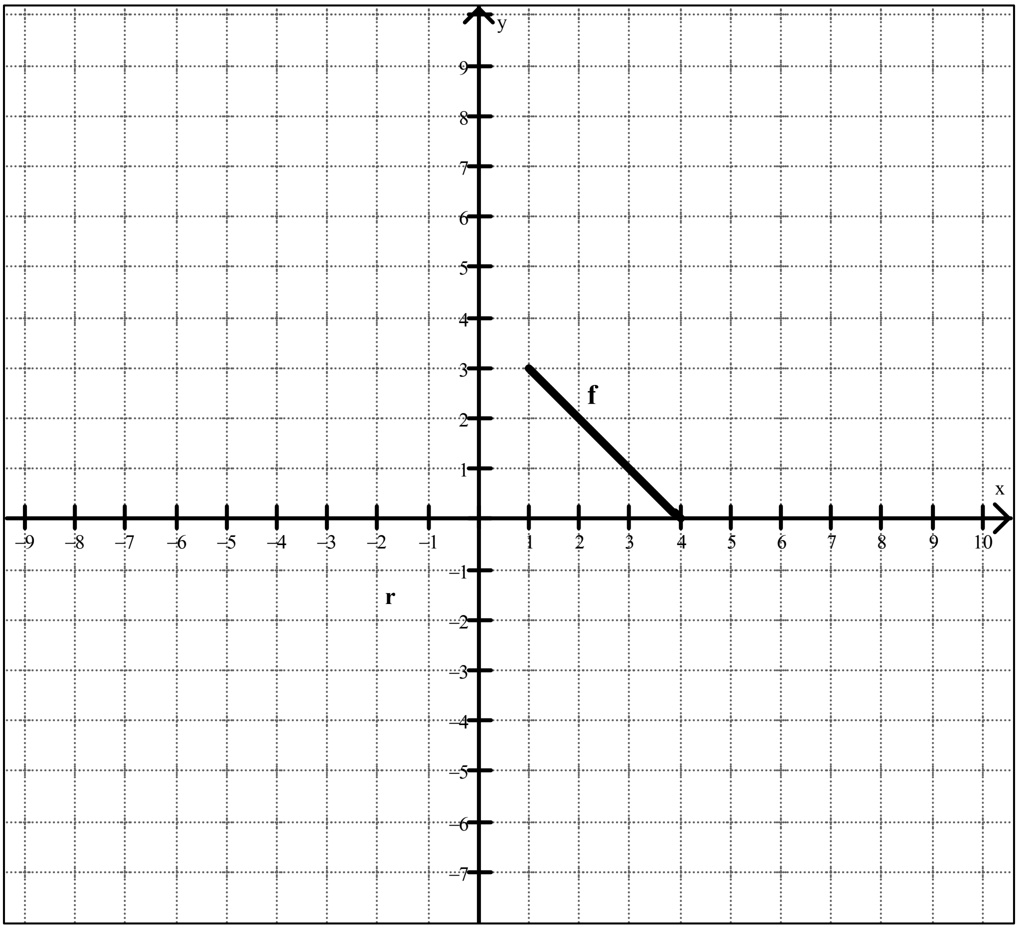
$p(x) = f(x - 1)$

$q(x) = f(x + 5)$

$r(x) = f(x + 5) - 2$

$s(x) = | f(x + 5) - 2 |$

b) **f** (x)= -x + 4. Con este dato hallar la *fórmula* correspondiente a cada una de las funciones graficadas en (a). Verificar con ellas los gráficos hechos.



d) Dar gráfico, ley, dominio e imagen de las funciones que se obtienen a partir de realizar sobre la gráfica de **f** las siguientes transformaciones :

Se desplaza 3 u. hacia abajo y 4 u. a la derecha.

Se refleja respecto del eje x y luego se desplaza 2 u. hacia arriba.

Se refleja respecto del eje y.

Se refleja respecto del eje y se alarga verticalmente un factor 3.

Se alarga horizontalmente un factor 2.

ANEXO VI

❶ *Clases de Funciones*

En el caso que la ley de la función esté dada por una ecuación con fórmula ***y = f(x)*** la clase a la que pertenece la función se establece según la ***estructura algebraica*** de dicha ecuación. Así, según este criterio, en una primera y amplia clasificación reconocemos las siguientes ***clases de funciones***:

- ***polinómicas***
- ***racionales*** (cociente de polinomios);
- ***algebraicas*** (± ; producto; cociente y/ó raíz de polinomios); y ,
- ***trascendentes*** (aquellas que *trascienden* los métodos del álgebra, por ejemplo: *exponenciales, logarítmicas, trigonométricas* e *inversa de trigonométricas*).

En algunos casos, para facilitar el estudio, dentro de una clase distinguimos ***subclases***. Así, dentro de los *polinomios* distinguimos la subclase de las *lineales* y de las *cuadráticas.*

Uno de los propósitos de estos talleres es profundizar el estudio de las distintas ***clases de funciones***. Particularmente, el de las propiedades que *caracterizan* y a la vez *distinguen* a las funciones de una clase de las de otra (parámetros que las identifican, características geométricas o físicas de dichos parámetros, comportamiento global y/o tendencial de las funciones de la clase, etc).

En principio el hecho de que cada clase abarque una cantidad *´infinita´* de funciones parece complicar el estudio de la clase como un *´todo´*. Sin embargo, apenas comenzado el análisis de las funciones que constituyen una clase, salta a la vista la existencia de propiedades o rasgos *´comunes´* a todas ellas. Esto indica que asociadas a cada *ecuación* habría ciertas y determinadas *propiedades* que estarían siempre presentes más allá del valor que en particular tomen los coeficientes de la ecuación. Este hecho habilita entonces a representar las infinitas funciones que constituyen la clase, por una *función genérica*; o sea, por una función donde los coeficientes de la respectiva ecuación tienen el carácter de *parámetros* (es decir, no están fijos sino que son variables). Esta función genérica, que a partir de ahora llamamos ***función tipo*** o ***prototipo,*** representa a todas las funciones de la clase (y solo a ellas).

Este hecho lo resumimos diciendo que
la ***función prototipo*** "......................" representa a la ***clase de las*** "......................" .

Por ejemplo:
la ***función prototipo,*** "$f(x) = a\, e^{k\,x}$" representa a la ***clase de las*** "*exponenciales*".

También decimos que la función prototipo representa una "***familia de funciones***"; luego, y a partir de aquí, para referirnos a un conjunto de funciones que tienen ciertas propiedades en común, usaremos indistintamente el término ***clase*** o ***familia***. (*de funciones*)

Por ejemplo, $f(x) = \mathbf{m}.x + \mathbf{h}$ es la función prototipo que representa o define la ***familia de las funciones lineales***.

La determinación y análisis de los ***parámetros*** de la función prototipo asociada a una familia de funciones permite hacer el ***estudio global*** de dicha familia, identificar rasgos sobresalientes de la misma, establecer que es lo que ***caracteriza*** o ***distingue*** a esta familia del resto.

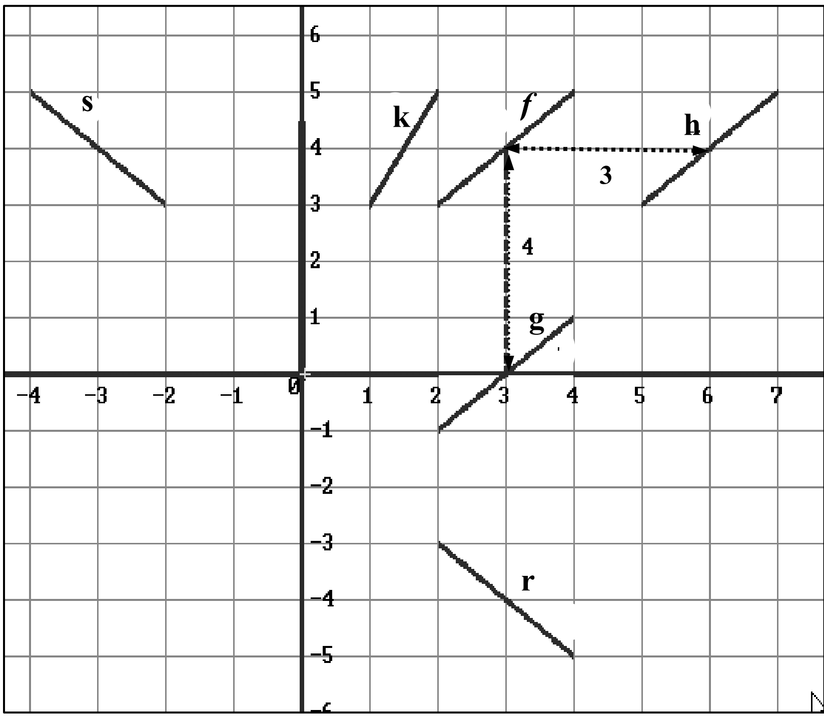
Así, y por ejemplo, el estudio de la función prototipo $f(x) = \mathbf{m}.x + \mathbf{h}$ consiste esencialmente en la *exploración* de los parámetros **m** y **h**. O sea, no es la variación de x la que en particular interesa, sino la de los ***parámetros*** que definen la función; el efecto de los mismos sobre la gráfica, la existencia de comportamientos tendenciales para la familia de funciones asociada a la función prototipo; etc. Para analizar esto resulta útil explorar el efecto sobre la gráfica de las que llamamos ***operaciones gráficas*** (traslación, reflexión, etc.).

❷ ***Operaciones gráficas u operaciones de transformación sobre funciones.***

A través de *operaciones gráficas*, las cuales consisten en traslaciones, reflexiones o cierto tipo especial de *´deformaciones´* podemos generar nuevas funciones a partir de una dada. Efectivamente, dada **C = *graf f***, esta *curva/función* puede ser *trasladada*, *reflejado respecto del eje x (del eje y)* ó *"deformada"*. Todas estas operaciones, en forma genérica reciben el nombre de ***transformaciones***.

Al efectuar una transformación sobre **C** obtenemos una nueva curva, **C***; por ende, una *nueva función*, ***g***, tal que ***graf g* = C*** . En general la expresión analítica de esta nueva función es de la forma ***g***(x)= A.***f*** (*a*x+b)+B; donde ***f*** es la función de partida y los *parámetros a*, b, A, B son constantes cuyo valor *depende de la transformación aplicada*. Estos parámetros son el *nexo* entre la función *original* y su *transformada;* así, y en razón de ello, para estudiar las operaciones gráficas, su efecto sobre la función a la que se aplican, basta *estimar el efecto de la variación de los parámetros en la forma analítica* ***y*** = A.***f*** (*a*x+b)+B.

En lo que sigue, a partir de ***f***(x)= x +1 con D***f*** = [2;4] realizamos una serie de operaciones gráficas y mostramos las expresiones analíticas que les corresponden.



h → traslación

g → traslación

k → contracción

s → reflexión s/ eje y

r → reflexión s/ eje x.

g(x) = ***f*** (x) - 4

h(x) = ***f*** (x -3)

k(x) = ***f*** (2.x)

s(x) = ***f*** (- x)

r(x) = - ***f*** (x)

Conclusiones:

1) las ***traslaciones*** están asociadas a la suma (ó resta) de un parámetro a la <u>función</u> ó a la <u>variable</u>, según sea la *dirección* de la traslación (⇆ ó ⇅)
2) la ***contracción*** resulta como consecuencia de multiplicar la variable por un número positivo mayor que 1.
3) las ***reflexiones*** resultan de multiplicar por (-1) la <u>función</u> ó la <u>variable</u>, según sea el eje respecto al cual se producen. (*eje x* ó *eje y*)

Estos hechos u otros por el estilo no enunciados aquí pueden aceptarse como reglas y ser usados para facilitar la *clasificación* o *construcción* de funciones.

- La siguiente TABLA resume las transformaciones fundamentales.

TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

Las constantes **k** , **h** y **c** cumplen: **k >0** ; **h > 0** ; ***c* > 1**

	Definición de **g**	Transformación a realizar sobre el **gráfico de f** para obtener el **gráfico de g.**
traslaciones	$g(x) = f(x) + \mathbf{k}$	.... subir **k** unidades
	$g(x) = f(x) - \mathbf{k}$	.... bajar **k** unidades
	$g(x) = f(x + \mathbf{h})$	.... trasladar **h** unidades a izquierda
	$g(x) = f(x - \mathbf{h})$	.... trasladar **h** unidades a derecha
"deformación"	$g(x) = c\, f(x)$	.... alargar verticalmente en un factor ***c***
	$g(x) = \frac{1}{c}\, f(x)$	.... comprimir verticalmente en un factor ***c***
	$g(x) = f(c.x)$	.... comprimir horizontalmente en un factor ***c***
	$g(x) = f(\frac{1}{c}x)$	.... alargar horizontalmente en un factor ***c***
reflexiones	$g(x) = - f(x)$	.... reflejar respecto del eje x
	$g(x) = f(-x)$	.... reflejar respecto del eje y
	$g(x) = \vert f(x) \vert$	.... reflejar respecto del eje x la parte del graf f que está ***por debajo del eje x***.

Observaciones

1.- $c > 1 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{c} < 1$

2.- Resumiendo el cuadro anterior este dice que:

$g(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ *traslación vertical*
$g(x) = \mathbf{f}(x+\mathbf{b})$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ *traslación horizontal*
$g(x) = \mathbf{b}.\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{b} > 0$ $\Rightarrow$ *compresión* ó *alargamiento vertical*
$g(x) = \mathbf{f}(\mathbf{b}.x)$, $\mathbf{b} > 0$ $\Rightarrow$ *compresión* ó *alargamiento horizontal*

3.- $$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ;\forall x / f(x) \geq 0 \quad (\text{graf } f \text{ por encima eje } x) \\ -f(x) & ;\forall x / f(x) < 0 \quad (\text{graf } f \text{ por debajo eje } x) \end{cases}$$

TALLER 6

OBJETIVO: *Función lineal*

Con la ***función lineal*** comenzamos el estudio en profundidad de cada una de las clases en que se subdivide el conjunto de todas las funciones; en particular, el estudio de las propiedades que *caracterizan* y a la vez que *distingue* a cada una de estas clases.
El logro de este objetivo se propone a partir de la determinación y estudio de la ***función prototipo*** que representa a la clase (parámetros que la identifican y distinguen, características geométricas o físicas de dichos parámetros, comportamiento global y/o tendencial de la gráfica al variar los parámetros, etc); y se implementa a través de la ***resolución de problemas*** que involucren funciones de la clase en estudio.
Trabajaremos mayoritariamente con problemas que involucren *magnitudes variables* dado que este tipo de problemas brinda importantes oportunidades para trabajar con funciones. En general la resolución de estos problemas está sujeta a la obtención de una función que *modelice*(*) el *proceso* motivo o razón del problema. Normalmente, el mismo problema suele dar *señal*es o *indicios* acerca de la función que gobierna el proceso. Para reconocer estas señales es imprescindible (aunque no suficiente) conocer las ***funciones prototipos*** asociadas a cada clase de funciones.
Así, antes de abordar el taller, vamos a plantear la ***función prototipo*** a tratar en él; a explicitar la expresión analítica (*ecuación*) que define la ***ley***, la ***curva prototipo*** asociada y, fundamentalmente, el significado (o efecto sobre la gráfica) de los coeficientes de la ecuación correspondiente.

Requisitos para el abordaje del taller: el objetivo de este taller es la función lineal. Luego, las actividades planteadas demandan el conocimiento y dominio de esta función (ver ❶- **Anexo VII**); en particular, el de la o las ***funciones prototipos*** con que podemos representar a una función lineal.

➻ ***función prototipo:*** $f(x) = m \cdot x + h \quad ; \quad m, h \in \mathbf{R}$

$$f(x) = m \cdot (x - a) + b \quad ; \quad \mathbf{Q}(a; b) \in r = graf\, f$$

➻ Propiedades que caracterizan a la función lineal:

graf f = recta.
m = v (velocidad) ***= cte***

O sea, ***las condiciones necesarias y suficientes para que f sea lineal, son:***
gráfico rectilíneo ;
razón de cambio constante (v = cte) .
(en otras palabras, estas son las ´*señales*´ que ´*delatan*´ a la función lineal).

(*) En el caso que el problema refiera a procesos o fenómenos naturales es muy probable que su resolución requiera la confección de un ***modelo matemático*** del proceso o fenómeno en cuestión. Resulta entonces conveniente conocer algunas cuestiones básicas acerca de los conceptos de ***modelo*** y ***modelo matemático***. (Ver **Anexo VIII**).

Plan de ataque para problemas cuya resolución se sustenta en la modelización de la función que subtiende el proceso del caso: en lo que sigue proponemos la primera instancia del plan de ataque para este tipo de problemas. Esta propuesta irá *´creciendo´* a medida que vayamos incorporando a nuestro haber las distintas clases de funciones. Al finalizar los talleres, tendremos un plan integral para el abordaje de este tipo de problemas, el cual nos permitirá abordar y resolver los mismos en forma organizada y con método.

⏭ PLAN DE ATAQUE (*creciente)*:

I-II) ***Reconocimiento de la situación***: para reconocer si estamos ante un problema cuya resolución requiere acudir a funciones, lo primero que debemos hacer es detectar la presencia de *dos magnitudes variables relacionadas por una función*.

Luego, como en cualquier problema, proceder a:

- *reconocer variables*: dependiente (***v.d***.) e independiente (***v.i***.).
- *etiquetar* y *describir* estas variables
- explicitar la *incógnita*.
- resumir todo otro *dato* o *información* útil a la resolución del problema.

III) ***Planificación (de un proceso para reconocer "funciones prototipo")***

- realizar figuras, esquemas o gráficos que ayuden a reconocer las variables (***v.d.*** y ***v.i.***); fundamentalmente, el *´tipo de relación´* que las vincula.
- revisar la existencia de leyes o formulaciones "*conocidas*" y relativas al proceso motivo o causa del problema.
- de no conocer ninguna ley relativa al proceso, proceder a buscar una función que lo modelice. Para ello trabajar por ***´prueba y error´***; es decir probando y descartando *´funciones tipo´*, en forma metódica, hasta llegar a la que mejor *´ajuste´* a los datos. (salvo que se trate de un *proceso periódico* pues para este caso ya se sabe que las funciones que mejor *´ajustan´* a los datos empíricos son las trigonométricas o combinación de ellas. En el Taller 11 tratamos este caso).

Si el proceso no es periódico, un orden tentativo para probar funciones es:

(1) lineal (*directa proporcionalidad*), ☐(estamos aquí)

(2) polinómicas (*cuadrática*), ☐

(3) recíprocas (*inversa proporcionalidad*), ☐

(4) exponenciales (o sus inversas: *logarítmicas*). ☐

En lo que sigue indicamos con ***x*** a la ***v.i.***, con ***y*** a la ***v.d.***; *¡¡pero cuidado!!*, hacemos esto por tratarse del *caso general*. En el caso concreto, de un problema en particular, las letras que debemos usar son *´las propuestas en el paso I-II del Plan de Ataque´*.

IV) *__Ejecución del plan:__* *análisis de la situación al efecto de determinar el tipo de función que modeliza el proceso.*

a) *__Ley de f__*: por prueba y error.

¿ f lineal ?, resolver esto demanda tener en cuenta:

☞ las CONCLUSIONES GENERALES - Anexo VII (pag. 67):

"f ***lineal*** $\Leftrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = v = cte \Leftrightarrow graf\,f = r$ (*r = recta no paralela eje y*) **".**

☞ la forma en que esté dada la ley de f :

* *__por una ecuación__*, basta detectar si la ecuación es lineal o reducible a lineal ($y = m\,x + h$; $a.x + by + c = 0$; $y = x^2 - a^2 / x - a$).

* *__por un gráfico cartesiano__* (f_{graf}), en este caso basta observar el ***graf f***:

↳si es una *recta*, *semirrecta* o *segmento de recta* $\Rightarrow$ $v = cte$ $\Rightarrow$ f lineal

↳si no es una *recta*, *semirrecta* o *segmento recta* $\Rightarrow$ $v \neq cte$ $\Rightarrow$ f no lineal.

* *__por una tabla de valores__* (f_{num}); en este caso podemos:

↳ obtener f_{graf} (con un utilitario) y concluir según sea (o no) una recta; ó

↳ proceder al análisis del *cociente de incrementos*.

Una forma de hacer esto último es a través de los siguientes pasos:

1ro) agregar ***dos columnas*** a la tabla y registrar en ellas los *incrementos* Δx_i y Δy_i correspondientes a ***dos puntos consecutivos*** de la misma: $P_{i-1}(x_{i-1};\, y_{i-1})$, $P_i(x_i;\, y_i)$. ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$)

2do) agregar otra columna y registrar el ***cociente de los incrementos***: $\Delta y_i / \Delta x_i$.

	x	y	Δx_i	Δy_i	$\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$
P_1	x_1	y_1	------------	--------	-----
P_2	x_2	y_2	$\Delta x_2 = x_2 - x_1$	$\Delta y_2 = y_2 - y_1$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
P_{i-1}	x_{i-1}	y_{i-1}			
P_i	x_i	y_i	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
P_n	x_n	y_n	$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$	$\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$	

3ro) ***Observar y concluir:***

➲ Si $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ cte $\Rightarrow$ f no lineal $\Rightarrow$ ¿ f ? → *__próximos talleres__*

➲ Si $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$ cte $\Rightarrow$ f lineal (→ *__buscamos la ecuación__*)

Resolución: ***determinación de "la ecuación" que define una función lineal en el caso que el dato sea una "f_{graf}" ó "f_{num}". (Tabla de Valores)***

ⓘ Detectado un *´patrón´* en la formación de las imágenes e identificado el ***tipo de función*** al que remite, el siguiente paso es dar la ley de ***f*** con fórmula $y = f(x)$.
Para ello se procede a:

i) ***proponer*** la ecuación prototipo asociada a la función tipo ***reconocida***.
ii) ***determinar*** (a partir de los datos) el valor que, en particular y para el caso, corresponde a los parámetros en la ecuación prototipo propuesta en (i).
iii) ***reemplazar*** los parámetros por los valores hallados, dar la ***ecuación de f***.
iv) ***evaluar*** si la ***función*** obtenida proporciona un ***buen ajuste*** de los ptos/dato
- ***Si*** → **FIN**.
- ***No*** → Revisar, repetir la experiencia ó, acudir a otro método.

En el caso particular de la lineal conviene acudir a la ***ecuación punto-pendiente:***

$$f(x) = m\,.(x - a) + b$$

En esta ecuación, el único parámetro a determinar es ***m*** , ***pendiente de la recta*** o ***velocidad del proceso*** que modeliza la función hallada. **Q(*a; b*),** es un ***punto de paso de la recta,*** luego lo tomamos de la tabla. (buscamos el que más conveniente al caso).

- ***m = pendiente de recta*** ó ***m = v (velocidad)*** → $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Finalmente, para dar la ***función***, se determina e informa el ***Dominio natural de f .***

Observación

El *´aspecto´* de la ecuación final depende de que **Q** sea o no el origen **O(0;0).**

- **Q ≠ O** (0; 0) ; $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{ec.\ pto-pendiente} y = m\ (x - a) + b$.
- **Q = O**(0; 0) ; $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{ec.uación} y = m\ x$

- **Q ≠ O** (0; 0) ; $(y-b)/(x-a) = m \Rightarrow$ ***x- a*** e ***y-b* :** ***Directamente Proporcionales***
- **Q = O**(0; 0) ; $y/x = m \Rightarrow$ ***x*** e ***y* :** ***Directamente Proporcionales***

b) *Analizar la "razonabilidad" de la solución hallada.*
Analizar si la ***f*** hallada representa apropiadamente el proceso, particularmente si se *´ajusta´* al mismo en forma conveniente a los propósitos perseguidos.

Así podemos:
- *verificar* que se cumplen condiciones iniciales u otros datos del problema.
- *hacer un análisis dimensional*; controlar, en el caso de un resultado numérico, que el signo sea compatible con la magnitud a que refiere.
- *graficar*, observar si el gráfico se "*ajusta*" a la nube de *puntos dato*; etc.

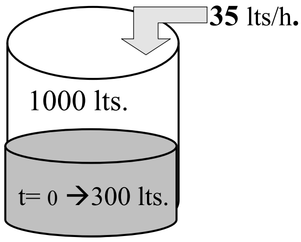
c) *Escribir la respuesta en oración, en forma destacada y precisa.*

d) *Hacer reflexiones de orden " metacognitivo"* .

Ejemplo : *llenado de un tanque a velocidad constante*

Deseamos llenar de agua un tanque cuya capacidad es de 1000 lts. y en el que inicialmente hay 300 lts. de agua. Para ello, a las 12 hs. (mediodía) abrimos una canilla que da al tanque y de la cual sale agua a razón de 35 lts/h.
Como tememos un corte en el suministro de agua deseamos disponer de una forma efectiva de calcular la cantidad de agua en el tanque en cualquier instante, para, producido el corte, poder estimar rápidamente la cantidad de agua en el mismo en el momento preciso en que se interrumpe el suministro de agua.

Reconocimiento de la situación.



- t = tiempo ; $t > 0$; $[t]$ = hs.
- V = volumen ; $V > 0$ $[V]$ = lts.
- t_o = instante inicial → $\mathbf{t_o = 0}$ ↔ 12 hs.
- V_o = volumen inicial → $V_o = 300$
  (vol en $t_o = 0$)
- v_e = velocidad de entrada → $v_e = 35$
- V_T = volumen total → $V_T = 1000$

► *Incógnita*: f / $V = f(t)$ $\Rightarrow$ v.d. = V ; v.i.= **t**.

Reconocimiento de f: v_e = cte (35 lts/h) $\Rightarrow$ f función lineal $\Rightarrow$ $\mathbf{f(t) = m\,t + h}$ **(*)**

ley de f : $m = v_e$; por dato: $v_e = 35$ $\Rightarrow$ $\mathbf{m = 35}$
$\mathbf{h} = f(0)$; por dato: $f(0) = V_o = 300$ $\Rightarrow$ $\mathbf{h = 300}$

Reemplazando en (*): $\mathbf{f(t) = 35.\,t + 300}$

Conclusión : $\underbrace{V = f(t) \quad \text{con} \quad f(t) = 35.\,t + 300}$

$$\mathbf{V = 35.\,t + 300}$$

Df = ***dominio natural de f*** : No existen restricciones algebraicas; sí existen restricciones debidas a las variables y al modelo, pues :

$t \geq 0$; $V_o = 300$; $V_T = 1000$. $\Rightarrow 300 \leq \mathbf{V} \leq 1000$
$\Rightarrow 300 \leq \mathbf{35\,t + 300} \leq 1000$
$\Rightarrow 0 \leq \mathbf{t} \leq 20$

Conclusión: $\mathbf{Df = [\,0\,;\,20]}$ (si no se interrumpe el suministro de agua)

Rta : durante ***20*** hs. a partir de las ***12 hs***. del mediodía y si no hay problemas, la expresión que permite calcular el volumen de agua en el tanque es: $\mathbf{V = 35.\,t + 300.}$

Observación: para *calcular* la cantidad de agua en el tanque a cierta hora habrá que tener en cuenta que **t** no representa "*la hora reloj*" sino el tiempo transcurrido desde que se inició el proceso (12hs.): $\mathbf{t_o = 0}$ ↔ ***12 hs.*** Así y por ejemplo:
*¿cuánta agua habrá a las 15 hs.?: ***12 hs***. ↔ $\mathbf{t_o = 0}$ ⇨ ***15 hs.*** ↔ $\mathbf{t = 3}$ ➲ $\mathbf{V = 405}$ ***ls.***
*¿a que hora se llena el tanque?: $\mathbf{V = 1000}$ ⇔ $\mathbf{t = 20}$ ➲ ***8 hs. del día siguiente***.

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. **a.** Dada $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ verificar que: "*f* ***función lineal*** $\Leftrightarrow \dfrac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \boldsymbol{cte}$ ".

b. Si la presión **P** de una masa de gas en función del tiempo viene dado por **P** = ***2*** t + ***5*** , expresar en una oración qué informan los coeficientes.

c. Si el volumen de agua **V** en función del tiempo viene dado por **V = *- 2*** t + ***5***, expresar en una oración qué informan los coeficientes, en este caso.

d. Indicar **V** ó **F** : "si la rapidez con que varía un cierto volumen **V** es de 5 lts./h entonces **V** *aumenta* a razón de 5 litros por hora".

2. Se desea llenar de agua un tanque cilíndrico cuya capacidad es de 580 lts. y en el que inicialmente hay 100 lts. de agua. Sabiendo que se comienza a llenar a las 12 hs.del lunes (mediodía) y que el agua entra al tanque a razón de 10 lts/h, se pide:

a. Hallar la función que representa el volumen de agua en el tanque en función del tiempo, hasta el instante en que el tanque se llena. Graficarla y responder:
(i) a las 12 hs. del mediodía del martes: ¿cuánta agua hay en el tanque?; ¿cuánta agua *entró* hasta ese momento?.
(ii) ¿que día y a qué hora el tanque queda *lleno* (alcanza los 580 ls)?.

b. En el caso que las condiciones se mantengan, hallar la función que describe el volumen de agua en el tanque en función del tiempo *para cualquier instante "t" posterior al momento en que empieza a entrar agua*. Graficarla. Si la canilla se deja abierta 3 días completos;
(i)¿cuánta agua hay en el tanque?, (ii) ¿se desperdicia agua?; (iii) ¿cuánta?.

3. En un tanque cilíndrico inicialmente hay 1000 lts de agua. Hallar el volumen de agua en el tanque en función del tiempo a partir de las 12 hs. si se sabe que a esa hora el tanque se rompe y comienza a perder agua a razón de 50 lts./h. Graficar la función. ¿ A qué *hora* se vacía?.

4. **a)** En un tanque cilíndrico cuya capacidad es de **3000** lts. inicialmente hay **300** lts. de agua. Justo al mediodía del lunes se abre una canilla y comienza a entrar agua en el tanque a razón de 50 lts/h. Luego de transcurrida 24 hs., se cierra la canilla. Luego de otro día completo en el que no entra ni sale agua, el tanque se rompe y comienza a perder agua a razón de 75 lts./h. Se pide:
Hallar el volumen en función del tiempo a partir del momento en que se abre la canilla y hasta el instante en que el tanque queda vacío. *Graficar la función*.
* Indicar *día y hora* en que el tanque queda vacío; *día y hora* en que V= 400.

b) Idem que en (a), pero con un tanque cuya capacidad es de **1300** lts.

5. *Presión, Volumen y Temperatura son tres parámetros que definen el estado de una masa gaseosa. Para hallar la relación que los vincula (ecuación de estado) se comienza por el caso más simple, por ejemplo, se deja fijo uno de lo parámetros y se estudia la relación entre lo otros dos. Si se trabaja con un recipiente deformable se puede mantener constante la presión y estudiar la relación entre Volumen y Temperatura.* (0 Kelvin $\leftrightarrow$ t = -273.9 ºC)

Dos alumnos A_1 y A_2 tienen como tarea investigar la expansión a *presión constante* de un *mismo gas*. Para ello parten de un cierto volumen de gas y lo someten a distintas temperaturas manteniendo la presión constante; realizan las mediciones de los volúmenes correspondientes a cada temperatura, guardan registro de ellas.
Los volúmenes registrados en cada caso se muestran en las tablas a continuación.

	t (ºC)	0	50	100	150	200	250	300
A_1	**V_1**(cm^3)	V_{o1}..........	23.65	27.30	30.95	34.60	38.25	41.90
A_2	**V_2**(cm^3)	V_{o2}..........	47.30	54.60	62.00	69.20	76.50	83.80

a. A partir de la *función numérica* obtenida por los alumnos, y aceptando que las variaciones se dan con ´continuidad´ y de ´igual forma´ en todo el rango investigado, hallar una fórmula para $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ siendo $V_1 = \boldsymbol{f}(t)$ y $V_2 = \boldsymbol{g}(t)$. Luego, hallar en cada caso la temperatura en que V= 0.
Si además de los datos de la tabla sabemos que como máximo y sin variar la presión los recipientes pueden contener 100 cm^3, hallar las *funciones* $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ que describen el proceso de expansión.

b. **R**ealizar, de ser posible y con los datos del item (a), las siguientes interpolaciones y extrapolaciones: t = - 30 ºC → V_1 =.......... ; V_2 = ...
t = 180 ºC → V_1 =.......... ; V_2 = ...
t = 500 ºC → V_1 =.......... ; V_2 = ...

c. Graficar las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$. Hacer esto en una hoja de cálculo de Excel.

d. A partir de la comparación de ambas experiencias, indicar V ó F justificando (*matemáticamente*) la respuesta.

* $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ tienen la misma ordenada al origen
.* El ***graf f*** y el ***graf g*** son rectas paralelas.
* Si la temperatura aumenta el volumen aumenta.
* V es *directamente proporcional* a t.
* La *variación de volumen* ($\Delta V = V - V_o$) *es directamente proporcional* a t.
* La *variación de volumen* por grado de temperatura es la misma para A_1 y A_2.
* la *variación de volumen* por grado de temperatura y por *unidad de volumen* es la misma para ambas experiencias. (o sea que: $\frac{V - V_o}{t \cdot V_o} = \frac{m}{V_o}$ = cte)
* $\boldsymbol{m}$ (pendiente) es directamente proporcional a V_o
* En cualquier caso la ley que vincula V y t es: $V = V_o + V_o . \alpha . t$ (α = *cte*).

<u>Nota:</u> "α" se llama "*coeficiente de dilatación del gas, a presión cte*" ; representa la variación de volumen por *grado de temperatura* y *unidad de volumen* .
Experimentalmente se observa que para un "*gas ideal*" (hidrógeno, nitrógeno, aire) este coeficiente es siempre igual, independiente del gas, de la presión, la temperatura o el volumen del que se parta, $\alpha \cong 3{,}665\ 10^{-3}$ (con pequeñas diferencias según el gas).

$V = V_o + V_o . \alpha . t$; se conoce como ley de GAY-LUSSAC para un gas ideal.

6. a) Dar una ley para hallar el volumen, V, en función de la temperatura, t, si se sabe que el gas es un *gas ideal* y que a 0ºC hay 50 cm^3 de gas.

b) Admitiendo que el gas del item (a) sigue cumpliendo la ley de GAY-LUSSAC hasta t* = **-** 273ºC, hallar el volumen de gas para t = t*.

c) Hallar el volumen de gas para t = t*, para cualquier gas ideal.

d) Expresar α (*coeficiente de dilatación*) en función de | t* |.

e) Completar: "un gas ideal a P = cte , dilata a razón de .... cm^3 por ...."

Nota: t* = ***CERO ABSOLUTO***. La temperatura determinada a partir de este cero se llama ***TEMPERATURA ABSOLUTA.*** (**T**) y se tiene que: **t = T**- 273

7. a) Mostrar que si $\mathbf{V} = \boldsymbol{f}(t)$ con $\boldsymbol{f}(t) = V_o + V_o.\alpha.t$, y $\mathbf{t} = \boldsymbol{g}(\mathbf{T})$ con $\boldsymbol{g}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$-273; entonces $V = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ expresa la ley de GAY-LUSSAC en Temperatura Absoluta. (la cual dice que **V** y **T** son directamente proporcionales).

b) Graficar $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ en un mismo sistema V-**T** para los siguientes V_o (=$\boldsymbol{f}$(0)) ; usar ***Excel*** → (i) V_o = 20 cm^3 ; (ii) V_o = 40 cm^3 ; (iii) V_o = 60 cm^3

c) Indicar V ó F , justificando la respuesta:
- * α (coef. de dilatación) es la constante de proporcionalidad entre V y **T**.
- * la pendiente de la recta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{graf}.(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$, es directamente proporcional al volumen del gas a 0ºC (V_o) .

8. Sea $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)$, [$\boldsymbol{x}$] = *mts* , [t]= *seg.* ; la ***función de posición*** de una partícula **P** que se mueve sobre un eje horizontal según las siguientes leyes:

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{cases} f_1(t) = t + 6 & ; \quad 0 \le t < 2 \\ f_2(t) = 8 & ; \quad 2 \le t < 5 \\ f_3(t) = -2t + 18 & ; \quad 5 \le t \le 12 \end{cases}$$

a. Leer la definición de ***función de posición*** [❷- Anexo VII].
b. Marcar sobre el eje del movimiento la posición de **P** para **t** = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4; 5 ; 5.5 ; 6; 7 ; 9 ; 10 ; 12 .
c. Graficar la trayectoria seguida por P en los 12 seg. en que se desplaza sobre la recta según $\boldsymbol{f}$.
d. Explicar, para cada una de las leyes que definen $\boldsymbol{f}$, qué información brindan (respecto al desplazamiento de **P**) los coeficientes de la variable independiente. Indicar el intervalo de tiempo donde la *rapidez* fue mayor.
e. Graficar $\boldsymbol{x}$ versus t en un sistema cartesiano ortogonal.

9. Encontrar la temperatura en la que los grados Celsius (C) y Fahrenheit (F) son iguales si se sabe que ambas temperaturas están relacionadas por la siguiente función: **C = 5/9 . (F-32)**.
Diseñar una estrategia para hacer esto usando Excel y para, aprovechando las facilidades que ofrece este utilitario, ver que pasa si en vez de operar con 5/9, operamos con sucesivas aproximaciones de este número: 0,5 ; 0,55 ; 0,555 .... .

10. Disponemos en forma ***numérica*** de la ley de cinco funciones identificadas con f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 . Los datos provienen del análisis al que sometimos a *cinco* compuestos que encontramos hoy sobre la mesada del laboratorio cuando ayer habíamos dejado solo *uno* (**XX**), aquél con el que íbamos a trabajar hoy. Por desgracia todos los compuestos estaban guardados en recipientes iguales y sin etiqueta. Por suerte sabíamos que **XX**, bajo ciertas condiciones, tiene la particularidad de evaporarse de modo que *la cantidad de compuesto evaporado* en una hora es siempre la misma, independientemente de la cantidad que haya en el frasco. Así, para decidir en que frasco está **XX**, durante cierto tiempo y a intervalos regulares de tiempo (Δt =cte) sometimos todos los compuestos a las condiciones en que **XX** se evapora, registramos que pasaba en cada caso. A continuación, te damos los resultados obtenidos para cada frasco; te pedimos que analices los mismos, nos digas en que frascos estaría el compuesto **XX**. Te sugerimos que para el *análisis numérico* de las tablas, construyas los respectivos gráficos de f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 ; te apoyes en ellos.

t	2	4	6	8	10
$x = f_1(t)$	*45*	*42*	*40*	*39*	*38.5*

t	1	2	3	4	5
$x = f_2(t)$	*50*	*25*	*12,5*	*6,25*	*3,125*

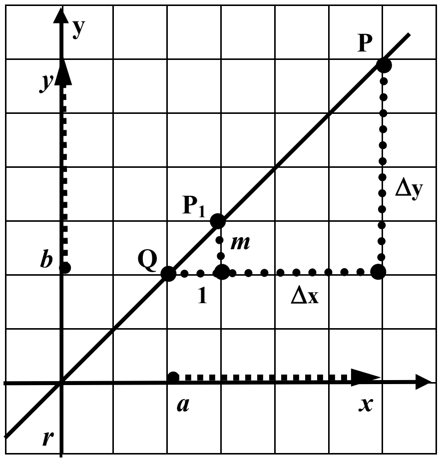
t	1	2	3	4	5
$x = f_3(t)$	*50*	*25*	*16,66*	*12,50*	*10*

t	2	4	6	8	10
$x = f_4(t)$	*45*	*35*	*25*	*15*	*5*

t	2	4	6	8	10
$x = f_5(t)$	*50*	*37,5*	*25*	*12,5*	*0*

ANEXO VII

❶ *Función lineal. La pendiente como razón de cambio*



Trabajamos con ***r*** no paralela al eje *y.*

Si sobre el *eje x* pasamos de ***a*** a ***x*** entonces sobre ***r*** pasamos de **Q** a **P** y sobre el *eje y,* de ***b*** a ***y*** (nos elevamos una distancia ***y – b*** respecto de **Q**).

Luego, podemos decir que:
para un *"recorrido"* de ***x - a*** tenemos una *"elevación"* de ***y - b***.

* Tradicionalmente usamos la letra Δ para indicar *variaciones* ó *incrementos;* así, y a partir de ahora:

$$x - a = \Delta x \quad ; \quad y - b = \Delta y$$

Si sobre ***r*** tomamos un punto *fijo* **Q** (*a;b*) y otro *variable* **P**(x;y) es fácil ver que al variar **P** los triángulos determinados en cada caso por Δx, Δy y $\overline{QP}$ son semejantes; que, como consecuencia de ello, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = cte$ cualquiera sea **P** en **r**.

Luego, a cada ***r*** le podemos asociar un número real y viceversa; o sea, existe una correspondencia biunívoca entre rectas y nros reales: $r \xleftrightarrow{1\ a\ 1}$ ***nro real*** $\left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

En particular, si $\Delta x = 1$ y $\Delta y = m$, tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$; $r \xleftrightarrow{1\ a\ 1} m \in \mathbf{R}$

¿Qué *"dice"* de la recta este número real ***m*** asociado a ella? . Nos informa que, "***r*** se eleva (o cae) ***m unidades*** cada vez que ***x*** se incrementa en ***una unidad*** ".

O sea, da idea acerca de ***la inclinación de la recta***. En función de ello, ***definimos***:

pendiente de la recta r [***r*** no vertical]	Llamamos ***pendiente de r*** al valor constante ***m*** que resulta asociado a ***r*** a través del cociente de incrementos obtenido a partir de **P**(x; y) y **Q** (*a; b*), dos puntos distintos y cualesquiera de ***r*** . $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - b}{x - a} = \frac{[\text{"elevación"}]}{[\text{"recorrido"}]}$$

La ***recta*** pasa la prueba de la "recta vertical" de modo que ***define función, f*** .
A ***f*** le damos el nombre de ***función lineal.***

Buscamos una fórmula ó ecuación para la ley de f → ***¿ f (x) = ... ?***

$$y = f(x) \ ; \ \underline{f \text{ lineal}} \ \Leftrightarrow \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-b}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m \ \Leftrightarrow \ \Delta y = m \,.\, \Delta x$$

$$\Leftrightarrow \ f(x) - f(a) = m \,.\, (x-a) \ \Leftrightarrow \ \underline{f(x) = m \,.\, (x-a) + f(a)}$$

Si trabajamos algebraicamente esta expresión obtenemos una forma más simple de la ecuación, aquella con la que habitualmente identificamos a la lineal.

$$f(x) = m \,.\, (x-a) + f(a) = m \,.\, x \overbrace{- m\, a + f(a)}^{= h} = m \,.\, x + h$$

Resumiendo, tenemos dos ecuaciones para representar una función lineal.

"*ecuación explícita*":	$f(x) = m \,.\, x + h$	; $m, h \in \mathbf{R}$
"*ecuación punto-pendiente*":	$f(x) = m \,.(x-a) + b$	; $Q(a; b) \in r = \text{graf} f$

CONCLUSIONES GENERALES:

1) El parámetro ***m*** (presente en cualquiera de las fórmulas posibles para ***f***), informa:

➻ ***geométricamente***:
la *pendiente* de la recta gráfica de ***f*** ; o sea, si ***r*** se eleva , cae o permanece cte. Si se *eleva* (o *cae*) informa cuan *empinada es la subida* (o *pronunciada la caída*)

➻ ***físicamente***: "***cuanto varía y*** (***v.d.***) ***por cada cambio unitario en x*** (***v.i.***)". O sea, informa sobre la ***razón de cambio*** en ***y*** respecto a ***x*** ; ó , equivalentemente, sobre la ***velocidad*** (***v***) a la que varía ***y*** respecto a ***x.*** Particularmente, *y lo más importante*, informa que ***v = cte*** .

2) La ***lineal*** es la ***única función*** para la cual el cociente de incrementos $\Delta y / \Delta x$ es ***constante***; o sea, independiente de los dos puntos que se tomen para calcularlo. Luego, esta particularidad es algo que ***caracteriza*** a la lineal; es decir, un rasgo o propiedad que la ***identifica*** y ***distingue*** del resto de las funciones.

> En el caso de problemas susceptible de ser resueltos con el auxilio de funciones es cuando más apreciamos la utilidad o necesidad de ciertos ***saberes***; en particular, ***conocer que es lo que caracteriza cada tipo de función.*** Reconocemos también la importancia de disponer de una batería de ***métodos, estrategias o procesos a los que someter sistemáticamente los parámetros, las variables o sus incrementos, al efecto de detectar algún patrón o comportamiento tendencial de las mismas.*** Cabe destacar que estos ***saberes procedimentales*** son necesarios y útiles para la toma de decisión en cualquier ámbito de la ciencia.

❷ *FUNCIÓN de POSICIÓN*

(de un objeto que se desplaza sobre una línea recta)

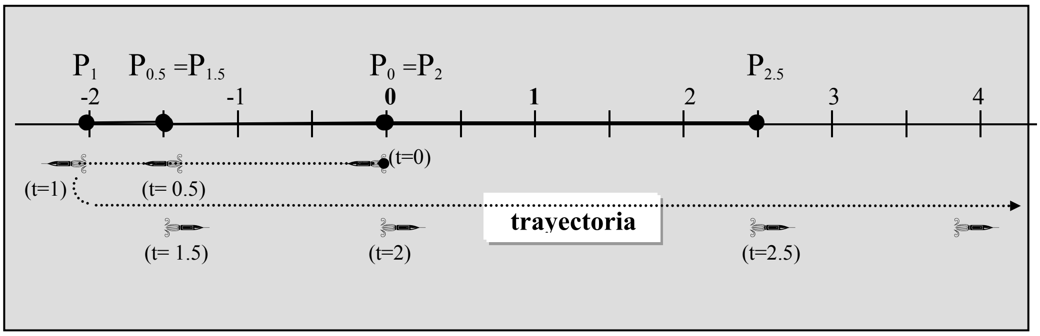
- El movimiento de un objeto que se desplaza en línea recta se puede expresar a través de ***una ecuación***, ***x* =*f* (t)**, donde ´***x***´ representa la ***posición*** del objeto móvil en cada instante ´**t**´ respecto de un punto fijo O que se toma como punto de referencia . *(*O: *origen de coordenadas en el sistema de referencia construido sobre la recta).*
- La función ***f*** se conoce como *función de posición* del objeto. Esta función proporciona una *descripción matemática* del movimiento, brinda tanto la posibilidad de calcular donde se encuentra el móvil en cada instante "t" como de establecer características o peculiaridades del movimiento con sólo analizar el comportamiento de ***f*** en distintos intervalos de tiempo
- En la ecuación correspondiente a una *función de posición,* ´**t**´ es tiempo y ´***x***´ un valor que informa acerca de la *posición* del móvil, en el instante ´**t**´. Pero, ¿qué entendemos por *posición*?. A partir de ahora convenimos en usar la palabra *posición* para referirnos a "*la coordenada del punto P alcanzado por el objeto móvil, sobre su recta de acción, en el instante* t ".

O sea que para ***x*** = ***f*** (t) , si ***f*** es una *función de posición*, tenemos que:

[v.i.] → t = tiempo
[v.d.] → ***x*** = coordenada del punto P alcanzado por el móvil s/r, en el instante t.
x* = *medida con signo de $\overline{\mathbf{OP}}$. (por definición de coordenada).

Ejemplo: Sea ***x***(t) = 2 t² – 4t la *función de posición* de una partícula que se mueve sobre un eje horizontal. Si calculamos ***x***, posición de la partícula para distintos tiempos y marcamos los correspondientes puntos **P**(***x***) sobre ***el eje del movimiento*** (acotando en cada caso el tiempo en que alcanza el punto), podemos hacernos una idea de la ***trayectoria*** seguida por la partícula según y acorde a la función de posición que rige el movimiento.

t	**0**	0.5	1	1.5	**2**	2.5	3	(seg)
$x = 2\,t^2 - 4\,t$	**0**	**-1.5**	**-2**	**-1.5**	**0**	**2.5**	**6**	(m)
	P_o	$P_{0.5}$	P_1	$P_{1.5}$	P_2	$P_{2.5}$	P_{23}	



ANEXO VIII

Modelos y modelos matemáticos

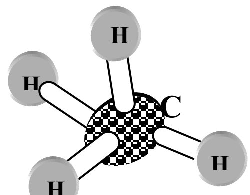
Modelo*:* cualquier construcción que sea una *representación* de un hecho u objeto.

☞ los juguetes muchas veces son “modelo” de objetos que usan los adultos. Así, en aeromodelismo se construyen aviones a escala, los cuales son un “modelo” de los reales. Es importante destacar que aún cuando estos modelos están muy lejos de ser aviones, nadie duda en reconocerlos como tal. Tampoco se confunde el modelo con el avión; cosa que no pasa cuando el modelo es un modelo matemático. En este caso es muy frecuente que el “modelo” y el objeto real se confundan uno con otro.

☞ un mapa de rutas es un “modelo” del sistema de rutas. Nadie duda que es más fácil y económico decidir una ruta “analizando” un mapa que recorriendo con un auto todas las rutas posibles (aunque haya muchos detalles que el mapa no refleja con exactitud). Hasta que punto se incluyen en el mapa rutas secundarias, de tierra, accidentes geográficos u otros detalles, lo decide el que confecciona el mapa (*modelo*) según el uso que quiera hacer del mismo y los “costos” que su confección le demande.

☞ animales como monos o ratas son usados como “modelo” de seres humanos para la prueba de medicamentos o drogas. Es decir, el campo de la salud es un campo donde el concepto de modelo es especialmente útil dado el “costo” que experimentar con humanos puede tener; en el se juegan, *la salud y la vida del hombre*. Así, en este campo, resulta de vital importancia la *´forma como formamos´*; particularmente que esta *´forma´* permita al alumno *asimilar significativamente* el concepto de modelo. Esto hará que no confunda el modelo (rata, mono) con el objeto que representa (el hombre). Esto, que parece obvio así expuesto, no lo es tanto en los hechos. Desastres a nivel mundial, como por ejemplo el histórico caso de la “thalidomida”, dan cuenta que a la hora de transferir los resultados obtenidos con el modelo, al objeto real, esta “sutil” diferencia se ignora.

☞ en química es común el uso de esferas y delgadas cánulas para construir “modelos” de complicadas moléculas. Las esferas representan átomos y las cánulas el enlace entre dos átomos. Sin dudas, los átomos no lucen como esferas y menos aún los enlaces como cánulas, sin embargo estas construcciones, para muchas aplicaciones, son un modelo aceptablemente bueno de la molécula.



metano

☞ Finalmente tenemos los modelos que nos interesan: ***los matemáticos***.

Previo a verlos resumimos lo más importantes en relación a los modelos en general:

- Todo modelo *difiere* en forma sustancial del objeto, proceso o fenómeno que representa.
- Todo modelo es una *simplificación* de la situación original (por claridad, tiempos o algún tipo de economía hay cosas que se dejan fuera). Así, un modelo es una *idealización*.
- Un modelo debe dar idea de aquello que representa (hay *límites para la simplificación*)
- Un mismo problema admite distintas modelizaciones.
- Un mismo modelo puede servir para distintos problemas.
- Un modelo permite investigar el *objeto real* en forma simple, con economía de tiempo y dinero. A veces es la única forma posible de realizar estas investigaciones. En este último caso se puede acudir a la *simulación de procesos*, método que se potenció las últimas décadas, con la aparición de las PC.

***Modelo Matemático**:*

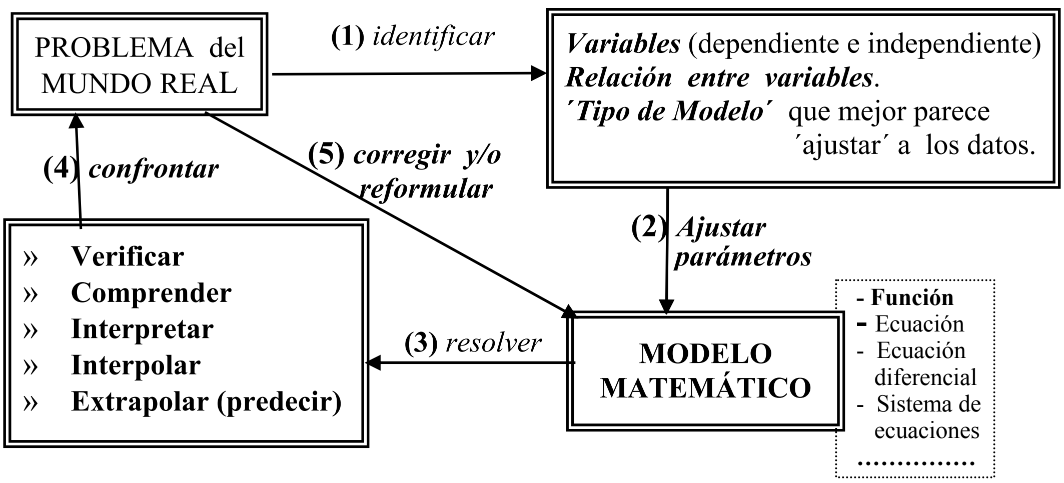
Es la *representación* de un hecho o fenómeno por medio de *funciones*, ecuaciones, sistema de ecuaciones, ecuaciones diferenciales, diagramas, gráficos...., etc; en definitiva, por cualquier expresión u objeto matemático que convenga al caso. Su finalidad es *comprender* o *explicar* el fenómeno, interpolar o extrapolar resultados, poder hacer predicciones a futuro. Las simplificaciones que se hacen en este caso tienen generalmente por objetivo que el mismo sea, "*matemáticamente resoluble*".
Tenemos dos formas de proceder para construir un modelo matemático:

- por medio de la búsqueda y planteo de alguna regla o ley ya *conocida* (física, biológica, ...), la posterior manipulación algebraica de la misma hasta obtener la expresión o relación buscada; ó,
- por medio de un proceso usualmente conocido como, ***Modelo Empírico***

Modelo Empírico: hablamos de modelo empírico cuando para obtener la *representación matemática* del fenómeno o proceso del caso, debemos acudir a la *observación o experimentación* del mismo.
O sea, es un modelo matemático basado en la *obtención y registro metódico de datos* (a través de la observación o repetición de un hecho); la posterior búsqueda de un *patrón de comportamiento* para la *nube de puntos* así obtenida.

Si el fenómeno en estudio presenta *dos magnitudes variables* e *interrelacionadas*, el paso que sigue a la *´experimentación´* es la búsqueda de una ***función*** que ***represente***, lo mejor posible, la relación de dependencia entre ambas variables. Existen distintos métodos para la búsqueda de esta función muchos de los cuales requieren identificar, de partida, el *tipo de función* que mejor se *´ajusta´* al caso. Reconocido el tipo de función, se escribe la función prototipo que le corresponde y se ´ajusta´ el valor de los parámetros con el método que más convenga. Obtenido el modelo (la función), se verifica la *bondad* del mismo; es decir, se confrontan modelo y fenómeno real, se concluye si el modelo lo *representa* de manera apropiada o conveniente al propósito perseguido con el mismo.

El siguiente cuadro resume el proceso descripto.



(1) ***Identificar el tipo de modelo (función)***: es un paso muy difícil, el que más requiere del trabajo interdisciplinario. Establecer el "tipo de modelo" (***función***) que mejor ajusta los datos requiere acudir tanto a conocimientos matemáticos como a habilidades de orden más general.

El ordenamiento y forma de análisis de los datos, es otra cuestión delicada a decidir en esta instancia. Existen formas de ordenarlos que hacen "visible" el comportamiento de la nube de puntos y otras que lo "ocultan" o "confunden".

¿Qué observaciones, conocimientos o procedimientos, posibilitan reconocer un *patrón o regularidad* en el comportamiento de la *nube de puntos/dato*; identificar luego el *tipo de función* que presenta un comportamiento similar a dicha nube de puntos?. A esto ayuda:

- Proceder con método y acorde a un plan.

- Conocer aquello que, en esencia, *caracteriza a cada clase de función*; o sea, la *función prototipo* que la representa, significado geométrico y físico de los parámetros en dicha función, *curva prototipo* asociada a la misma, el *carácter* de la relación entre variable dependiente e independiente, entre los incrementos de las variables, entre variables e incrementos; en definitiva y resumiendo, conocer el *comportamiento* típico de las funciones de cada clase. Dominar esto es lo que permite identificar rápidamente, en forma casi *´instintiva´*, que función subyace detrás de un conjunto de datos que presentan un *patrón de comportamiento* fácilmente detectable.

TALLER 7

OBJETIVO: *Función Polinómica.*

El objetivo general del taller es estudiar en profundidad la *clase* o *familia* de las funciones polinómicas, con énfasis en la subclase de las cuadráticas. El logro de este objetivo, según lo establecido, se propone a partir del estudio en profundidad de la ***función prototipo*** de la respectiva clase y se implementa a través de la ***resolución de problemas*** que involucren polinomios.

Requisitos para el abordaje del taller: el objetivo de este taller son los polinomios; luego, las actividades planteadas demandan el conocimiento y dominio de este tipo de función (ver ➊- **Anexo IX**); en particular, el de la o las ***funciones prototipos*** con que podemos representar un polinomio.

➻ ***función prototipo:***

* ***polinomio grado n***: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_2 x^2 + a_1 x + a_o$

$p(x) = a_n .(x - x_n). (x - x_{n-1}) \cdots\cdots (x - x_2). (x - x_1)$

* ***cuadrática***: $c(x) = a x^2 + b x + c$, $a ; b ; c \in \mathbf{R}$; $a \neq 0$

$c(x) = a .(x - x_1). (x - x_2)$, $a ; x_1 ; x_2 \in \mathbf{R}$; $a \neq 0$

$c(x) = a (x - h)^2 + k$. $a ; h ; k \in \mathbf{R}$; $a \neq 0$

⏭ PLAN DE ATAQUE (*creciente*): *Modelización a través de funciones.*

I-II) ***Reconocimiento de la situación***: para reconocer el *tipo de problema*, si estamos ante uno que requiere acudir a la modelización matemática, procedemos detectar la existencia de "*al menos dos magnitudes variables relacionadas entre sí".* Luego, como en cualquier problema, debemos:

- *reconocer variables*: dependiente (***v.d.***) e independiente (***v.i.***).
- *etiquetar* y *describir* estas variables
- explicitar la *incógnita*.
- resumir todo otro *dato* o *información* útil a la resolución del problema.

III) ***Planificación (de un proceso para reconocer "funciones prototipo")***

- realizar figuras, esquemas o gráficos que ayuden a reconocer las variables (***v.d.*** y ***v.i.***); fundamentalmente, el *´tipo de relación´* que las vincula.
- revisar la existencia de leyes o formulaciones "*conocidas*" y relativas al proceso motivo o causa del problema.
- de no conocer ninguna ley relativa al proceso, proceder a buscar una función que lo modelice. Para ello trabajar por *´prueba y error´*; es decir probando y descartando *´funciones tipo´*, en forma metódica, hasta llegar a la que mejor *´ajuste´* a los datos.

Si el proceso no es periódico, un orden tentativo para probar funciones es:

(1) lineal (*directa proporcionalidad*), ☑ (Taller 6)

(2) polinómicas (*cuadrática*), ☐ (estamos aquí)

(3) recíprocas (*inversa proporcionalidad*), ☐

(4) exponenciales (o sus inversas, las *logarítmicas*). ☐

En lo que sigue indicamos con x a la ***v.i.***, con y a la ***v.d.***; en el caso concreto, usar las letras *´propuestas en el paso I-II del Plan de Ataque´*

IV) <u>*Ejecución del plan:*</u> *análisis de la situación al efecto de determinar el tipo de función que modeliza el proceso.*

• <u>***Ley de f .***</u> (*por prueba y error, comenzando con la lineal*).

(1) ***f : ¿lineal ?*** → ¿ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = cte ***?*** : $\begin{cases} \textbf{SI .} & [\text{🛠} \rightarrow \text{Taller 6 }]. \\ \textbf{NO.} & [\,¿f? \rightarrow (2)\,]. \end{cases}$

(2) ***f : ¿polinómica grado*** > **1?**: este análisis depende de la forma en que esté dada ***f.***

➢ <u>*por una ecuación*</u>, basta detectar si la ecuación tiene la forma prototípica de una una polinomial (desarrollada ó fatorizada – ver **ANEXO IX**).

➢ <u>*por un gráfico cartesiano*</u>: o sea por una f_{graf}

se analiza la curva dato, si esta presenta los rasgos característicos de una *curva polinomial prototípica* (ver ejercicio 1). Si así fuera podemos *suponer* pero *no afirmar* que la curva corresponde a una polinomial (evidencia gráfica *no es prueba del hecho*).

* En el ***taller 11*** tratamos esta cuestión; o sea: identificación de curvas; obtención de la ley de ***f*** con fórmula $y = f(x)$ para funciones dadas por un gráfico cartesiano. (f_{graf})

➢ <u>por una tabla de valores</u>: o sea por una f_{num} . (caso a tratar en el ***taller 10***) .

• <u>***Dominio natural de f***</u>**:** una vez hallada la ley de la función debemos establecer en forma clara y precisa el rango de validez de la misma (su *dominio natural*).

Para terminar, ejecutamos los pasos finales de la guía de resolución de problemas:

• <u>*Análizamos la "razonabilidad" de la solución hallada.*</u>

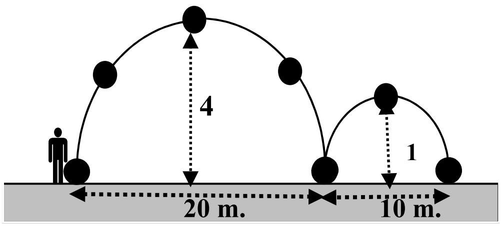
• <u>*Escribimos la respuesta en oración, en forma destacada y precisa.*</u>

• <u>*Hacemos reflexiones de orden " metacognitivo"*</u> .

Ejemplo : *"parábola de tiro"*

Gaspar, en una tarde de práctica, patea un tiro al arco. La pelota, antes de detenerse, describe dos parábolas de tiro, tal como se muestra en el gráfico adjunto.

Respecto del tiro de Gaspar se pide dar una ***función*** que modelice el movimiento de la pelota desde que Gaspar la tira hasta que se detiene; es decir, una ***f*** tal que el ***gráfico de f*** sea una buena representación de la ***trayectoria*** de la pelota.



Reconocimiento de la situación.

Si observamos la ***trayectoria*** descripta por la pelota vemos que la misma se desarrolla en *dos dimensiones* ($\Rightarrow$ *curva plana*), que dicha curva pasa la prueba de la *recta vertical*; o sea, es gráfica de una ***´función real a variable real´***. En otras palabras, vemos que el problema tiene solución (existe ***f*** tal que la ***graf f*** coincide con la ***trayectoria***).

Resuelto esto debemos proceder ahora al reconocimiento de las ***variables*** (***v.i.*** y ***v.d.***).

Para ello recordamos que la ***trayectoria de un móvil*** y el ***gráfico de f*** (función relacionada al movimiento), no siempre coinciden, que esto depende de la *naturaleza* de ***f.*** En particular, si ***f*** es la ***función de posición*** de un móvil que se desplaza con ***movimiento rectilíneo*** entonces, ***trayectoria*** y ***graf f*** , ***no coinciden***. Concluimos así que ***f***, en este problema, ***no es la función de posición*** de la pelota; que debemos ***descartar al tiempo como una de las variables de f.***

¿Cuáles son las variables entonces?: teniendo en cuenta los datos del problema asumimos que estas son: ***altura*** y ***desplazamiento horizontal*** *de la pelota*.

O sea (e introduciendo un sistema de referencia donde el *eje x* sea el suelo y el *origen* el punto donde Gaspar patea la pelota), ***las coordenadas*** *de la pelota*.

Variables:
- ***x = desplazamiento horizontal*** ; $[x]$ = mts. ; $x \geq 0$
- ***y = desplazamiento vertical*** ; $[y]$ = mts. ; $y \geq 0$

Incógnita: $f \;/\; y = f(x)$; $x \to$ v.i. ; $y \to$ v.d.

Reconocimiento de f:

datos:
- ***gráf f = dos arcos de parábola, uno a continuación del otro.***
- ***y*** sujeta a distintas condiciones, según intervalo $\Rightarrow$ ***f*** *seccionalmente definida*
- *dos* arcos de parábola $\Rightarrow$ ***f*** consta de *dos leyes*.

$$f(x) = \begin{cases} p(x)\;; & 0 \leq x < x_{P1} \quad (\text{parábola } 1) \\ q(x)\;; & x_{P1} \leq x \leq x_{P2} \quad (\text{parábola } 2) \end{cases}$$

✍ ***ley de p*** (1er parábola)

Datos: altura máx. = 4 $\Rightarrow$ $y_{MAX} = 4$ $\Rightarrow$ $y_V = 4$ ➲ vértice: **V** $(x_V; 4)$
desplaz. horiz. máx.= 20 $\Rightarrow$ 0 y 20, ceros de la parábola ➲ **Dn*p* = [0 ; 20].**

- *tipo de función*: cuadrática .
- *gráfica* : parábola corrida con ´ramas hacia abajo´ → $a < 0$
- *método* (para obtener la ecuación de la parábola): de los puntos sobresalientes
  Datos: las raíces $\Rightarrow$ trabajamos con la ecuación *´factorizada´*.

$$p(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$
$$p(x) = a\,(x - 0)\,(x - 20)$$

x_1 y x_2 raíces del polinomio
$x_1 = 0$; $x_2 = x_{MAX} = 20$ (***dato***)

Vértice: $\mathbf{V}(x_v ; 4) \rightarrow x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = 10 \rightarrow \mathbf{V}(10; 4)$

$$\mathbf{V}(10; 4) \rightarrow p(10) = 4 \rightarrow a\,(10 - 0)\,(10 - 20) = 4 \rightarrow -100\,a = 4 \rightarrow a = -\frac{4}{100}$$

Conclusión : $p(x) = -\frac{1}{25}\,.\,x\,.\,(x - 20)$; **Dn*p* = [0 ; 20].**

✍ ***ley de q*** (2da parábola)

Datos: altura máx. = 1 $\Rightarrow$ $y_{MAX} = 1$ $\Rightarrow$ $y_V = 1$ ➲ vértice: **V** $(x_V; 1)$
desplaz. horiz. máx.= 10 $\Rightarrow$ 20 y 30 ceros de la parábola 2 ➲ **Dn*q* = [20 ; 30].**

- *tipo de función* : cuadrática $\Rightarrow$ $q(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ó $q(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$
- *gráfica* : parábola corrida con ramas hacia abajo → $a < 0$
- *método:* usamos los puntos sobresalientes para obtener la ecuación de la parábola. Dado que los datos son las raíces conviene buscar la ecuación en que aparecen las raíces

$$q(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$
$$q(x) = a\,(x - 20)\,(x - 30)$$

x_1 y x_2 raíces del polinomio
$x_1 = 20$; $x_2 = 30$ (***dato***)

Vértice = $\mathbf{V}(x_v ; 1) \rightarrow x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = 25 \rightarrow \mathbf{V}(25; 1)$

$$\mathbf{V}(25; 1) \rightarrow q(25) = 1 \rightarrow a\,(25 - 20)\,(25 - 30) = 1 \rightarrow -25.\,a = 1 \rightarrow a = -1/25$$

Conclusión $q(x) = -0.04.\,(x - 20).\,(x - 30)$; **Dn*q* = [20 ; 30].**

Respuesta:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{25}\,.\,x\,.\,(x - 20) & ; \quad 0 \le x < 20 \quad \text{(parábola 1)} \\ -\frac{1}{25}\,.\,(x - 20)\,.\,(x - 30) & ; \quad 20 \le x \le 30 \quad \text{(parábola 2)} \end{cases}$$

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. Cada una de las funciones a continuación representa una ***familia de funciones***.

i) $\mathbf{c}(x) = x^2 + b$

ii) $\mathbf{f}(x) = x^3 + b\,x$

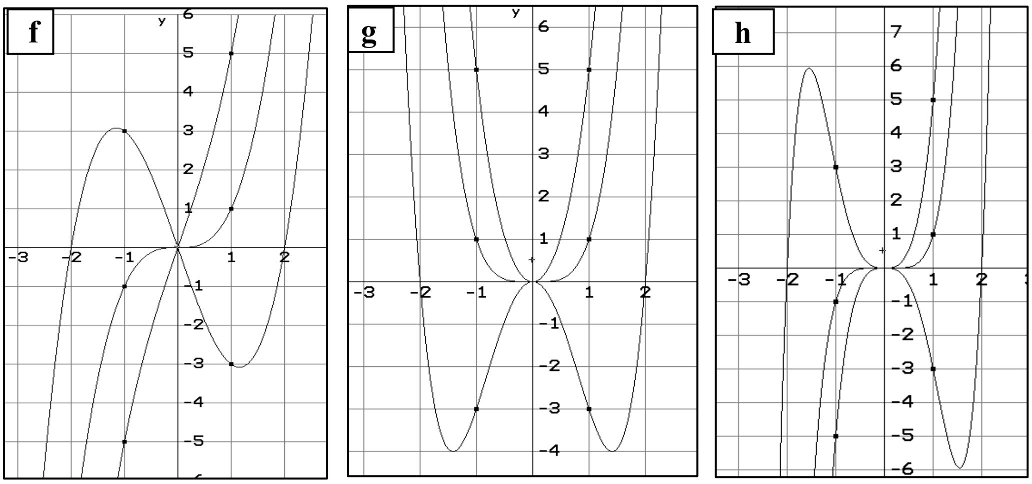
iii) $\mathbf{g}(x) = x^4 + b\,x^2$

iv) $\mathbf{h}(x) = x^5 + b\,x^3$

a. Indicar la *clase* a la que pertenecen las funciones de la familia en (i) ; graficar luego las funciones correspondientes a **b = - 4**; 0 y 4.

b. Analizar en forma genérica, considerando b>0; b=0 y b<0, cantidad y tipo de raíces de los polinomios correspondientes a las familias dadas por **f** , **g** y **h**.

c. En cada sistema a continuación se muestra la gráfica de *tres* polinomios de los infinitos en **f, g** y **h**. (en ese orden) Si los gráficos corresponden a ***b*** = -4, 0 y 4, establecer el valor del parámetro con el que se obtiene cada gráfico.



d. A continuación se presentan una serie de afirmaciones acerca de un polinomio ´p´. Se pide indicar ***V ó F*** justificando las respuesta a partir del análisis de las familias de polinomios dadas por **c**, **f** , **g** y **h**.

1) Si x* es cero de p, entonces el *graf. p* interseca al *eje x*, en x = x*
2) Si el *graf. p* interseca al *eje x* en x = x* entonces x* es cero de p.
3) La cantidad de veces que el *graf. p* interseca al eje x es menor o igual al grado de p.
4) Si p no tiene raíces complejas, la cantidad de veces que el *graf. p* interseca al *eje x* es igual al grado del polinomio.
5) Si la cantidad de veces que el *graf. p* interseca al *eje x* es igual al grado del polinomio entonces el polinomio no tiene raíces complejas.
6) Si x* es una raíz múltiple de p, de <u>*multiplicidad*</u> <u>*par*</u>, entonces el polinomio <u>*no cambia de signo*</u> en el <u>*entorno*</u> de x*.
7) Si x* es una raíz múltiple de p, de <u>*multiplicidad*</u> <u>*impar*</u>, entonces el polinomio <u>*cambia de signo*</u> en el <u>*entorno*</u> de x*
8) Si x* es una raíz múltiple de p, entonces el *graf. p* y el *eje x*, son "*tangentes*" en x*.

e. Si x_{min} indica la menor de las raíces reales y x_{max} la mayor de ellas, formular una conjetura relativa a la monotonía de una función polinómica en los intervalos $(-\infty; x_{min}]$ y $[x_{max}; +\infty)$, según el grado del polinomio.

Ejemplo: $g(x) = x^4 + b\,x^2 \Rightarrow$ grado $g = 4 \Rightarrow$ 4 raíces (reales o complejas)

Factorizamos y luego buscamos las raíces de **g** $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) = x^2.(x^2 + b) = 0}$

$\boldsymbol{b < 0} \rightarrow x_1 = x_2 = 0;\ \ x_3 = \sqrt{-b}\ ;\ x_4 = -\sqrt{-b}$ (***una*** ***doble***, ***dos*** reales y distintas)

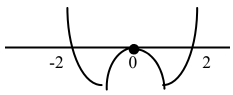
$\boldsymbol{b = 0} \rightarrow [\,x^4 = 0] \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (***una múltiple*** $\rightarrow$ ***multiplicidad 4***)

$\boldsymbol{b > 0} \rightarrow x_1 = x_2 = 0;\ \ x_3 = \sqrt{-b}\ ;\ x_4 = -\sqrt{-b}$ (***una*** ***doble***, ***dos*** complejas conjugadas)

✏ $b = -4 \Rightarrow \mathbf{x_1 = x_2 = 0}$; $x_3 = 2$; $\mathbf{x_4 = -2}$ $\Rightarrow$ ***una*** ***doble*** $\rightarrow$ **0** ; ***dos*** reales y distintas.

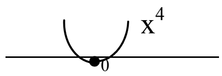
* graf g ***corta*** 2 veces al eje x ; lo ***toca*** 1 vez

* $g(\mathit{1}) = -3$



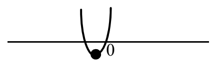
✏ $b = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ ***una*** ***múltiple*** $\rightarrow$ **0** ; ***multiplicidad 4*** .

*graf g ***toca*** una vez el eje x. ; * $g(\mathit{1}) = 1$



✏ $b = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = \mathbf{0}$; $x_3 = 2i$; $x_4 = -2i$ $\Rightarrow$ ***una*** ***doble*** $\rightarrow$ **0** ; ***dos*** complejas conjugadas.

*graf g ***toca*** una vez el eje x. ; *$g(1) = 5$



1: la gráfica *interseca* al eje x sólo cuando la raíz del polinomio es un *nro real*. Lo interseca *una vez*, aunque la raíz sea múltiple.

2: *multiplicidad par* $\Rightarrow$ en el *entorno* de la raíz múltiple, el polinomio *no cambia de signo*. *Gráfica polinomio* y *eje x*, son "*tangentes*"

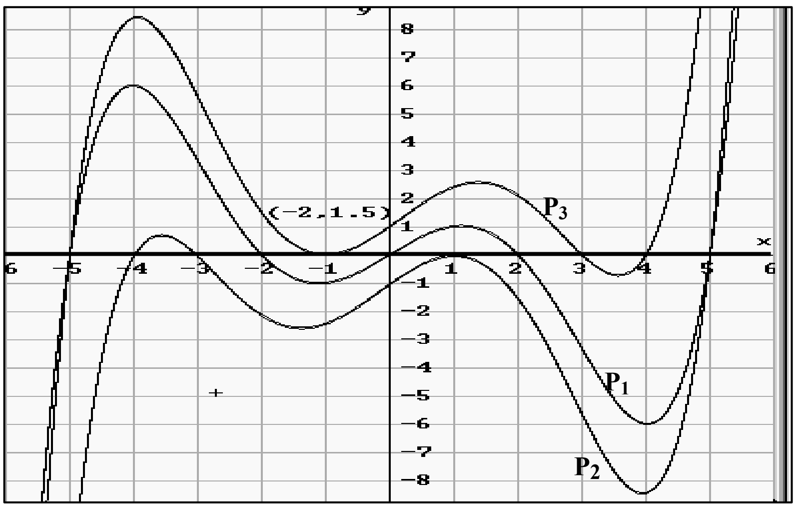
3: si el grado del polinomio es *par* el polinomio es, estrictamente decreciente en $(-\infty; x_{mín}]$ y estrictamente creciente $[x_{max}; +\infty)$

2. Las gráficas a continuación corresponden a polinomios estrictamente crecientes en $(-\infty; -5]$ y en $[5; +\infty)$. Para cada una se pide: **a)** leer ❷ en Anexo .

b) establecer si el grado del polinomio que representa es *par* o *impar*;

c) analizar cual es el *menor grado* posible para el respectivo polinomio,

d) proponer una factorización de los mismos. *Verificar gráficamente usando Excel*.



3. Mostrar que si $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ con $a \neq 0$ tiene 2 raíces reales y distintas, x_1 y x_2, entonces :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Sugerencia: igualar f a su forma factorizada: $f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$; desarrollar el segundo miembro hasta obtener el polinomio en la forma canónica, comparar, concluir.

4. Mostrar que si $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + cx + d$ con $a \neq 0$ tiene 3 raíces reales y distintas x_1, x_2, x_3, entonces :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 . x_2 . x_3 = \dfrac{-d}{a} \end{cases}$$

Sugerencia: idem ejercicio 5.

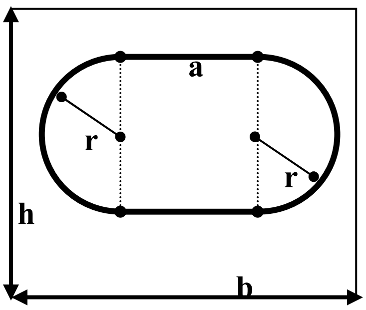
5. En un estanque en calma, se deja caer una piedra produciendo ondas en forma de circunferencias concéntricas. El radio (en pies) de la onda externa viene dado por r = f(t) con f(t) = 0.6 t, donde "t" es el tiempo en segundos transcurrido desde que la piedra toca el agua. Si con A indicamos el área del círculo en función del radio "r", se pide:

a) obtener la función "$A \circ f$ "; indicar que nos informa la misma.
b) Indicar V ó F: "el área del círculo crece a razón de 0.36. π pies por seg.".
c) Indicar V ó F: "el radio del círculo aumenta a razón de 0.6 pies por seg.".

6. Al buscar el registro de la variación de temperatura **T** (ºC) correspondiente al 30/06/2004, un meteorólogo observa que se le han borrado algunos datos. Alcanza a leer una anotación hecha al pie donde dice que ese día la temperatura tuvo un comportamiento cuadrático. También lee que a las 6 y a las 22 hs. se registró una temperatura de 0ºC y que la máxima de ese día fue de 10ºC. Con estos datos, el meteorólogo decide reconstruir la función que le permita calcular **T** para otras horas de ese día. ¿Lo ayudamos?

a. Hallar **T** en función del tiempo (en hs.). Graficarla.
b. ¿A qué hora se alcanzó la temperatura máxima? ¿y T = 8ºC?
c. Ese día: ¿cuál fue la temperatura mínima ?
d. Para ese día: ¿podemos encontrar una función que permita hallar la *hora* a la que se produjo cada temperatura?
Si así fuera, hallar y graficar dicha función.
e. Para ese día: ¿podemos hallar una función que permita determinar a qué hora, antes de las 14 hs., se produjo cada temperatura?
Si así fuera, hallar y graficar dicha función.

7. En el problema 3 del taller 2, analizamos la construcción, en una habitación, de una pista de autitos de carrera de longitud 8 mts. En esa instancia el problema fue hallar **A**, área abarcada por la pista, en *función* de **r**. Ahora te pedimos,



a) graficar la función **A** y determinar con exactitud el máximo valor que puede tomar el área en las condiciones dadas; cual es el valor de **r** para el cual se obtiene este valor.

b) discutir y hallar *todas* las dimensiones posibles para ***r*** para que en una habitación de altura ***h*** =3 (mts.) y base ***b*** > ***h*** se pueda construir una pista en la que el radio del tramo curvo sea ***r***.

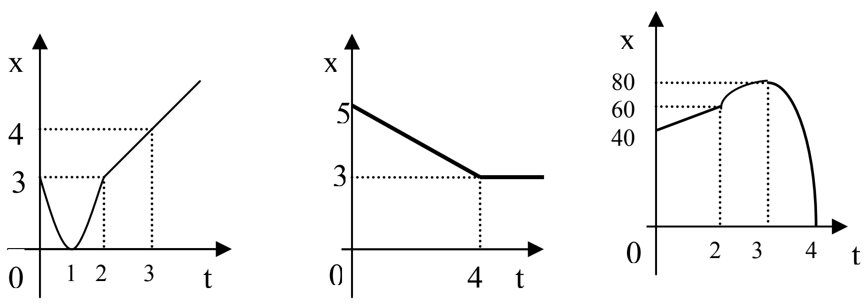
8. Si $x = - t^2 + 4t$ es la ***función de posición*** de una partícula **P** que se mueve sobre un eje horizontal durante ***6 hs.*** con velocidad (v) y aceleración (a) dadas por las funciones, $v = -2t + 4$ y $a = -2$; sabiendo que la distancia recorrida se mide en metros, se pide:

- **a.** *Graficar* la función de posición en un sistema ***x - t***.
- **b.** *Graficar* la función que da la velocidad en un sistema ***v - t***.
- **c.** *Graficar* la función que da la aceleración en un sistema ***a - t***.
- **d.** *Representar* la *trayectoria* de P; *describir verbalmente,* en oración, el movimiento. (punto de partida, intervalo de tiempo en el que *avanza* hacia la izquierda; que *avanza* hacia la derecha; instante en que *cambia* la dirección del movimiento, etc.). Establecer, de ser posible, algún tipo de relación entre el movimiento sobre el eje y datos que proporciona los gráficos de ***v*** y ***a*** en función del tiempo, en particular con el signo de estas variables.
- **e.** Hallar la ***distancia*** recorrida en 1, 2, 3, 4, 5, 6 (horas).

9. Los siguientes gráficos representan la ***función de posición*** (***x = f(t)***) de un móvil . En cada caso se pide expresar la ley de la función a través de una ecuación (ó ecuaciones), representar la ***trayectoria*** seguida por el móvil y *describir verbalmente,* en oración, cómo fue el movimiento. (punto de partida, dirección en la que *avanza* el móvil (si se mueve), si la velocidad de avance es o no constante, si hubo o no aceleración, etc). Para responder, recordar que para un:

* MRU (movimiento *rectilíneo* y uniforme) → $x = x_0 + v_0\, t$;

* MRUA (movimiento *rectilíneo* uniformemente acelerado)→ $x = x_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2$



10. Se lanza una pelota *desde el suelo*, hacia *arriba*, en forma *vertical* y con una *velocidad inicial* de 96 pies/seg. Si llamamos $\boldsymbol{y}$ a la altura de la pelota al suelo (en pies y después de $\boldsymbol{t}$ seg.), acudimos a las leyes de la Física para "caída libre" y las aplicamos a este caso, obtenemos que la altura de la pelota en cada instante se puede calcular por la siguiente ecuación: $y = 96\,t - 16\,t^2$. Al respecto, pedimos:

a) Indicar ***V ó F***, justificar: "*estamos ante un MRUA*"

b) introducir un sistema de referencia apropiado para representar la ***trayectoria*** de la pelota. Calcular la altura para $t = 0;1; 2;3, 4; 5; 6$; dibujar la ***trayectoria***.

c) verificar que la ecuación hallada en Física define *función* con fórmula $y = f(t)$. (***f =´función de posición´***, da la *posición* de la pelota en función del *tpo*). Hallar el domino (*natural*) de esta función.

d) En este caso, la ***trayectoria*** de la pelota y el ***graf f***, no coinciden; explicar porqué pasa esto. (*considerar las ´dimensiones´ involucradas en cada caso*). Graficar ***f.***

e) hallar la altura de la pelota a los 3.5 segs. de haber sido lanzada; hallar el instante en que la pelota alcanza su altura máxima.

11. En un partido de fútbol Gaspar patea un tiro al arco. La pelota describe una parábola de tiro de 2 mts. de altura máxima y cae a 10 mts. de donde está Gaspar. Al tocar el suelo, rebota y describe una nueva parábola cuyo alcance es el 40% de la primera y su altura máxima, la mitad de la anterior. En el momento de empezar el 3er pique, el arquero la ataja. Se pide:

a) Considerar la pelota un punto móvil, introducir un sistema de referencia apropiado al caso y graficar la "*curva-trayectoria*" descripta por la pelota desde que Gaspar la patea hasta que el arquero la ataja.

b) Discutir si la ***trayectoria*** de la pelota admite ser modelizada por una función ***f*** con fórmula $y = f(x)$. Si así fuera, analizar la *´naturaleza´* de ***f*** (*¿**f**,* permite hallar la posición de la pelota *en un instante dado?, ¿es la **función de posición** ?, una ecuación basta para dar su ley?, **Df** ?*, etc.). Finalmente, hallar ***f***, ***función*** que modeliza la trayectoria.

c) Hallar la *altura* de la pelota para un desplazamiento horizontal de 11 mts.

d) Hallar el *desplazamiento horizontal* de la pelota cuando su altura es 1.92 mts.

e) La altura de la pelota a los ***5 seg***. de haber sido lanzada, la podemos calcular? Si, ¿cómo? No, ¿porqué?

12. Se lanza una pelota desde una altura de 5 m. y de tal modo que describe un arco de parábola. Se observa que cuando el *desplazamiento horizontal* es de 1m. la pelota se encuentra a 8 mts. del suelo; que, para un *desplazamiento horizontal* de 4 mts a partir de allí, la pelota toca el suelo. Allí pica, *rebota* y describe otro arco de parábola de 2 m. de altura máxima con un desplazamiento de 2 m. entre pique y pique. Al picar, *rebota de nuevo* y describe otro arco de parábola de 1 m. de altura máxima con un desplazamiento de 1 m. entre pique y pique pero, en este caso en el punto donde tocaría el suelo (y volvería a picar!!) hay un pozo de 8 m. de profundidad en el cual cae y, *no rebota más*!!!. El pozo tiene un diámetro tal que la pelota no modifica su trayectoria al caer en él.

a) Considerar la pelota como un punto móvil, introducir un sistema de referencia apropiado y hacer un bosquejo de la "*curva-trayectoria*" descripta por la pelota, desde que es lanzada al aire.

b) Discutir si la trayectoria de la pelota admite ser modelizada por ***f***, *función* de *una variable*. Si así fuera , ***hallar f***, ***función que modeliza la trayectoria de la pelota.***

c) Calcular el desplazamiento horizontal para el cual la pelota estaba a 9 mts. del suelo; idem, a 1 m; idem, a 3 mts. bajo el suelo.

13. Dentro de la caja que se indica abajo hay una bolilla (**B)** la cual se mueve sobre la base de la misma por efecto de un electroimán. La caja está iluminado por dos lámparas adosadas a dos lados consecutivos (ver figura). Así, **B** hace sombra sobre los otros dos lados de la caja, el lado horizontal (***LH***) y el vertical (***LV***) y al moverse **B** sobre la base de la caja, su sombra se mueve sobre estos lados.

Las ecuaciones a continuación describen la ***posición*** del ***punto/sombra*** en cada instante ***t*** sobre el ***LH*** y el ***LV***, respectivamente; o sea, dan la ***función de posición*** de la sombra de **B,** sobre cada lado donde **B** hace sombra.

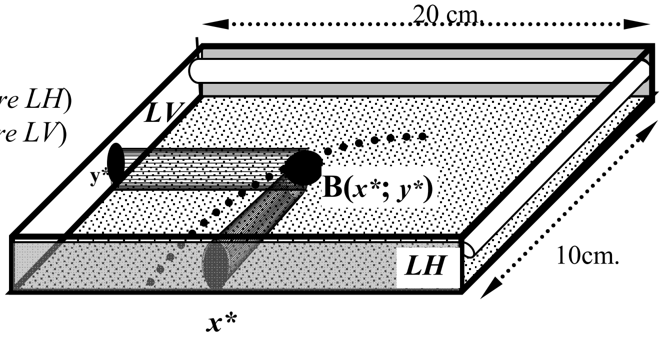
Te pedimos que, a partir de estas funciones, reconstruyas la ***trayectoria*** de **B** ***sobre la base de la caja***. (ver ❹ en Anexo)

a) Para $t \geq 2$ tenemos que:

$$\begin{cases} x = t - 2 & (\textit{posición sobre LH}) \\ y = 2t - 4 & (\textit{posición sobre LV}) \end{cases}$$

b) Para $t \geq 0$ tenemos que:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t^2 + 6t \end{cases}$$



✏ En ambos casos y siendo las dimensiones de la caja las indicadas en la figura, investigar lo siguiente:

(I) durante cuanto tiempo las ecuaciones dadas describen fehacientemente el movimiento de **B** y su sombra? Porqué?

(II) si ambas sombras se mueven a velocidad constante, *la bolilla*, ¿ se mueve a velocidad constante? .

(III) si una de las sombras se mueve a velocidad cte y la otra no, *la bolilla*, ¿se mueve a velocidad constante?

ANEXO IX

❶ ***Funciones Polinómicas***

- Funciones que se obtienen como suma de monomios de distintos grados:

$$\mathbf{p}\,(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

<u>***con***</u>: a_n ; a_{n-1} ; ....; a_2 ; a_1 ; $a_o \in \mathbf{R}$; $a_n \neq 0$

- <u>*Grado del polinomio*</u>: **gr. p = n** (grado de la potencia de mayor grado en p)
- <u>*Raíces del polinomio*</u>: x_o "*cero*" o "*raíz*" de p $\Leftrightarrow$ $p(x_o) = 0$.
- ***gr. p = n*** $\Rightarrow$ **p** tiene <u>*exactamente*</u> "***n***" raíces, <u>*reales*</u>, <u>*complejas*</u> y/o <u>*repetidas*</u>.
- <u>*Factorización de un polinomio*</u>: si **gr. p = n** entonces **p** se puede escribir como el producto de "**n**" factores de la forma (***x*** – "*raíz*"):

$$\mathbf{p}(x) = a_n .(x - x_n). (x - x_{n-1}) \cdots\cdots (x - x_2). (x - x_1)$$

<u>***con***</u>: x_n ; x_{n-1} ; x_{n-2} ; .... ; x_2 ; x_1 **raíces de "p"**

- Si un polinomio a coeficientes reales tiene una ***raíz compleja***, por ej., $x = 2 + 3i$ entonces su ***compleja conjugada***, $x^* = 2 - 3i$, también es raíz; o sea, las raíces complejas aparecen "***de a pares***". Esto permite concluir que los *polinomios de grado impar* tienen siempre y al menos *una raíz real.*

* ***n=1*** → **p**(x) = a x + b (*lineal*) → *graf. p* = ***recta***

<u>***1 raíz real***</u> : $x = \dfrac{-b}{a}$ ($a \neq 0$);

* ***n=2*** → **p**(x) = $a\,x^2 + b\,x + c$ (cuadrática, $a \neq 0$) → *graf. p* = ***parábola***

<u>***2 raíces***</u> : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ →
- $x_1 \neq x_2$ (reales)
- $x_1 = x_2$ (reales, raíz doble)
- $x_1 \neq x_2$ (complejas conjug$_s$)

* ***n = 3*** → p(x) = $a\,x^3 + b\,x^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) → *graf. p* = ***´tipo´ parábola cúbica***

<u>***3 raíces***</u> :
- ***3*** reales y distintas. $\xrightarrow{ej.}$ p(x) = (x –3) (x –2) (x + 4)
- ***3*** reales, una doble $\xrightarrow{ej.}$ p(x) = $(x-3)(x-2)^2$
- ***3*** iguales entre sí (raíz triple) $\xrightarrow{ej.}$ p(x) = $(x-2)^3$
- ***1*** real, ***2*** complejas conjugadas $\xrightarrow{ej.}$ p(x) = $(x-2)(x - \boldsymbol{i})(x + \boldsymbol{i})$
  p(x) = $(x-2)(x^2+1)$

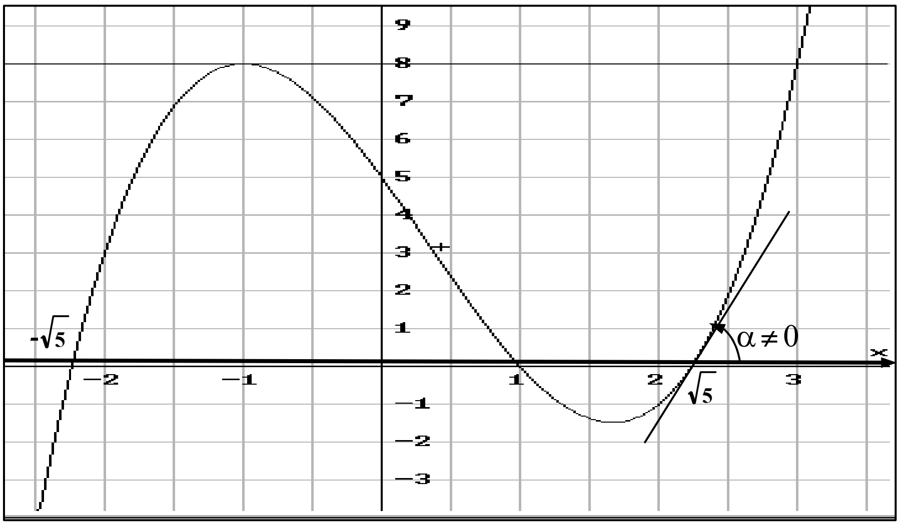
<u>*Gráficamente*</u>: ¿que datos indican que **p** es un polinomio de grado n >1*?*

➲ que la curva sea "*continua*" (sin saltos o agujeros) y "*suave*" (sin quiebres o ángulos); que corte al eje x un número finito de veces (n, como *máximo*).

➲ que la curva presente "*cumbres*" y "*valles*" en forma alternada; es decir, puntos donde "localmente" alcanza un valor "máximo" o "mínimo", respectivamente.

❷ ***Determinación gráfica de la ley de un polinomio***

La gráfica adjunta es parte del gráfico de un polinomio "p" acerca del cual nos informan que es estrictamente creciente en $(-\infty; -2]$ y en $[2; +\infty)$.



En relación a la misma, podemos:

1) leer del gráfico las imágenes correspondientes a una abscisa dada. Por ejemplo:
$x = -1;\ 0;\ 1;\ 3;\ \sqrt{5}$ → $p(-1) = 8;\ p(0) = 5;\ p(1)= 0;\ p(3) = 8;\ p(\sqrt{5}) = 0$

2) leer del gráfico cantidad de ceros, decidir el grado del polinomio.
La curva ***corta*** al eje en ***tres puntos***: $x_1 = -\sqrt{5}$; $x_2 = \mathbf{1}$; $x_3 = \sqrt{5}$; luego, no la vuelve a cortar, es estrictamente creciente (*dato*).

⇒ **3** ***raíces reales "simples"*** (corta al eje x formando ángulo, no es "*tg*" al mismo)

⇒ gr.p ≥ ***3*** (puede tener raíces complejas); gr.p = ***impar*** (las complejas, de a pares)

3) hallar la ley del polinomio en forma analítica (ecuación):

Si gr p = ***3*** ⇒ $\mathbf{p}(x) = \boldsymbol{a}\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)$

$$\mathbf{p}(x) = \boldsymbol{a}\,(x + \sqrt{5})\,(x - \mathit{1})\,(x - \sqrt{5}) = \boldsymbol{a}\,(x - \mathit{1}).\,(x^2 - 5) \rightarrow\ ¿\,\boldsymbol{a}\,?$$

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{5} \Rightarrow\ \boldsymbol{a}\ (0 - \mathit{1}).\,(0 - 5) = \mathbf{5}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{a}\,.\,\mathbf{5} = \mathbf{5}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$$

Conclusión: si p no tiene raíces complejas entonces $\mathbf{p}(x) = (x - \mathit{1}).\,(x^2 - 5)$

3) verificar si la ecuación hallada es la ley del polinomio graficado. Para ello comparamos ***valores leídos del gráfico versus valores calculados con la ecuación*** ; o, ***prop . gráficas versus prop. analíticas de la ecuación***.

→ por ej., ***calculamos*** con $\mathbf{p}(x) = (x - 1).\,(x^2 - 5)$ la imagen de los ***x*´s** ya hallada gráficamente para $x = -1;\ 0;\ 1;\ 3;\ \sqrt{5}$

$p(-1) = (-2)\,(-4) = 8$ ✓ ; $p(0) = (-1).(-5) = 5$✓ ; ...... ; $p(3) = (2)\,(4) = 8$ ✓ ......

→ por ej., determinamos ***del gráfico*** los intervalos donde $p(x) > 0$ *ó* $p(x) < 0$; comparamos estos intervalos con los obtenidos a partir de ***resolver las inecuaciones*** que resultan de plantear $p(x)>0$ ó $p(x)<0$, respectivamente. Por ejemplo:

del gráfico : $p(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{5}$ **ó** $x \in (1; \sqrt{5})$.

$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{5}\,; 1)$ **ó** $x > \sqrt{5}$.

✏ ***¿ de las inecuaciones ?:*** existen distintas formas de resolver inecuaciones. A tal efecto, recomendamos el ***método de los valores de prueba.***

Método de los valores de prueba: para aplicar el método procedemos a:

- Explicitar los ceros de p; factorear el polinomio (si estuviera en la forma canónica).
- Subdividir el eje real en subintervalos $\mathbf{I_k}$ cuyos extremos sean los ceros reales de p. (por ej: si p tiene ***3*** ceros reales (x_1, x_2, x_3), quedan determinados **4** $\mathbf{I_k}$)
- ***Determinar el signo de p(x) en cada subintervalo*** ($\mathbf{I_k}$)

1) Tomamos un $\mathbf{I_k}$, elegimos un x^* dentro de él. (x^* = valor de prueba ; $x^* \in \mathbf{I_k}$).

2) Determinamos el ***signo de p (x*).*** Tenemos dos caminos para hacer esto:

a) ***calcular el polinomio en x**** [ej: $p(x^*) = a\,(x^*-x_1)\,(x^*-x_2)\,(x^*-x_3)$].

b) ***acudir a la "regla de los signos"*** . En este:

(1ro) establecemos el signo de cada factor (x^*-x_i) en el polinomio factorizado.

(2do) determinamos el signo de $p(x^*)$ aplicando la *´regla de los signos´*.

3) Determinamos el ***signo de p(x)*** en $\mathbf{I_k}$. Para esto usamos el siguiente resultado teórico válido para cualquier *polinomio*: " $\forall x \in \mathbf{I_k}$, sig. $p(x)$ = sig. $p(x^*)$ ".

(→ el signo del polinomio se *´mantiene´* dentro de un mismo subintervalo) .

En nuestro caso: $x_1 = -\sqrt{5}$; $x_2 = \mathbf{1}$; $x_3 = \sqrt{5}$ → $\mathbf{p}(x) = (x + \sqrt{5})\,(x - 1)\,(x - \sqrt{5})$

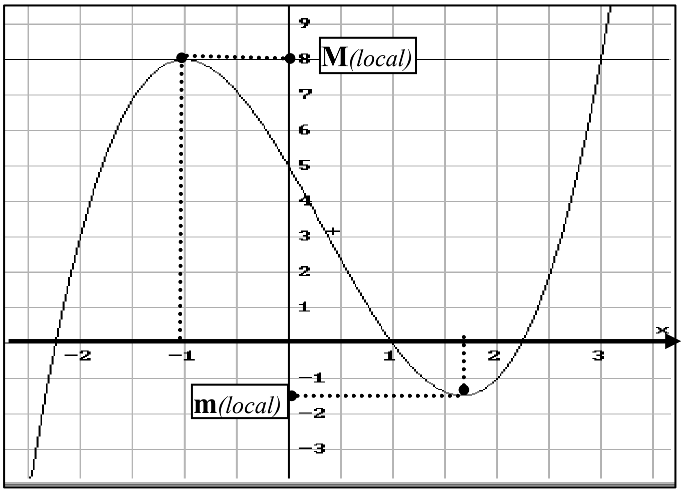
$\boxed{\mathbf{I_1}}$ $-\sqrt{5}$ $\boxed{\mathbf{I_2}}$ *1* $\boxed{\mathbf{I_3}}$ $\sqrt{5}$ $\boxed{\mathbf{I_4}}$

	$(x^* + \sqrt{5})$	(x^*-1)	$(x^*-\sqrt{5})$	$= p(x^*)$	***conclusión***
$x^* < -\sqrt{5}$	(-)	(-)	(-)	$p(x^*) < 0$	$p(x) < 0$ en $(-\infty ; -\sqrt{5})$
$-\sqrt{5} < x^*=0 < 1$	(+)	(-)	(-)	$p(x^*) > 0$	$p(x) > 0$ en $(-\sqrt{5} ; 1)$
$1 < x^* < \sqrt{5}$	(+)	(+)	(-)	$p(x^*) < 0$	$p(x) < 0$ en $(1 ; \sqrt{5})$
$\sqrt{5} < x^* = 3$	(+)	(+)	(+)	$p(x^*) > 0$	$p(x) > 0$ en $(\sqrt{5} ; +\infty)$

Conclusión: si comparamos los resultados obtenidos en este cuadro con los hallados gráficamente vemos que los mismos, coinciden. Luego, aumenta la *probabilidad que la ley hallada sea la correcta* .

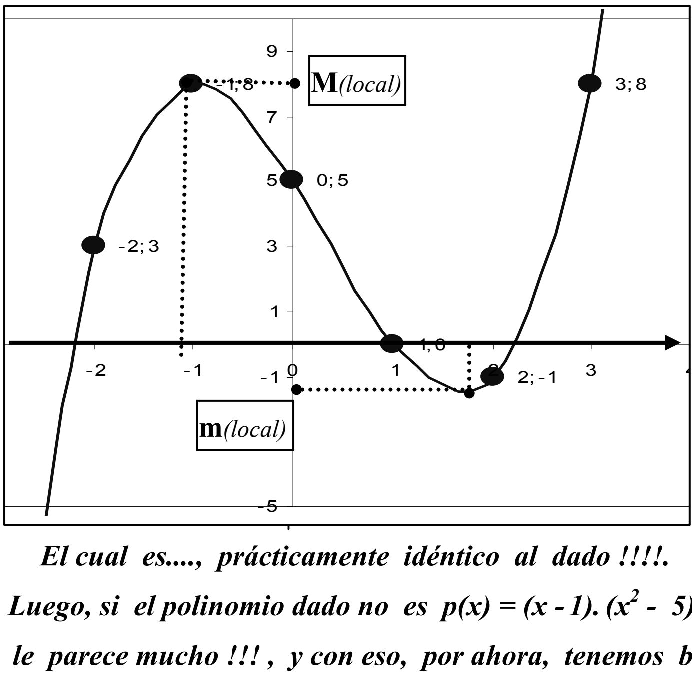
→ podemos también detectar valores de ***x*´s** donde el ***graf p*** presente *cumbres* ó *valles*; es decir, ***x*´s** donde <u>*localmente*</u> ***p*** alcanza un valor <u>*máximo*</u> (ó mínimo).

- <u>***del gráfico***</u> vemos que en un entorno *de* ***x = - 1*** se produce una *cumbre*; es decir, un punto donde la curva está toda <u>*por debajo*</u> de **p**(***-1***). Tenemos así un <u>*máximo*</u> (*l*ocal) cuyo valor es **8** y que el polinomio <u>*alcanza*</u> en ***x = - 1*** . Vemos que también existe un *valle*; o sea, un <u>*mínimo*</u> (local)



¿***Podemos verificar si con la ley hallada tenemos esta cumbre y este valle***?

Por ahora no podemos hacer esto ***analíticamente*** pues no tenemos las herramientas necesarias para ello (necesitamos el concepto de ***derivada***).
Si podemos verificar, ***gráficamente***, es decir acudiendo a un dispositivo graficador. En tal caso, ***graficamos*** **p**(x) = (x **-** 1).(x^2 **- 5**) y comparamos el gráfico obtenido con esta ley versus el gráfico dado.En este caso y en Excel, obtenemos el siguiente ***graf p***.



El cual es...., prácticamente idéntico al dado !!!!.

Luego, si el polinomio dado no es p(x) = (x - 1). (x^2 - 5),

¡¡¡ se le parece mucho !!! , y con eso, por ahora, tenemos bastante

❸ ***Deducción de la trayectoria de un móvil que se mueve en el plano, a partir de sus "ecuaciones paramétricas"***

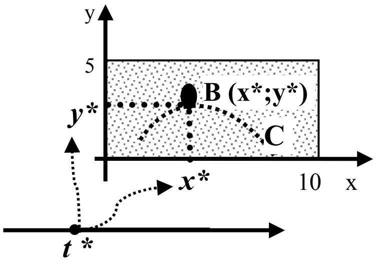
Hallar la trayectoria de **B** si, para $\mathbf{0 \leq t \leq 3}$, tenemos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = t + 3 \quad (\rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)\ ;\ \text{posición de la sombra de } \mathbf{B},\ \text{sobre } \boldsymbol{LH},\ \text{en cada instante t}) \\ \boldsymbol{y} = -\,t^2 + 9 \quad (\rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(t)\ ;\ \text{posición de la sombra de } \mathbf{B},\ \text{sobre } \boldsymbol{LV},\ \text{en cada instante t}) \end{cases}$$

**Estas ecuaciones se conocen como "ecuaciones paramétricas" de una curva plana.*

Reconocimiento de la situación.

Para describir la trayectoria de **B** sobre la base de la caja debemos introducir un sistema de coordenadas, usar para ello los datos del problema. Así, dado que estos refieren al movimiento sobre ***LH*** y ***LV***, tomamos como ***eje x*** la arista determinada por ***LH*** y, como ***eje y***, la determinada por ***LV***.



Adoptado este sistema, vemos que:

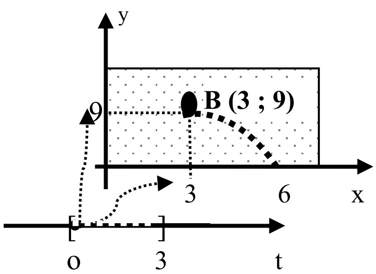
- $\boldsymbol{x}$, coordenada de la sombra de **B**, sobre ***LH*** ;
  pasa a ser la ***abscisa de*** **B,** en el sistema **x-y.**
- $\boldsymbol{y}$, coordenada de la sombra de **B**, sobre ***LV*** ;
  pasa a ser la ***ordenada de*** **B,** en el sistema **x-y.**
- ***Incógnita***: **C,** ***trayectoria de*** **B** $\Rightarrow \varphi \ /\ y = \varphi(x)$

Observación: para resolver este problema primero debemos *´comprender´* que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ *no son independientes una de la otra* pues representan la sombra de un mismo objeto, en un mismo instante $\boldsymbol{t}$, sobre distintos ejes. Que por lo tanto existe una ***relación de dependencia*** entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, tiene sentido buscar una función que las vincule.

Para obtener **φ,** función que vincula $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, observamos que tanto $\boldsymbol{x}$ como $\boldsymbol{y}$ son ***función*** del tiempo ($\boldsymbol{t}$); o sea de un *parámetro*, el cual resulta el nexo entre ambas. Así, basta ***eliminar*** el parámetro $\boldsymbol{t}$ para obtener la relación que vincula directamente a $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{y}$.

$$\begin{cases} x = t + 3\ ;\ \text{despejamos t en función de } x \rightarrow \\ y = -\,t^2 + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = t \\ \quad y = -\,t^2 + 9\ ;\ \text{reemplazamos t} \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 = t \\ \quad y = -\,(x-3)^2 + 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -\,x^2 + 6x \end{cases} \qquad \begin{matrix} [\ \mathbf{0 \leq t \leq 3 \ \Rightarrow\ 3 \leq x \leq 6}\ ] \\ [\ y = \varphi(x) \ \text{con}\ \varphi(x) = -\,x^2 + 6x\ ] \\ \mathbf{D_{\varphi} = [\,3;\,6]} \end{matrix}$$



> **Rta:** **B** → parte del punto (*3; 9*) y durante 3 seg. describe un arco de parábola dado por,
> $\varphi(x) = -\,x^2 + 6x$.
> Termina su recorrido en el punto (*6;0*), sobre el ***LH*** de la caja.

TALLER 8

OBJETIVOS: ***Función Recíproca y Recíproca Generalizada***

El objetivo general del taller es estudiar la *clase* o *familia* de las funciones conocidas como *´recípocas´*. El logro de este objetivo, se propone a partir del estudio en profundidad de la ***función prototipo*** y se implementa a través de la ***resolución de problemas*** que las involucren.

A tal efecto, comenzamos por plantear la ***función prototipo*** objeto del taller, explicitar la *ecuación* que define su ***ley***, la ***curva prototipo*** asociada y, fundamentalmente, el significado (o efecto sobre la gráfica) de los coeficientes de la correspondiente ecuación. (Ver ❶ - Anexo X).

➽ *función prototipo*

recíproca $\quad f(x) = \dfrac{k}{x} \quad ; \; k \in \mathbf{R}.$

Recíproca generalizada u homográfica

$$f(x) = \frac{k}{x - s} + r \quad ; \; k, \; r, \; s \in \mathbf{R}.$$

$$f(x) = \frac{a.x + b}{c.x + d} \quad ; \; a, b, c, d \in \mathbf{R}.$$

➽ *curva prototipo* → ***hipérbola***

⏭ PLAN DE ATAQUE (*creciente*): *Modelización a través de funciones.*

I-II) ***Reconocimiento de la situación***: analizamos la existencia de "*al menos dos magnitudes variables relacionadas por una función*".

Si es el caso, procedemos a:

- *reconocer variables*: dependiente (***v.d.***) e independiente (***v.i.***).
- *etiquetar* y *describir* estas variables
- explicitar la *incógnita*.
- resumir todo otro *dato* o *información* útil a la resolución del problema.

III) ***Planificación*** ***(de un proceso para reconocer "funciones prototipo")***

- realizar figuras, esquemas o gráficos que ayuden las variables (***v.d.*** y ***v.i.***), fundamentalmente, el *´tipo de relación´* que las vincula.
- revisar la existencia de leyes o formulaciones "*conocidas*" y relativas al proceso motivo o causa del problema.
- de no conocer ninguna ley relativa al proceso, proceder a buscar una función que lo modelice. Para ello trabajar por *´prueba y error´* probando y descartando *funciones tipo*, en forma metódica, hasta llegar a la que mejor *ajuste* a los datos.

Si el proceso no es periódico, un orden tentativo para probar funciones es:

(1) lineal (*directa proporcionalidad*), ☑ (Taller 6)
(2) polinómicas (*cuadrática*), ☑ (Taller 7)
(3) recíprocas (*inversa proporcionalidad*), ☐ (estamos aquí)
(4) exponenciales (o sus inversas, las *logarítmicas*). ☐

En lo que sigue indicamos con x a la ***v.i.***, con y a la ***v.d.***; en el caso concreto de un problema dado, usar *´las letras propuestas en el paso I-II del Plan de Ataque´* .

IV) ***Ejecución del plan:*** ***análisis de la situación al efecto de determinar el tipo de función que modeliza el proceso.***

Ley de f . (*por prueba y error, comenzando con la lineal*).

(1) ***f : ¿lineal ?*** → ¿ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = cte ***?*** : $\begin{cases} \textbf{SI.} & [\text{🛠} \rightarrow \text{Taller 6}]. \\ \textbf{NO.} & [\text{¿}f\text{?} \rightarrow (2)]. \end{cases}$

(2) ***f : ¿polinómica grado* > 1? :** $\begin{cases} \textbf{SI.} & [\text{🛠} \rightarrow \text{Taller 7}]. \\ \textbf{NO.} & [\text{¿}f\text{?} \rightarrow (3)]. \end{cases}$

(3) ***f : ¿ recíproca (generalizada)?:*** **[🛠]**→ depende de la forma en que este dada ***f***.

➢ *por una ecuación*, basta detectar si la ecuación es una *´recíproca (generalizada)´*. Esto requiere analizar el producto $x \cdot y$ o el $(x - \alpha).(y - \beta)$ (variables *´corridas´*).

☞ $x \cdot y = cte$ ⇒ ***f es una ´recíproca´.***
☞ $(x - \alpha)(y - \beta) = cte$ ⇒ ***f es una ´recíproca generalizada´.***

➢ *por un gráfico cartesiano*: o sea por una f_{graf} .
se analiza la curva dato, si esta presenta los rasgos característicos de una *hipérbola* o *hipérbola ´corrida´* . Si así fuera se puede *suponer* pero *no afirmar* que la curva corresponde a una recíproca ó rec. generalizada (evidencia gráfica *no es prueba del hecho*).
* En el ***taller 11*** tratamos esta cuestión; o sea: identificación de curvas; obtención de la ley de ***f*** con fórmula $y = f(x)$ para funciones dadas por un gráfico cartesiano. (f_{graf})

➢ ***por una tabla de valores*** (f_{num}): en este caso tenemos dos opciones para reconocer el tipo de función al que responden los puntos/dato:
* graficar los puntos/datos, obtener la correspondiente f_{graf}, proceder (→ ***taller 10***).
* proceder a partir de la tabla, por prueba y error, según el siguiente ´**Plan de Trabajo**´.

PdeT: determinación del ***tipo de función*** por ***prueba y error*** y para una f_{num}

a. Graficar los *puntos/dato,* unirlos por una curva, hacer una primera conjetura.
b. $y/x = cte$ (Directamente Proporcionales). ***Si*** ? → f lineal. ; ***No***?→ (c).
c. $\Delta y / \Delta x = cte$ ***Si*** ? → f lineal; ***No***?→(d).
d. $y \cdot x = cte$ (Inversamente Proporcionales). ***Si*** ? → f recíproca; ***No***?→ (e).
e. $(y - \beta).(x - \alpha) = cte$ ***Si*** ? → f rec. gener.; ***No***?→ (**f**).
f. **[Taller 9]**

Resolución: *determinación de "la ecuación" que define una función recíproca en el caso que el dato sea una "f_{graf}" ó "f_{num}". (Tabla de Valores).*

ⓘ Detectado un ´*patrón*´ en la formación de las imágenes e identificado el ***tipo de función*** al que remite, el siguiente paso es dar la ley de ***f*** con fórmula ***y = f (x)***.
Para ello se procede a:

i) ***proponer*** la ecuación prototipo asociada a la función tipo ***reconocida***.
ii) ***determinar*** (a partir de los datos) el valor que, en particular y para el caso, corresponde a los parámetros en la ecuación prototipo propuesta en (i).
iii) ***reemplazar*** los parámetros por los valores hallados, dar la ***ecuación de f***.
iv) ***evaluar*** si la ***función*** obtenida proporciona un ***buen modelo**** del proceso o fenómeno que se trata de modelizar.
- ***Si*** → **FIN**.
- ***No*** → Revisar, repetir la experiencia ó, acudir a otro método.

En el caso particular de la recíproca se parte de la *ecuación prototipo* correspondiente a la *recíproca generalizada*: $f(x) = \dfrac{k}{x-\alpha} + \beta$.

Los parámetros a determinar son α, β y k, donde $\mathbf{I}(\alpha;\beta)$ es el *centro* de la hipérbola y k la cte de proporcionalidad. Los valores hallados en (ii) se reemplazan en la ecuación prototipo propuesta y se obtiene así, y finalmente, la ley de ***f*** por una ecuación.
Luego, y para dar la ***función***, se determina e informa el ***Dominio natural de f .***

Observaciones

(1) El ´*aspecto*´ de la ecuación final depende de que **I** sea o no el origen **O(0;0).**

- **I ≠ O** (0; 0) ; $y = \dfrac{k}{x-\alpha} + \beta$; $(x-\alpha).(y-\beta) = k \Rightarrow$ $x-\alpha$ e $y-\beta$: ***inv. proporcionales***
- **I = O**(0; 0) ; $y = \dfrac{k}{x}$; $x \cdot y = k \Rightarrow$ x e y: ***inv. proporcionales***

(2) *Buen modelo**
Si la discrepancia entre los valores experimentales y los valores calculados con la función hallada está dentro del margen de tolerancia (o *error*) permitido, estamos ante un ***´buen modelo´***; o sea, ante un modelo que ofrece un ***´buen ajuste´*** de la nube de puntos/dato.

Para terminar, ejecutamos los pasos finales de la guía de resolución de problemas:

- *Análizamos la "razonabilidad" de la solución hallada. (¿buen modelo?).*
- *Escribimos la respuesta en oración, en forma destacada y precisa.*
- *Hacemos reflexiones de orden " metacognitivo" .*

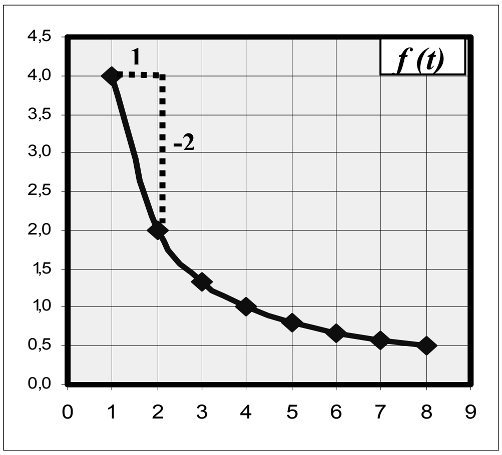
En esta instancia escribir las respuestas que damos a los interrogantes planteados durante la resolución, es de suma utilidad en cuanto a la determinación de las propiedades o rasgos característico de la función investigada. Esta acción resulta más útil aún si podemos expresar dichas respuestas en forma operativa; es decir, de tal manera que proporcionen un instrumento o regla de fácil aplicación para la toma de decisiones. Así, y por ejemplo, aquí detectamos que la ***inversa proporcionalidad*** *de las variables (corridas o no) es un rasgo prototípico de las recíprocas (generalizadas o básicas), concluimos de ello que esta propiedad proporciona un instrumento para detectar recíprocas:* $x \cdot y = k \Rightarrow$ ***f recíproca*** ; $x \cdot y \neq k \Rightarrow$ ***f "no" recíproca***

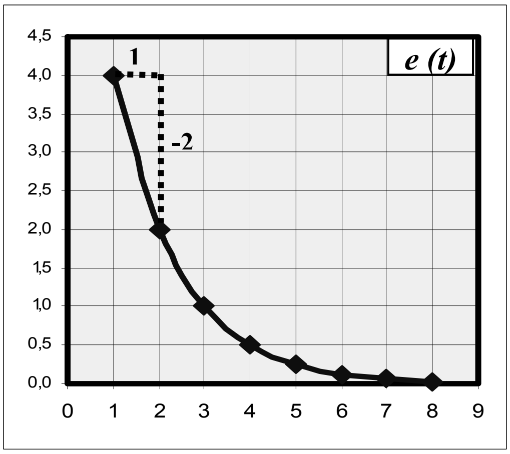
ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. Disponemos en forma ***numérica*** y ***gráfica*** de la ley de dos funciones identificadas con ***f*** y ***e*** respectivamente. Los datos provienen del análisis al que sometimos a *dos* compuestos que encontramos hoy sobre la mesada del laboratorio cuando ayer habíamos dejado *solo uno* (**XX**), aquél con el que íbamos a trabajar hoy. Por desgracia ambos compuestos están guardados en recipientes iguales y sin etiqueta. Por suerte sabemos que **XX**, bajo ciertas condiciones, tiene la particularidad de evaporarse de modo que ***x, la cantidad de compuesto remanente*** en cada instante **t,** es ***inversamente proporcional*** al tiempo transcurrido hasta ese instante. Así, para decidir en que frasco está **XX**, durante cierto tiempo y a intervalos regulares de tiempo ($\Delta t = 1$) sometimos ambos compuestos a las condiciones en que **XX** se evapora, registramos los datos obtenidos en dos tabla, luego los graficamos. Los gráficos obtenidos ***inducen a pensar que ambos compuestos presentan el comportamiento deseado***; ***¿será así ?*** Como necesitamos estar seguros (el compuesto es muy caro y no tenemos más que unos gramos en cada frasco), nos tenemos que ir y nos urge tener la respuesta al volver, te pedimos que nos ayudes a resolver la cuestión, que investigues con los datos que te damos y nos confirmes si, como parece, los dos cumplen el requisito o si por el contrario lo cumple uno solo (cual?), o ninguno. Para ello te sugerimos que realices las actividades indicadas a continuación (que siguen el *plan de ataque*).

t	$x = f(t)$
1	4,00
2	2,00
3	1,33
4	1,00
5	0,80
6	0,67
7	0,57
8	0,50

t	$x = e(t)$
1	4,000
2	2,000
3	1,000
4	0,500
5	0,250
6	0,125
7	0,063
8	0,031





a) Sólo una de las afirmaciones siguientes es verdadera. Indica cual y porqué.

(i) "las *gráficas* de ***f*** y ***e*** indican (para ambos casos) que ***x*** y ***t*** no son directamente proporcionales " .

(ii) "las *gráficas* de ***f*** y ***e*** indican (para ambos casos) que ***x*** y ***t*** son inversamente proporcionales " .

b) Explicar mediante un informe y con argumentos sólidos si alguna (ambas o ninguna) de las funciones dadas describe el comportamiento del compuesto **XX**. Si descartas alguna función, aclara la o las razones que te inducen a hacer esto.

****Sugerencias*:** para resolver esta cuestión procede a analizar *metódicamente* a ***f*** y ***e* :**

1º) observa las ***imágenes*** (las ***x´s)*** correspondientes a cada función para detectar si presentan un comportamiento acorde al comportamiento del compuesto XX; o sea, si ***x, cantidad de compuesto en el frasco***, disminuye con el tiempo. Al hacer esto recuerda que el decrecimiento de la variable dependiente es *condición necesaria pero no suficiente* para que las variables sean inversamente proporcionales. Si este paso no permite resolver la cuestión, ir a (2).
2º) investiga la existencia de algún ***tipo de relación*** entre ***pares de valores*** tales como: (***t*** y ***x)***; (Δt y Δx); (t y Δx) ó (x y Δx). En particular, recuerda que debes analizar si lo que estás buscando es "inversa proporcionalidad" entre variables (corridas o no corridas) Haz esto en forma metódica (trabajando con tablas de valores y acorde al esquema de trabajo propuesto)

t	$x=f(t)$	Δx	$\Delta x/\Delta t$	x/t	$x.t$
1	4,00	-2,00	-2,00		
2	2,00	-0,67	-0,67		
3	1,33	-0,33	-0,33		
4	1,00	-0,20	-0,20		
5	0,80	-0,13	-0,13		
6	0,67	-0,10	-0,10		
7	0,57	-0,07	-0,07		
8	0,50				

t	$x=e(t)$	Δx	$\Delta x/\Delta t$	x/t	$x.t$
1	4,000	-2,000	-2,000		
2	2,000	-1,000	-1,000		
3	1,000	-0,500	-0,500		
4	0,500	-0,250	-0,250		
5	0,250	-0,125	-0,125		
6	0,125	-0,063	-0,063		
7	0,063	-0,031	-0,031		
8	0,031				

c) Deduce, usando el análisis hecho en (b), una ***fórmula*** para la función que modeliza el proceso de evaporación de **XX.**

* Informa que es lo que ***caracteriza*** a la función hallada; o sea, aquello que la ***distingue*** de la otra (la que también decrece).
* Indica a que ***tipo o clase de función*** corresponde la función que modeliza el proceso de evaporación de **XX**

d) Realiza un análisis *comparativo* entre ***f*** y ***e***; y luego, en función de ello, indica si ***f*** y ***e*** son funciones del mismo "***tipo***".

2. Otro día, al llegar al laboratorio donde habíamos dejado *dos frascos* con el compuesto **XX,** nos encontramos con 5 frascos sobre la mesada (todos iguales, sin etiqueta). Para reconocer cuales eran los que contenían al compuesto **XX**, procedimos a analizar el contenido de los 5 frascos, en las mismas condiciones y de la misma forma que en el ***ejemplo 1.***

A continuación, te damos los resultados obtenidos, identificados respectivamente como f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 ; te pedimos que los analices y digas en que frasco estaría el compuesto **XX** y en cual estaría otro sumamente peligroso que creemos está entre ellos y sobre el cual sabemos que, sometido a las condiciones mencionadas, *la cantidad de compuesto evaporado entre dos mediciones es directamente proporcional* al tiempo transcurrido entre ellas.

t	2	4	6	8	10
x **=** $f_1(t)$	*45*	*35*	*25*	*15*	*5*

t	1	2	3	4	5
x **=** $f_2(t)$	*50*	*25*	*12,5*	*6,25*	*3,125*

t	1	2	3	4	5
x **=** $f_3(t)$	*50*	*25*	*16,66*	*12,50*	*10*

t	4	8	12	16	20
x **=** $f_4(t)$	*100*	*50*	*25*	*12,5*	*6,25*

t	2	4	6	8	10
x **=** $f_5(t)$	*25*	*12,5 0*	*8,33*	*6, 25*	*5*

3. Conociendo que a temperatura constante, P, la presión de cierto gas encerrado en un globo esférico perfectamente sellado es inversamente proporcional al volumen del globo; que si v = volumen esfera entonces $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (r = radio); se pide:

a. mostrar que la presión del gas es *función del radio*, $P = f(\mathbf{r})$, y que f es la compuesta de dos funciones.

b. indicar V ó F**,** justificar: "la presión del gas dentro del globo es inversamente proporcional al *cubo del radio*".

c. indicar V ó F**,** justificar: **"**si **D =** ***dominio natural de P***, $P = f(\mathbf{r})$**,** entonces $\mathbf{D} = \mathbf{R}^+$ (reales positivos)".

d. si se sabe que la presión del gas cuando el radio es de 9 plg es de 20 lb/plg. indicar cual será la presión si el radio del globo *aumenta* en 3 plg, si esto pasa a temperatura constante y la cantidad de gas dentro del globo permanece constante . (plg = *pulgada*; lb = *libra*) .

4. P*resión, Volumen y Temperatura son tres parámetros que definen el estado de una masa gaseosa. Para hallar la relación que los vincula (ecuación de estado) se comienza por el caso más simple, por ejemplo, se deja fijo uno de los parámetros y se estudia la relación entre los otros dos. Si se trabaja en condiciones tales que la temperatura se puede mantener constante durante todo el proceso, se puede entonces estudiar el comportamiento del Volumen en función de la Presión (o viceversa).*

Con el objetivo de analizar la variación del volumen de cierto gas al variar su presión; o sea, de hallar f tal que **V** = f(**P**), se realiza con dicho gas y a *temperatura constante*, una experiencia en la que se obtiene la siguiente f_{num} .

P(atm)	1	2	4	6	8	10	12
V(lts)	30.00	14.87	7.45	5.00	3.76	3.00	2.5

Como f_{num} es la *menos operativa* de todas las formas de dar una función te pedimos que encuentres y nos informes de una ***fórmula*** para la ley de f, su ***dominio*** según ***contexto.*** Para cumplir este objetivo te sugerimos que procedas a investigar en forma *metódica* y en *contexto*, el comportamiento de los *puntos/dato*; que para ello:

☞ *observes* que el dominio *natural* de f es sin lugar a dudas un *continuo* de nros reales (más allá que el conjunto de puntos/dato sea *discreto*); que *asumas* que la regularidad observada puede hacerse extensiva a los puntos *no observados* (si bien esto ya *no es obvio*, es una hipótesis de trabajo que luego habrá que verificar).
☞ *ejecutes*, el siguiente ***plan de trabajo*** (acorde al ***plan de ataque*** sugerido al inicio)

Plan de Trabajo :

a. Graficar los *puntos/dato,* unirlos por una curva, hacer una primera conjetura.
b. P y V son D.P.? (Directamente Proporcionales) . ***Si*** ? → (f). - ***No***?→ (c).
c. ΔP y ΔV son D.P.? ***Si*** ? → (f). - ***No***?→(d).
d. P y V son I.P.? (Inversamente Proporcionales) . ***Si*** ? → (f). - ***No***?→ (e).
e. Los *puntos/dato* o sus *incrementos* presentan algún tipo de *´regularidad´* ?
No? Repetir la experiencia agregando mediciones, cambiando alguna condición de contexto (ej: *temperatura*). Reiniciar en (a), con nueva tabla.
Si?, ***cuál***? → (f)
f. Buscar en M(*memoria*) si conocemos una función f cuyo comportamiento sea *análogo* al comportamiento detectado para f_{num} .
¿$f \in$ M?: Sí→ 1º) escribir la ***función prototipo*** asociada a f.
2º) calcular a partir de los puntos/dato el valor que, para el caso analizado, toman los parámetros en la función prototipo.
3º) reemplazar los parámetros por los valores hallados; dar f.

g. Proporciona la función obtenida un ***buen modelo*** del fenómeno investigado? ***Si*** ? → **FIN**. ***No***?: porqué? Revisar, repetir la experiencia, reiniciar en (a).

****Bondad del modelo:*** comparar valores experimentales versus calculados con la fórmula. Si existe alguna discrepancia entre estos valores, establecer si estas son o no determinantes en cuanto a la "*bondad*" del modelo.

P(atm)	1	2	4	6	8	10	12
V(lts)	30.00	14.87	7.45	5.00	3.76	3.00	2.5
V = f(**P**)							

5. Experimentalmente para un "*gas ideal*" (por ej, hidrógeno, aire) a temperatura constante se observa que el *volumen* disminuye al aumentar la *presión*. R. BOYLE descubrió que para este caso existía una relación muy simple entre presión y volumen, que estos parámetros variaban en forma "*inversamente proporcional*" .

O sea que, $\mathbf{V} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{P}}$ (ley de BOYLE -MARIOTTE para un gas ideal).

a) Al respecto te pedimos que muestres que:

i) "para un gas ideal el gráfico de P.V versus P es una (*semi*) recta // eje horizontal"

ii) el gas analizado en la actividad 4 es un *gas ideal* .

b) Se realiza una adecuada experiencia con el objetivo de analizar si el Nitrógeno, a 0ºC, se comporta como un gas ideal. Se obtiene la siguiente f_{num} :

	P(atm)	100	200	400	800
T= 0ºC	**V**(lts)	0.01	0.0052	0.0031	0.0022

Dirías que el Nitrógeno a 0ºC se comporta como un gas ideal? Porqué?

c) Se sabe que para un gas ideal si **P=** ***cte*** entonces **V,** el volumen del gas, depende linealmente de **T,** la temperatura del gas. (ley de Gay-Lussac, Taller 6). Cabe entonces preguntar si existirá alguna ***temperatura*** para la cual el nitrógeno se comporte como un *gas ideal.* Para contestar esta pregunta repetimos la experiencia a distintas temperaturas: 400ºC; 200ºC ; 50ºC ; -25ºC ; -70ºC. (Por defecto de procedimiento algunas lecturas no se han podido registrar)

	P(atm)	1	200	400	600	800	1000
T=400ºC	**V**(lts)	1	0,0056	0,0030	-------	0,0018	0,0015
T=200ºC	**V**(lts)	1	0,0056	0,0031	0,0024	-------	0,0017
T= 50ºC	**V**(lts)	1	0,0054	--------	0,0025	0,0022	0,0019
T= 20ºC	**V**(lts)	1	0,0053	0,0032	0,0027	0,0023	0,0020
T= -25ºC	**V**(lts)	1	--------	0,0033	0,0028	0,0024	0,0021
T= -70ºC	**V**(lts)	1	--------	0,0034	0,0029	0,0028	0,0024

Te pedimos que hagas el análisis de estos datos e informes que se puede decir, acorde a ello, del Nitrógeno. Para organizar tu búsqueda te proponemos que te apoyes en el gráfico que te damos a continuación; que analices la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) P.V aumenta al aumentar P.

b) P.V > 1 para toda P.

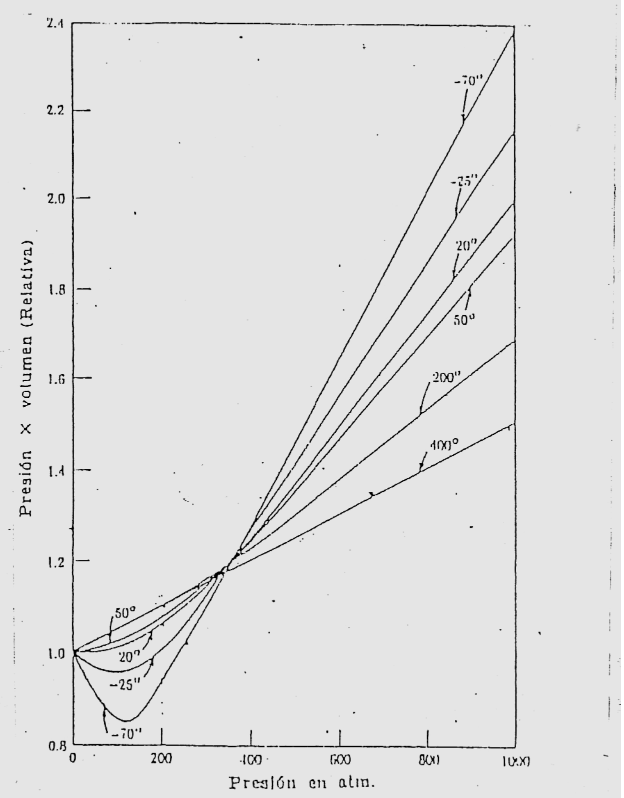
c) P.V > 1 para toda temperatura T

d) El nitrógeno se desvía del comportamiento ideal para toda T

e) A una *misma presión*, ***P.V*** depende de la temperatura.

f) A una *misma presión*, ***V*** depende de la temperatura .

g) Si ninguno de los parámetros, P, V ó T, se mantiene constante, la variación de uno de ellos, depende de la variación de los otros dos.



4.2. Variación del producto presión × volumen del nitrógeno

6. P, V, y T se encuentran interrelacionados; o sea, se influyen mutuamente, el valor de *uno cualquiera de ellos depende del de los dos restantes.* Experimentalmente se halla que P es *función* de V y T ; o sea, que P = f (V; T).
En particular se encuentra que:

☞ los <u>*gases ideales*</u> satisfacen la ecuación de estado: **P.** $\boldsymbol{v}$ **=** R **.T**

☞ los <u>*gases reales*</u> satisfacen la ecuación de estado (la más conocida y usada):

$$\left(\mathbf{P} + \frac{a}{v^2}\right) . \left(v - b\right) = R\,.\mathbf{T} \qquad \text{(Ecuación de Van der Waal´s) ;}$$

con: v = volumen molar, [lt/mol] ; **P=** presión, [atm] ; **T=** temperatura, [ºK] ;
R = cte de los gases (R = 0,082 lts.atm/mol ºK); a , b $\in R^+$, coeficientes de corrección necesarios para ´*adaptar*´ la ecuación de los gases ideales a los gases reales.

Al respecto de las *ecuaciones de estado* propuestas, te pedimos:

a) Obtener $v = f$ (P; T) para el caso de un *gas ideal*. Indicar V ó F :

i) Para P = cte ; f es del tipo lineal . (ley de GAY-LUSSAC)

i) Para T = cte ; f es del tipo recíproca. (ley de BOYLE –MARIOTTE)

b) Obtener $\mathbf{P} = f(\,v\,; \mathrm{T}\,)$ para el caso de un *gas real*. Indicar V ó F :

i) Para T = 20 ºK ; $\mathbf{P} = f(v)$ con $f(v) = \dfrac{1{,}64}{v-b} - \dfrac{a}{v^2}$

ii) Para T = 20 ºK ; f es del tipo recíproca(*generalizada*).

iii) Para T = 20 ºK ; graf f es una hipérbola trasladada.

iv) Para T = 20 ºK ; Dom $f = \mathbf{R}^{+}$.

v) Para T = cte ; f es inyectiva.
Sugerencia: mostrar que resolver la ecuación $f(v) = \mathrm{P}^*$ (valor fijo de presión) conduce al planteo de una ecuación polinómica de grado 3. Concluir.

c) Para cada gas las constantes de Van der Waal´s se determinan experimentalmente. Así, para el dióxido de carbono se ha hallado que:
$\mathbf{a} = 3.592$ $\mathrm{lts^2 atm/mol^2}$ y $\mathbf{b} = 0.04267$ lts/mol.

Graficar acudiendo ***Excel*** la relación dependencia entre **P** y v a temperatura constante, para el dióxido de carbono, en los siguientes casos:

i) utilizando la ecuación de Van der Waal´s, para **T** = 270ºK , 300ºK , 350ºK . Realizar los gráficos en un entorno de $v = 0.25$, ajustando las escalas en los ejes para que se muestren valores en los siguientes rangos: $0.05 < v < 0.5$, $0 < \mathbf{P} < 150$. Tomar $\Delta v = 0.05$

ii) Para T = 300ºK comparar la gráfica obtenida tratando al dióxido de carbono como gas real versus la obtenida usando la ley de los gases ideales.

7. Experimentalmente se observa que para temperaturas muy grandes el término $\dfrac{a}{v^2}$ es prácticamente despreciable; que $\mathbf{P} = \dfrac{R.T}{v-b}$ es en tal caso un *buen modelo* para el comportamiento de un gas real.

a) Para el caso de un *gas real a temperaturas muy grandes* (↑), indicar V ó F :

i) Para T = cte ↑ ; $\mathbf{P} = h(v)$ con $h(v) = \dfrac{R.T}{v-b}$

ii) Para T = cte↑ ; ***graf h*** es una hipérbola trasladada.

iii) Para T = cte↑ ; h es del tipo recíproca(*generalizada*).

iv) Para T = cte ↑ ; Dom $h = \mathbf{R}^{+}$.

v) Para T = cte ↑ ; h es inyectiva.
Sugerencia: mostrar la ecuación $f(v) = \mathrm{P}^*$ tiene ***solución única***.

vi) Para T = cte ↑; v *disminuye* al aumentar P.

vii) Para T = cte ↑; existe un valor límite ***no nulo*** para la compresión de un gas. (En otras palabras: existe un ***tope*** para la disminución del volumen; v no puede hacerse *menor* que ese valor aún cuando se aumente la presión *tanto como se quiera)*. (Marcar este comportamiento en el ***graf h***, hallar el valor *tope* de v)

viii) Para T = cte ↑ y ***P*** la presión a esa temperatura cuando el volumen es v,

P es inversamente proporcional a la diferencia entre v y el valor tope de v.

b) En el sistema ***v*-P** que se adjunta se ha graficado la curva **C =** ***graf h***, con ***h*** función que permite obtener la presión **P** correspondiente a cierto volumen ***v*** de un gas real a temperatura muy ´grande´ , y constante.

Se pide:

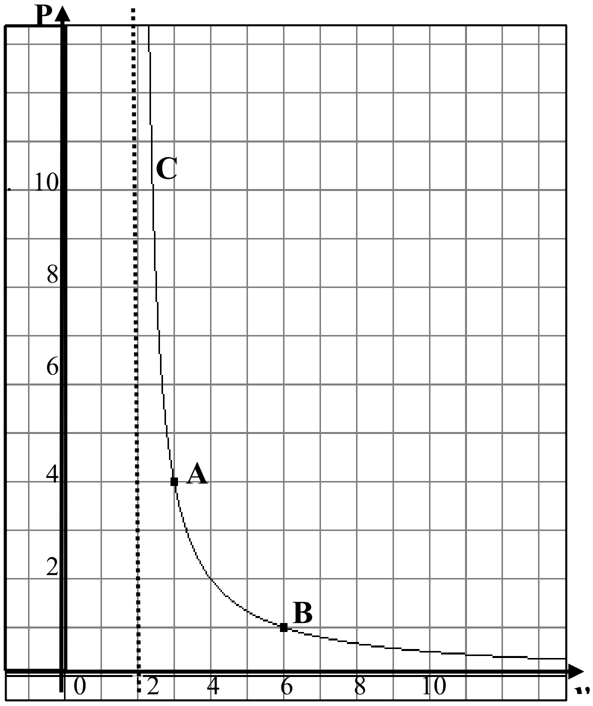
i) Dar las coordenadas de **A** y **B .** en el sistema ***v*-P** .

ii) Determinar la ecuación de ***h*** en el sistema ***v*-P** .

iii) Construir, en el sistema ***v*-P**, un *nuevo sistema de referencia*, $\boldsymbol{\varpi}$ **-** ***p***, de modo que los *nuevos ejes coordenados,* $\boldsymbol{\varpi}$ y ***p**,* coincidan con las asíntotas de **C**.

iv) Dar las coordenadas de **A** y **B** en el *nuevo sistema de referencia*.

v) En el sistema $\boldsymbol{\varpi}$ **-** ***p*** ; hallar la ley de **k**, tal que **C = graf k.**



vi) Indicar V ó F:

" *cambiar* el sistema de referencia por otro convenientemente elegido determina que la función que describe **C** pase de *recíproca generalizada* a *recíproca*".

8. ***Calentamiento ´artificial´ versus enfriamiento ´natural´ .***

Colocamos agua en un recipiente, la ponemos al fuego y medimos la temperatura del agua a ciertos intervalos de tiempo. En el preciso instante en que el agua comienza a hervir la retiramos del fuego y, para que se enfríe más rápido, la dejamos en una mesa, en el jardín. (*en la radio escuchamos que hace mucho frío; que la temperatura es de 0ºC!!!).* Allí continuamos midiendo la temperatura del agua a intervalos de 5 minutos con la intención de ver en que momento la misma alcanza la temperatura inicial; particularmente, *si tarda lo mismo en calentarse en forma ´artificial´ que en enfriarse en forma ´natural´.*

Durante el proceso observamos que el agua alcanza la temperatura de ebullición a los ***15*** minutos de haber comenzado a calentarla, que durante esos **15´** la velocidad de calentamiento se mantiene constante.

La siguiente tabla presenta el registro de datos obtenidos:

t - (min)	0	3	6	9	10	14	20	25	30	35	40	45	50
T- (ºC)	25	----	55	-----	75	95	75	60	50	42.8	37.5	33.3	30

a. Detectas un "patrón de comportamiento" en los datos? Cuál o cuales? ¿A qué función/es remite lo que se "lee" de la tabla?

b. Halla la ***función*** que describe el fenómeno investigado desde que el agua se coloca en el fuego, su ***dominio*** según ***contexto.***

c. Completa los valores que no registramos en la tabla.

d. Halla el o los instantes en que la temperatura del agua es de 40ºC.

e. Halla el o los instantes en que el agua alcanza la temperatura ambiente.

f. Finalmente resuelve la cuestión investigada; el agua; *tarda lo mismo en calentarse hasta cierta temperatura que en enfriarse luego, en forma natural, desde esa temperatura hasta la temperatura inicial ??* .

9. a) Al investigar el poder bactericida de un compuesto se observa que si "P" representa el número de bacterias presentes en la muestra "t" horas después de agregado el bactericida, entonces $\mathbf{P} = 10^3\,\dfrac{48-4t}{t+6}$.

Se pide:

i) Número de bacterias al momento de agregar el bactericida (P_o).

ii) Tiempo en que $P = P_o/2$. Este tiempo se llama "***t medio***" y se indica $\boldsymbol{t_{1/2}}$ (¿porqué ?). Intervalo de tiempo en que $P > P_o/2$.

iii) ¿Diría Ud. que para " $\boldsymbol{t = 2.\, t_{1/2}}$ " se eliminan todas las bacterias?
Si así fuera, ¿qué tipo de relación habría entre $\Delta P = P - P_o$ y $\Delta t = t - t_o$?, ¿ pasa esto en este caso? .

iv) *Calcule* el tiempo efectivamente requerido para eliminar todas las bacterias si el compuesto conservara su poder bactericida indefinidamente.

v) En el prospecto dice que el compuesto conserva constante su poder bactericida por espacio de12 hs. ¿Es esto cierto?,¿porqué? Relacionar los items anteriores.

vi) Dar la *función* P que define la ecuación del bactericida. Su gráfica.

b) Para otro bactericida se halla que $\boldsymbol{p} = 10^3\,\dfrac{24-4t}{t+6} + 4000$. Se pide:

i) Número de bacterias al momento de agregar el bactericida (p_o).

ii) Hallar el $\boldsymbol{t_{1/2}}$ para este bactericida. Intervalo de tiempo en que $p \geq p_0/2$.

iii) *Calcule* el tiempo requerido para eliminar todas las bacterias si el compuesto conservara su poder bactericida indefinidamente. Si no pudiera calcular este tiempo proponga un método para dar una *´estimación´* del mismo.

iv) Si el compuesto conserva su poder bactericida en forma *´efectiva´* por espacio de 4 días, ¿ llega a e*liminar* un 80% de p_o ?

vi) Dar la *función* p que corresponde al bactericida. Su gráfica.

vii) ¿Cuál de los dos bactericidas usaría?

ANEXO X

❶ *Función Recíproca – Recíproca Generalizada*

Con el nombre de ***´recíproca´*** identificamos a la función que describe la *´inversa proporcionalidad´* entre dos variables.

recíproca → $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbf{R}.$

gráfica f → ***hipérbola*** $\begin{cases} \bullet \text{ centro en el origen de coordenadas} \\ \bullet \text{ asíntotas coincidentes con los ejes coordenados} \end{cases}$

En más de una ocasión puede darse que no sean las *propias variables* las *inversamente proporcionales* sino un *´corrimiento´* de las mismas: $y - \beta = \frac{k}{x-\alpha}$; $k, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

En tal caso, hablamos de ***´recíproca generalizada´*** :

recíproca generalizada → $f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$; $k, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

(u ***homográfica***) → $f(x) = \frac{a.x+b}{c.x+d}$; $a, b, c, d \in \mathbf{R}.$

gráfica f → ***hipérbola trasladada*** $\begin{cases} \bullet \text{ centro en } (\alpha ; \beta) \\ \bullet \text{ asíntota horizontal} \rightarrow y = \beta \\ \quad \text{asíntota vertical} \rightarrow x = \alpha \end{cases}$

Vemos que en cualquier caso (*recíproca* o *recíproca-generalizada)* la curva asociada es ***una hipérbola***; que, en razón de ello, lo que caracteriza a la *inversa proporcionalidad* de dos variables (corridas o no) queda descripto por este tipo de curva.

Así, y dado que *el traslado de una curva no cambia sus características*, como ***función prototipo*** para esta clase de funciones tomamos la ***recíproca generalizada*** .

⏩ ***función prototipo:***

recíproca generalizada → $y = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$; $k, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$

(u ***homográfica***) → $y = \frac{a.x+b}{c.x+d}$; $a, b, c, d \in \mathbf{R}.$

⏩ ***curva prototipo*** → ***hipérbola*** $\begin{cases} \bullet \text{ centro en } (\alpha ; \beta) \quad (\text{ó } (-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c})) \\ \bullet \text{ asíntota horizontal} \rightarrow y = \beta \quad (\text{ó } y = \frac{a}{c}) \\ \quad \text{asíntota vertical} \rightarrow x = \alpha \quad (\text{ó } x = -\frac{d}{c}) \end{cases}$

Observación:

$$y = \frac{k}{x-\alpha} + \beta \;\rightarrow\; y - \beta = \frac{k}{x-\alpha} \;\rightarrow\; (y - \beta).(x - \alpha) = k$$

O sea, lo que caracteriza la inversa proporcionalidad es que exista un punto $\mathbf{I}(\alpha;\beta)$ (el de intersección de las asíntotas) tal que el producto de las *variables ´corridas´* a ese punto ($X = x - \alpha$, $Y = y - \beta$) es constante.

* En particular si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, o sea $\mathbf{I}(0;0)$, entonces $y \,.\, x = k$

NOTA :

Los términos o expresiones usados en matemática para referir a las funciones o a propiedades algebraicas de las mismas, no siempre coinciden con los utilizados en otros campos científicos. Dado que nuestro objetivo es resolver problemas que involucran a otras disciplinas además de la matemática, creemos conveniente usar ambas terminología (la propia y la de las otras disciplinas) en la actividades propuestas. Así, para realizar tales actividades tendremos en cuenta que:

1) la afirmación ***"u varía directamente con v"*** ó "***u es directamente proporcional a v***" significa que $u = k\,v$ para algún número real k (k es la "constante de proporcionalidad")

2) la afirmación "***u es directamente proporcional a la enésima potencia de v*** " significa que $u = k\,v^n$ para algún número real k y n un real positivo

3) la afirmación ***"u varía inversamente con v"*** ó "***u es inversamente proporcional a v***" significa que $u = \frac{k}{v}$ para algún número real k .

4) la afirmación "***u es inversamente proporcional a la la enésima potencia de v***" significa que $u = \frac{k}{v^n}$ para algún número real k y n un real positivo.

TALLER 9

OBJETIVO: *Función Exponencial*

El objetivo general del taller es estudiar en profundidad la *clase* o *familia* de las ´***exponenciales***´. El logro de este objetivo, según lo ya establecido, se propone a partir del estudio en profundidad de la ***función prototipo*** de la respectiva clase y se implementa a través de la ***resolución de problemas*** que involucren exponenciales.

Requisitos para el abordaje del taller: el objetivo de este taller son la funciones exponenciales; luego, las actividades planteadas demandan el conocimiento y dominio de este tipo de función; en particular, el de las ***ecuaciones prototipos*** y ***curvas prototipos*** asociadas a ellas con especial énfasis en el significado (o efecto sobre la gráfica) de los coeficientes de la correspondiente ecuación.
Este conocimiento, siempre necesario, lo es más aún cuando por *uso y costumbre* existen formas de la ecuación prototipo que se imponen sobre la *básica* (la asociada a la definición de la función), que es lo que sucede en el caso de la exponencial.
En este caso, la ***ecuación prototipo básica*** para la exponencial es $y = b^x$. Pero entre las exponenciales existe una que se destaca particularmente (la de base ´***e***´) de modo que es un hecho *habitual* que las exponenciales se representen siempre a partir de una potencia de base ´***e***´ (por ende, con *otra forma para la ecuación prototipo*).

➻ *función prototipo*

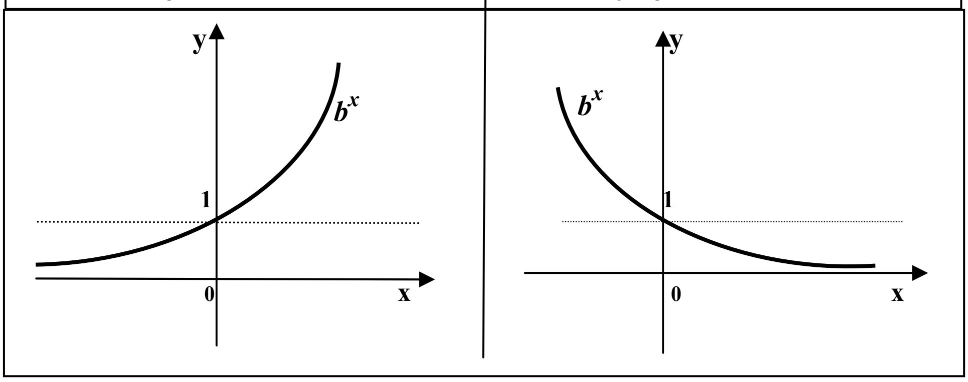
* ***ecuación prototipo ´básica´***: $y = b^x$ con $b > 0$, $b \neq 1$.

* ***ecuación prototipo ´habitual´***: $y = y_o\, e^{\alpha t}$; $y_o, \alpha \in \mathbf{R}$

* ***Dominio:*** **R**

➻*curva prototipo* → *" exponencial ".*

b > 1	*0< b < 1*



⏭ **PLAN DE ATAQUE (*creciente*).** ***Modelización a través de funciones.***

I-II) ***<u>Reconocimiento de la situación</u>*:**

- *<u>reconocer tipo de problema</u>*: existencia de *´al menos dos magnitudes variables relacionadas entre sí´.*
- realizar figuras, esquemas o gráficos que ayuden a *<u>visualizar el problema</u>*.
- *<u>reconocer variables</u>*: dependiente (***v.d.***) e independiente (***v.i.***).
- *<u>etiquetar</u>* y *<u>describir</u>* las variables detectadas.
- explicitar la *<u>incógnita</u>*.
- *<u>resumir</u>* todo otro *<u>dato</u>* o *<u>información</u>* útil a la resolución del problema; por ejemplo, fórmulas o leyes conocidas relativas al proceso motivo del problema.

III) ***<u>Planificación</u> (de un proceso para reconocer "funciones tipo").***

- *<u>Por trabajo algebraico</u>* a partir de leyes o formulaciones *conocidas* y explicitas como ***dato del problema.*** (en caso de haberlas)
- <u>Por *´prueba y error´*</u>; es decir probando y descartando *´funciones tipo´*, en forma metódica, hasta llegar a la que mejo *´ajuste´* a los datos.
  Si ***f*** no es periódica, el trabajo se puede organizar acorde al siguiente plan.

<u>Ley de f</u> *por prueba y error, comenzando con la lineal*

(1) lineal (*directa proporcionalidad*), ☑(taller 6)
(2) polinómicas (*cuadrática*), ☑ (taller 7)
(3) recíprocas (*inversa proporcionalidad*), ☑ (taller 8)
(4) exponenciales (o sus inversas, las *logarítmicas*) ☐ (estamos aquí)

En lo que sigue indicamos con ***x*** a la ***v.i.***, con ***y*** a la ***v.d.***; en el caso concreto de un problema dado, usar *´las letras propuestas en el paso I-II del Plan de Ataque´*

IV) ***<u>Ejecución del plan</u>: análisis de la situación al efecto de determinar el tipo de función que modeliza el proceso.***

<u>Ley de f .</u> (*por prueba y error, comenzando con la lineal*).

(1) ***f : ¿lineal ?*** → ¿ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = cte ***?*** : **SI .** [🛠 → Taller 6].
NO. **[*¿ f ?* → (2)].**

(2) ***f : ¿polinómica grado*** **> 1? :** **SI .** [🛠 → Taller 7].
NO. **[*¿ f ?* → (3)].**

(3) ***f : ¿ recíproca (generalizada)*** **?:** **SI .** [🛠 → Taller 8].
NO. **[*¿ f ?* → (4)].**

(4) ***f* : *¿exponencial*** **?:** **SI** → [🛠 → estamos aquí].

🛠 → la forma de realizar el análisis depende de cómo venga dada ***f***.

- ***por una ecuación***, basta detectar si la ecuación tiene la forma prototípica de una exponencial (*básica* ó *habitual*).
- ***por un gráfico cartesiano***: (f_{graf})

  se analiza la curva dato, si esta presenta los rasgos básicos de una *curva exponencial prototípica*: estrictamente creciente (o decrec.), asíntota horizontal (o evidencia de ella). Si así fuera podemos *suponer* pero *no afirmar* que la curva corresponde a una exponencial (evidencia gráfica no es prueba del hecho). (En el ***taller 10*** abordamos esta cuestión: *identificación de curvas; obtención de la ley de **f** con fórmula **y = f(x)***).
- ***por una tabla de valores*** (f_{num}): en este caso tenemos dos opciones para reconocer el tipo de función al que responden los puntos/dato:

  * graficar los puntos/datos, obtener la correspondiente f_{graf}, proceder (→ ***taller 11***).
  * proceder a partir de la tabla, por prueba y error, según el siguiente ´**Plan de Trabajo**´ .

PdeT: (para determinar ***f*** por ´*prueba y error*´)

a. Graficar los *puntos/dato,* unirlos por una curva, hacer una primera conjetura.

b. $y/x = cte$ (Directamente Proporcionales). ***Si*** ? → f lineal. ; ***No***?→ (c).

c. $\Delta y / \Delta x = cte$ ***Si*** ? → f lineal; ***No***?→(d).

d. $y \,.\, x = cte$ (Inversamente Proporcionales). ***Si*** ? → f recíproca; ***No***?→ (e).

e. $(y - \beta).(x - \alpha) = cte$ ***Si*** ? → f rec. gener.; ***No***?→ (**f**).

f. ***¿Existirá algún producto o cociente prototípico que permaneciendo ´cte´ ´delate´ a la exponencial o más aún, la ´ caracterice´ ? .***

ⓘ Un objetivo de este taller es hallar aquello que ´*caracteriza*´ a la exponencial. Así, concluido el mismo, ampliamos el **PdeT** agregando en (**f**.) lo hallado.
" [---------------] = ***cte*** " ***Si*** ? → ***f exponencial***.
No?→ (**g**)

g. ***Otra expresión, elemento o propiedad que informe sobre f.***

➡ ***Si***. *Cuál ? , A qué función ´delata´ ?*
➡ ***NO***. *Acudir a otro método* (→ ***taller 11***)

Ejecución del P de T para la obtención de la ley de f con fórmula y = f (x)

Este paso requiere trabajar con orden y método. Un instrumento que permite sistematizar la búsqueda de ***f*** es la ***tabla ampliada*** **(TA)** que mostramos a continuación. Esta tabla resulta de agregar columnas a la tabla original de *puntos/dato*; columnas en donde evaluamos las ***expresiones*** que ***caracterizan*** a los distintos tipos de función.

TABLA AMPLIADA (TA): (de ser posible, $\Delta x_i = cte$).

		(TA)	*DP ?*	*lineal ?*	*I P ?*		
x	$y = f(x)$	$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$	$\frac{y_i}{x_i}$	$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$	$y_i \cdot x_i$		***ley de f : (por deducción o inducción)***
x_o	y_o	-----------	------	---------	-------		
x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_1 - y_o$					
x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_2 - y_1$					
x_3	y_3	Δy_3					
x_4	y_4						
x_5	y_5						
x							$\Rightarrow y$ = ...
		conclusión	SI / NO	SI / NO	SI / NO		

Resolución: determinación de "la ecuación" que define a una exponencial en el caso que el dato sea una "f_{graf}" ó "f_{num}". (Tabla de Valores).

ⓘ Detectado un ´*patrón*´ en la formación de las imágenes e identificado el ***tipo de función*** al que remite, el siguiente paso es dar la ley de f con fórmula $y = f(x)$.
Para ello procedemos a:

i) ***proponer*** la *ecuación prototipo* asociada a la función tipo reconocida.
ii) ***determinar*** (a partir de los datos) el valor que, en particular y para el caso, corresponde a los parámetros en la ecuación prototipo propuesta en (i).
iii) ***reemplazar*** los parámetros por los valores hallados, dar la ***ecuación de f***.
iv) ***evaluar*** si la ***función*** obtenida proporciona un ***buen modelo**** del proceso o fenómeno que se trata de modelizar.

- ***Si*** → **FIN**.
- ***No*** → Revisar, repetir la experiencia ó, *acudir a otro método*.

b) *Analizar la "razonabilidad" de la solución hallada. (¿buen modelo?).*
En particular aquí podemos:
- *graficar* ***f***, observar si el gráfico se ´ajusta´ a la nube de *puntos/dato*,
- controlar el rango de validez de ***f*** en cuanto a modelo del proceso , etc.

c) *Escribir la respuesta en oración, en forma destacada y precisa.*

d) *Hacer reflexiones de orden " metacognitivo" .*
Escribir el resultado de tales reflexiones de la manera mas operativa posible; es decir, de tal modo que lo hallado pueda ser usado a modo de instrumento o regla para clasificar la función del caso.
*En este caso detectaremos que "**velocidad relativa constante**" ($\Delta y / y = c$) es un rasgo prototípico de las exponenciales; concluimos de ello que esta propiedad proporciona un instrumento para detectar exponenciales:*

$$\Delta y / y = c \;\Rightarrow\; f \text{ exponencial} \,; \qquad \Delta y / y \neq c \;\Rightarrow\; f \text{ “no” exponencial}$$

ACTIVIDADES y PROBLEMAS

1. Dadas f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , cuatro funciones numéricas que varían con continuidad y suavemente de un punto a otro, te pedimos que analices los puntos/ dato que las definen según lo indicado en el **PdeT** y que, <u>de ser posible</u>, indiques que tipo de función son. Acorde a ello, des luego la ley de cada una con fórmula $y = f(t)$.

(Δt = 1)				**(TA)**	***DP?***	***lineal?***	***IP?***	***recíp. gener.?***	***¿… ?***
t		$y = f_1(t)$		Δy_i	y_i / t_i	$\Delta y / \Delta t$	$y \cdot t$	$(y - \beta).(t - \alpha)$	y_i / y_{i-1}
0		*10*	y_o	-------	--------	--------		----------------	--------
1		*8*	y_1	*-2*				----------------	
2		*6*	y_2	*-2*	*3*	*-2*	*12*	----------------	
3		*4*	y_3				*12*	----------------	*2/3*
4		*2*	y_4		*½*			----------------	
con clusión: $f_1(t) =$								***NO***	
t		$y = f_2(t)$							
0		*10*		------	-------	--------		----------------	--------
1		*5*		*-5*		*-5*	*5*	----------------	
2		*2,5*		*-2,5*		*-2,5*	*5*	----------------	
3		*1,25*						----------------	*½*
4		*0,625*						----------------	
con clusión: $f_2(t) =$								***NO***	
t		$y = f_3(t)$							
0		----		------	-------	--------		----------------	--------
1		*10*						----------------	
2		*5*						----------------	
3		*3,33*						----------------	
4		*2,5*						----------------	
con clusión: $f_3(t) =$								***NO***	
t	(t+1)	$y = f_4(t)$		------	-------	--------			--------
0	***1***	*10*							
1	***2***	*5*							
2	***3***	*3,33*							
3	***4***	*2,5*							
4	***5***	*2*							
con clusión: $f_4(t) =$									

2. Las funciones numéricas adjuntas, resultan del recuento de bacterias al que hemos sometido dos cultivos que, según quien nos los vendió, son de "***Streptococcus Lactis***" (***SL***), bacteria que se emplea en la producción comercial de quesos.

t	$y = f$ (t)
0	10
1	20
2	50
3	100
4	170
5	260
6	370

t	$y = p$ (t)
0	10
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320
6	640

y = cantidad de bacterias, en cada instante t

Pero .....empezamos mal, los datos obtenidos experimentalmente indicarían que uno de los cultivos no es de ***SL***. Según lo oportunamente investigado sabemos que una ***población de SL*** **se** ***duplica cada hora***, cualquiera sea la cantidad inicial de partida. Y esto no es lo que *´leemos´* en ambas tablas. Para resolver esta duda vamos construir un instrumento que nos permita reconocer cultivos de *SL* a la vez que ***predecir*** la cantidad de bacterias a largo plazo; o sea, vamos a hallar una función que modelice el crecimiento de estas bacterias en un importante intervalo de tiempo (de ser posible!!).

Te pedimos que investigues esta cuestión e informes por escrito tu conclusión para usar tus resultados como control de los nuestros. Para esto necesitamos que tu informe sea claro, preciso y exhaustivo; o sea, que figuren en el *todos los pasos o razones de tu conclusión.* A continuación entonces te proponemos actividades que te ayudarán a *´ver´* más allá de *´lo evidente´*, informar según lo pedido; también, a dominar la *notación* apropiada al caso.

a) Sabiendo que si ***y = cantidad de SL en cada instante t***, $y = q(t)$ con t en hs.; y que, $\forall\, i \in N_o$, $y_i = q(t_i)$, $y_{i-1} = q(t_{i-1})$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1$; se pide:

(i) Usando la notación indicada, *´traducir al lenguaje matemático´* la propiedad que caracteriza al ***SL;*** o sea, decir lo mismo, pero en *´términos matemáticos´*

(ii) *Indicar V ó F* (justificar): **(I)** "$\forall\, i \in N_o$; $\Delta t_i = 1 \Rightarrow \Delta y_i = cte$ "
(II) "$\forall\, i \in N_o$; $y_i / y_{i-1} = cte$ " .

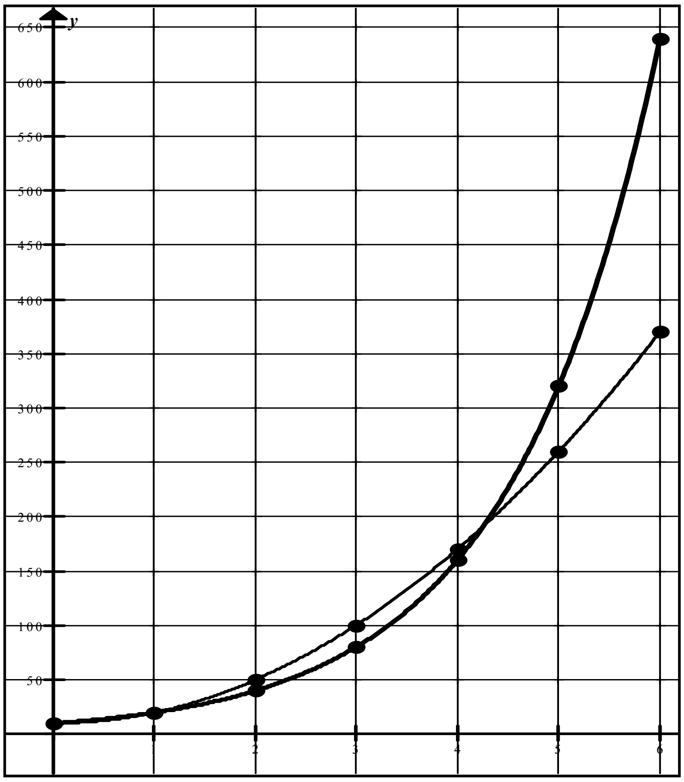
b) Establecer, por simple inspección de f_{num} y p_{num}, si alguna de estas funciones crece *´de la misma forma´* en que crece una población de ***SL.***
* ¿Será posible *´organizar´* el análisis de ***f*** y **p** de tal manera que pueda hacerse en forma sistemática, evitando errores u olvidos y dando a su vez cierta garantía en cuanto a la conclusión obtenida? ¿Existe alguna *´expresión algebraica´* que, calculada e informada en la tabla ampliada, posibilite esto? ¿Cuál?, ¿porqué?

t	$y = f$ (t)	
0	10 (y_o)	
1	20 (y_1)	
2	50 (y_2)	
3	100 (y_3)	
4	170 (y_4)	
5	260 (y_5)	
6	370 (y_6)	

t	$y = p$ (t)	
0	10 (y_o)	
1	20 (y_1)	
2	40 (y_2)	
3	80 (y_3)	
4	160 (y_4)	
5	320 (y_5)	
6	640 (y_6)	

c) Las siguientes curvas se obtienen al graficar las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{p}$ con un utilitario que busca y grafica la función (con dominio en los reales) que mejor *ajusta* a la nube de *puntos/dato*.
Por *simple inspección* de las curvas determinar cual de ellas corresponde a f_{graf} y cual a p_{graf} ; cual estaría describiendo el crecimiento de una población de ***SL.***

¿Qué podría decir de la velocidad de crecimiento en cada caso?



3. **a)** Obtener, por *prueba y error* y completando la **TA**, la ley de $\boldsymbol{p}$ del ***ejercicio 1*** con fórmula $y = p(t)$.

		(TA)	***DP ?***	***lineal?***	***I P?***		
t	$y = p$ (t)	$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$	$\dfrac{y_i}{t_i}$	$\dfrac{\Delta y_i}{\Delta t_i}$	$y_i \cdot t_i$	y_i / y_{i-1}	***ley de p :*** ***(por inducción)***
0	10 (y_o)	----------	------	------	------	-------	$y_o =$ 10
1	20 (y_1)	$\Delta y_1 =$ 10	20			20 /10= 2	$y_1 = 2 \cdot 10$
2	40 (y_2)	$\Delta y_2 =$ 20	20				$y_2 = 2\, y_1 = 2^2 \cdot 10$
3	80 (y_3)	$\Delta y_3 =$ 40	26,66				$y_3 = 2\, y_2 =$ ....
4	160 (y_4)		⋮				
5	320 (y_5)		⋮				
6	640 (y_6)		⋮				
t							y(**t**) = ...
conclus.			~~SI~~	**SI**	**SI**	$y_i =$	
			NO	**NO**	**NO**		

V ó F : **(I)** Si $0 \leq n \leq 6,\ n \in N_o$ entonces $\boldsymbol{y_n / y_{n-1} = cte}$.
(II) Si $0 \leq n \leq 6,\ n \in N_o$ entonces $\boldsymbol{y = 10 \cdot 2^n}$.
(III) **"**la función $\boldsymbol{p}$ crece acorde crece una población de ***SL***".

b) Obtener de ser posible, por *prueba y error* y a partir de la **TA**, la ley de $\boldsymbol{f}$ del ***ejercicio 1*** con fórmula $y = f(t)$.

			DP ?	lineal?	I P?		
t	$y = p$ (t)	$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$	$\dfrac{y_i}{t_i}$	$\dfrac{\Delta y_i}{\Delta t_i}$	$y_i \cdot t_i$	y_i / y_{i-1}	***ley de p :*** ***(por inducción)***
0	10 (y_o)	----------	------	------	------	-------	
1	20 (y_1)	$\Delta y_1 =$ 10	20			20 /10= 2	
2	50 (y_2)	$\Delta y_2 =$ 30	25				
3	100 (y_3)	$\Delta y_3 =$ 70				100 /50= 2	
4	170 (y_4)						
5	260 (y_5)						
6	370 (y_6)						
t							
conclus.			~~SI~~	SI	SI		
			NO	NO	NO		

Luego, indicar V ó F , justificar:

(i) $\boldsymbol{f}$ tiene la misma característica algebraica que $\boldsymbol{p}$.

(ii) $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{p}$ no son funciones del mismo *´tipo´* .

(iii) Existen $a, b, c \in \mathbf{R}$ tal que $f(t) = a\,t^2 + b\,t + c$.

4. Un biólogo, en un viaje exploratorio, da con una especie de batracios que, según le parece, sería *desconocida*. Decide entonces estudiar el crecimiento de tales especímenes. Así, toma uno de ellos (recién nacido) y lo pesa cada semana, durante 6 semanas. Los valores que obtiene están registrados en la tabla adjunta Si $[t] =$ *semanas*.; ***m = peso del espécimen*** , $[m]=$ *gr*.; se pide:

a) Obtener la ley de $\boldsymbol{f}$, función que modeliza el crecimiento del espécimen en 6 semanas, si durante ese tiempo no se observan cambios abruptos en el proceso.

		(I)	(II) DP?	(III) I P?	(IV) lineal?	(V)	(VI)	(VII)
t	$m = f$(t)	Δm_i	$\dfrac{m_i}{t_i}$	$m_i \cdot t_i$	$\dfrac{\Delta m_i}{\Delta t_i}$	$\dfrac{\Delta m_i}{m_{i-1}}$	m_i / m_{i-1}	***ley de m :*** ***(por inducción)***
0	5 (m_o)	-----	----	------	-------	-------	-------	$m_o = 5$
1	20 (m_1)	$\Delta m_1 = 15$						
2	80 (m_2)							
3	320 (m_3)							
4	1280 (m_4)							
5	5120 (m_5)							
6	20480							
t								$m(t) =$ ....
concl.			SI	SI	SI			
			NO	NO	NO			

b) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones, indicar en función de que *´columna´* (I-II-III...) de la **TA** concluye su respuesta**.**

(b1) $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{5.4}^{t}$, $\forall\, t \in \boldsymbol{D}$ = dominio natural de $\boldsymbol{f}$.

(b2) $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m_o}.\boldsymbol{4}^{t}$, $\forall\, t \in \boldsymbol{D}$ = dominio natural de $\boldsymbol{f}$; $\boldsymbol{m_o} = f(0)$.

(b3) *El peso del espécimen se cuadruplica cada semana.*

(b4) *El peso, a la semana , es 4 veces el peso inicial .*

(b5) *El incremento de peso, cada semana, es constante.*

5. a) Demostrar que la siguiente afirmación es válida para todo $b > 0$ y $b \neq 1$

Si $y = y_o\, b^{t}$ entonces $\forall\, t$, $y_{(t+1)} = b.\, y_{(t)}$ [*y final* es ***b*** veces el *inicial*]

b) Demostrar que la siguiente afirmación es válida para todo $b > 0$ y $b \neq 1$

si $\forall\, t$; $y_{(t+1)} = b.\, y_{(t)}$ entonces $y = y_o\, b^{t}$.
[*y final* es ***b*** veces el *inicial*]

Sugerencia, completar la siguiente tabla y concluir:

t (*hs.*)	0	1	2	3	4		***n***	***t***
y	y_o	$y_1 = b\, y_o$	$y_2 = b\, y_1$	$y_3 = b\, y_2$	$y_4 = b\, y_3$			
	y_o	$y_1 = b\, y_o$	$y_2 = b\, y_o^2$					

Reflexiones:

De (a) y (b) se concluye que: " $y_{(t+1)} = b.\, y_{(t)}$, $\forall\, t \Leftrightarrow y = y_o\, b^{t}$ " .

O sea, se obtiene ***una propiedad*** que caracteriza a la exponencial:

- $\dfrac{y(t)}{y(t-1)} = b$ ***(cte)*** → ***rasgo "característico" de la exponencial .***
- ***b*** → ***´factor´ de variación*** *(entre dos valores consecutivos, con $\Delta t = 1$) .*

ⓘ ***Respecto de este tipo de problemas se sugiere trabajar de la siguiente manera:***

1º) Detección de una exponencial :

$$¿\ \frac{y(t)}{y(t-1)} = k\ (cte)? \begin{cases} \textbf{SI}: & \textit{la función es una exponencial .} \\ \textbf{NO}: & \textit{la función "no" es una exponencial.} \end{cases}$$

2º) Determinación de "la ecuación" con fórmula $y = y_o\, b^{t}$

$$\frac{y(t)}{y(t-1)} = k \Rightarrow \boxed{\forall\, \Delta t = 1;\ \text{la } y \text{ final es } k \text{ veces la inicial}} \Rightarrow k = \textit{factor de var.}$$

$\boxed{y(t) = y_o\, b^{t}}$ $\xrightarrow{\textit{datos}}$ $\boxed{y_o = y(0);\ b = k \text{ (factor de variación)}}$ $\xrightarrow{\textit{Concl.}}$ $\boxed{y(t) = y(0).\, k^{t}}$

6. Se realiza una experiencia con el objetivo de estudiar el comportamiento de la "mosca de la fruta". Para ello se coloca cierta cantidad de ellas en un recipiente acondicionado al efecto. Luego, diariamente, se cuenta la cantidad de moscas presentes, se registran los datos en una tabla; la que se indica a continuación:

t = tiempo (*días*)	0	1	2	3	4	5		***t***
P = cantidad de moscas	100	300	900	2700	8100	24300	....	
$\mathbf{P}_i / \mathbf{P}_{i-1}$	------							

a) Al respecto se pide hallar la ley de **P = P**(t)**,** función que describa el crecimiento de la población de moscas de la fruta (al menos por un cierto tiempo).

b) Calcular con dicha ley la cantidad de moscas al cabo de 10 días; 50 días y al año. Discutir la razonabilidad de los resultados si las condiciones físicas no cambian.

a) ***Incógnita*: ¿ P = P(*t*)? / P =** cantidad de moscas en el instante ***t*** (*en días*).

1º) Detección de una exponencial

$$¿\ \frac{P(t)}{P(t-1)} = k\ (cte)\ ? \quad \begin{cases} \textbf{SI}: \ k = 3 \Rightarrow \text{la función } P \text{ es exponencial.} \\ \cancel{\textbf{NO}: \text{ la función "no" es una exponencial.}} \end{cases}$$

***2º) Determinación de "la ecuación" con fórmula* ¿ P =** $P_o\ b^t$

$\dfrac{P(t)}{P(t-1)} = 3 \Rightarrow \forall\ \Delta t = 1$; la **P** final es "*3*" veces la inicial $\Rightarrow$ ***k*** (*factor de var.*)= ***3***

$\boxed{\mathbf{P}(t) = P_o\ b^t}$ $\xrightarrow{datos}$ $\boxed{\begin{array}{l} P_o = P(0) = 100 \\ \mathbf{b} = 3 \text{ (factor de variación)} \end{array}}$ $\xrightarrow{Concl.}$ $\boxed{\mathbf{P}(t) = 100 \cdot 3^t}$

b) Si las condiciones de la experiencia no se modifican (las moscas siguen en el mismo hábitat, a igual temperatura , etc) y la ley obtenida fuera válida para todo instante posterior al que se comienza a hacer el recuento, tendríamos que:

P(10) = 5904900 = **5. 905 10^6**

P(50) = 71789798769185258877024900 = **7. 179 10^{25}**

P(365) = 14101261703381586160482247283715713803674820720971346836781077615250

885185770956637134186224080859100275798560941219832297141539616897625434900

69907294250640433911292262840584300

P(365) = 1.410126170338158616048224728371571380367 $\cdot 10^{176}$

Puede ser que se tenga dudas acerca de la razonabilidad de **P**(50) pero, sin dudas, no hay dudas respecto a P(365): es absolutamente imposible. Esto indica que el dominio natural de esta función no es $\mathbf{R}_o^+$ **.** Un problema interesante y útil es el de averiguar hasta que instante la ecuación hallada proporciona un buen ajuste al crecimiento natural de las moscas de la fruta.

7. Se ´mide´ el crecimiento de una población de bacterias realizando el conteo del número de ellas y se observa que las mismas se ***duplican día a día***. Sabiendo que se parte de una población de **20** bacterias, se pide:

a) hallar **P** = **P**(t), función que describa el crecimiento de la población de bacterias ***Trabajar acorde al plan indicado en el ejercicio 5.***

b) Si sabemos que el modelo proporciona un buen ajuste del crecimiento de las bacterias por el término de ***15 días***, se pide:

i) predecir cuantas bacterias habrá al cabo de una semana.

ii) hallar cuanto tiempo debe pasar para tener aprox. 100.000 bacterias.

iii) ¿y para tener aprox. 5.10^6 bacterias?; ¿ se puede usar la ley obtenida?

8. Se ´mide´ el crecimiento de una población de bacterias realizando el conteo del número de ellas y se observa que las mismas se ***triplican día a día.*** Sabiendo que se parte de una población de **5** bacterias, se pide:

a) hallar **P** = **P**(t), función que describa el crecimiento de la población de bacterias ***Trabajar acorde al plan indicado en el ejercicio 5.***

b) Si sabemos que el modelo proporciona un buen ajuste del crecimiento de las bacterias por el término de ***15 días***, se pide:

i) predecir cuantas bacterias habrá al cabo de una semana.

ii) hallar cuanto tiempo debe pasar para tener aprox. 100.000 bacterias

iii) ¿existirá un instante en que la cantidad de bacterias de este ejercicio sea ***igual*** a la del ejerc.7 (suponiendo que el recuento se inicia el mismo día)?

c) En la tabla adjunta se presenta el registro de los valores de dos funciones, P1 y P2, las cuales describen el comportamiento de las poblaciones del ej. 7 y 8.
Se pide:

i) indicar que función corresponde al ej. 8.

ii) controlar las respuestas dadas ej 7 y 8.

iii) indicar que población llega más rápido a las 100.000 bacterias.

iv) indicar hasta que día (aprox.) la población del ejercicio 7 es mayor que la del ejercicio 8.

v) las gráficas de P1 y P2: ¿se cortan en algún punto?; ¿porqué? Si se cortan indicar el intervalo de long. ***1*** en el que se produce el corte. Graficar P1 y P2.

vi) explicar porqué, si bien la población inicial del ej. 8 es menor que la del ej. 7 llega un momento en que la sobrepasa y a partir de allí es siempre mayor.

t	P1	P2
0	20	5
1	40	15
2	80	45
3	160	135
4	320	405
5	640	1215
6	1280	3645
7	2560	10935
8	5120	32805
9	10240	98415
10	20480	295245
11	40960	885735
12	81920	2657205
13	163840	7971615
14	327680	23914845
15	655360	71744535
16	1310720	215233605
17	2621440	645700815
18	5242880	1937102445
19	10485760	5811307335
20	20971520	17433922005

9. Se realiza nuevamente una experiencia en la que se analiza el crecimiento de una población de bacterias y se determina la misma ***se duplica cada tres días***. Sabiendo que se parte de una población de ***10*** bacterias, se pide:

a) * Completar la tabla que se presenta a continuación,
* Hallar el "*patrón*" que rige la formación de los valores hallados.
* Inducir la ley de **P= P**(t) para el caso investigado en esta oportunidad.

t (días)	**0**	**3**	**6**	**9**	**t**
P	*10*	*20*	*40*	*80*	
P	$10.\mathit{1} = \mathbf{10\,.2^0}$	$10.\mathit{2} = \mathbf{10.\ 2^1}$	$10.\mathit{4} = \mathbf{10.\ 2^2}$		$10.\ \mathbf{2}^{\dots\dots}$

b) En base a lo concluido en (a), generalizar la regla obtenida en el ejercicio 5. Es decir, obtener una "regla" para el caso en que el dato es la variación de la función en un ***período genérico de "n" días*** (horas, meses.....) y no en la unidad de tiempo

P = P*(t)* → *datos* → $P_o = P\ (0)$; **b** = ***factor de variación***; **n** = ***período entre dos registros*** → *Concl.* → $P(t) = P_o . b^{\frac{\square}{\square}}$

c) Si se sabe que $P(t) = P_o\ .\ 3^{\frac{t}{5}}$ describe el crecimiento de una población de bacterias; ¿que características diría que presenta el crecimiento de la misma ?

d) ¿cuál de las dos poblaciones diría que crece más rápido? ; ¿o crecen "casi" iguales? ¿Cómo haría para comparar el comportamiento de estas poblaciones?

10. Se realiza una experiencia en la que durante cierto tiempo se analiza el crecimiento de una población de bacterias. Se determina que la misma ***se triplica cada siete días***. Sabiendo que se parte de una población de ***5*** bacterias, se pide:

a) dar la ley de **P= P**(t) para el caso investigado en esta oportunidad.

b) i) predecir cuantas bacterias habrá al cabo de dos semanas.
ii) hallar el tiempo que debe pasar para tener aprox. 1200 bacterias.

11. Se realiza una experiencia en la que durante cierto tiempo se analiza el decrecimiento de una población de bacterias en contacto con un bactericida. Se determina que la misma ***se reduce a la mitad, cada 4 horas***. Sabiendo que se parte de una población de ***8.000*** bacterias, se pide:

a) dar la ley de **P= P**(t) para el caso investigado en esta oportunidad.

b) i) predecir cuantas bacterias habrá al cabo de 12 hs..
ii) hallar el tiempo que debe pasar para tener la mitad de las iniciales.
iii) hallar el tiempo que debe pasar para tener sólo 1 bacteria;
¿y para que se extingan?

12. Un biólogo, en un viaje exploratorio, da con una especie de batracios que, según le parece, sería *desconocida*. Decide entonces estudiar el crecimiento de tales especímenes. Así, toma uno de ellos (recién nacido) y lo pesa cada semana, durante 6 semanas. Los valores que obtiene están registrados en la tabla adjunta

Si $[t] =$ *semanas*.; ***m* = *peso del espécimen*** , $[m]=$ *gr*.; se pide:

(TA)

t	$m = f(t)$	**(I)** Δm_i	**(II)** *DP?* $\dfrac{m_i}{t_i}$	**(III)** *I P?* $m_i \cdot t_i$	**(IV)** *lineal?* $\dfrac{\Delta m_i}{\Delta t_i}$	**(V)** $\dfrac{\Delta m_i}{m_{i-1}}$	**(VI)** m_i / m_{i-1}	**(VII)** *ley de m : (por inducción)*
0	5 (m_o)	-----	----	------	-------	-------	-------	$m_o = 5$
1	20 (m_1)	$\Delta m_1 = 15$						
2	80 (m_2)							
3	320 (m_3)							
4	1280 (m_4)							
5	5120 (m_5)							
6	20480							
t								$m(t) =$ ....
concl.			SI / NO	SI / NO	SI / NO			

Ya vimos, ejercicio 4, que $m = 5 \cdot 4^{t}$ es la función que modeliza el crecimiento durante 6 semanas. Que **4 ,** la base de la exponencial, tiene una interpretación física concreta: indica el *factor de variación* propio de este proceso exponencial .

Veremos ahora otro hecho asociado a la exponencial, el cual, por excelencia, es el que se usa para caracterizar esta función: que el proceso tiene ***" velocidad relativa constante"*** .

a) completar la columna **(V),** indicar **V ó F.**

* *El incremento de peso, cada semana, es proporcional al peso inicial.*

b) Demostrar que la afirmación anterior es válida para toda exponencial; o sea que,

si $y = b^{t}$ *entonces* $\Delta y_{(t+1)} = c \cdot y_{(t)}$ *con* $c \in \mathbb{R}$. $(c = b - 1)$

en definitiva que,

si $y = b^{t}$ ***entonces la variación en y debida a un cambio unitario en*** t ***es proporcional al valor inicial de y , en ese intervalo***

ⓘ Se puede probar que:

" la proporcionalidad entre $\Delta y_{(t+1)}$ e $y_{(t)}$ es una propiedad que tiene la ***exponencial y solo ella***; por ende, una propiedad que la ***caracteriza*** ".

Luego c , es un ***parámetro característico de la exponencial*** .

13. Dadas $y = \mathbf{b}^t$ y $c = \Delta y / y$ (la cte de proporcionalidad del caso), se pide:

a) probar que existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $y = \mathbf{e}^{\alpha t}$**.** (verificar $\alpha = \ln \mathbf{b}$ **).**

b) verificar que "*si* $c \cong 0$ ***entonces*** $\alpha \cong c$ ".

Ayuda:* expresar α y c en función de **b. Usar luego el siguiente resultado: "si $b \cong 1$ entonces $\ln b \cong b - 1$ " (demostrado luego de dar derivada).

ⓘ "***velocidad relativa***"

- $\Delta y / y$ se llama ***velocidad relativa de y*** ó ***razón de crecimiento de y ;***

  Indica el ***cambio en y por cada cambio unitario en t , en relación a y .***

$$y = k\,\mathbf{b}^t \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y / y = c$$

f es una exponencial $\Leftrightarrow$ ***la " velocidad relativa" de f es "constante" .***

ⓘ Si f es una exponencial, ***c,*** no aparece en ninguna de las ecuaciones que definen ***f.***

ⓘ Si la ***velocidad relativa*** de un proceso es ***constante*** se observa que **c,** el valor de esta velocidad, es fácil de estimar experimentalmente. También se observa que en los procesos naturales ***c*** en general es pequeño, por lo tanto muy próximo $\boldsymbol{\alpha}$ (ej. 13). En función de ello lo que se hace en la práctica es reemplazar $\boldsymbol{\alpha}$ por ***c*** en la ecuación habitual, ver luego si esta ecuación proporciona un *´buen ajuste´* de la nube de puntos/dato.

ⓘ En la práctica, la ***velocidad relativa*** del proceso usualmente se da en términos de ***porcentaje.*** O sea, se informa, ***c.100 = ´porcentaje´ de variación ´relativa´ en la unidad de tiempo***.

ⓘ ***Aplicación:*** *Crecimiento en el mundo natural.*

Entre los muchos los fenómenos naturales que se describen con exponenciales tenemos los de *´crecimiento natural´* (por ejemplo el crecimiento de la población humana).

Uno de los problemas que ´amenaza´ al género humano es el crecimiento de la población, que esta crezca más rápido que la producción de alimentos necesarios para su subsistencia. Así, esta cuestión ha sido y es muy estudiada por científicos de todas las áreas y de todo el mundo en busca de un *´buen modelo´* para el crecimiento de una población.

Un primer modelo se basó en la hipótesis de que "***las poblaciones crecen con una rapidez proporcional a su tamaño***". Esta hipótesis, en nuestros términos, dice que *"**el cambio en P (población), en la unidad de tiempo, es proporcional a P** "* ; o sea que, $\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{c}.\,\boldsymbol{P}$

De aquí se concluye que la ***función que modeliza el crecimiento de poblaciones es una exponencial de la forma*** $P = P_0\, \mathbf{e}^{\alpha t}$ **.** Si además ***c,*** *la* ***tasa ó velocidad ´relativa´ de crecimiento,*** es pequeña, se reemplaza α por ***c*** .

En poco tiempo se observa que esta hipótesis, era válida sólo en condiciones ideales o durante un período relativamente corto; que si bien las poblaciones *comienzan creciendo en forma exponencial*, hay un momento en que esta situación cambia. Se reformula el modelo para ajustarlo a la realidad, aparecen otros modelos uno de los más conocidos el debido al matemático y biólogo holandés Verhulst, quien en la década de 1840 propone el modelo que lleva su nombre (conocido también como *´modelo logístico´*). Para este modelo la función que modeliza el crecimiento de poblaciones es la que se conoce con el nombre de ***ecuación logística o de saturación***; ecuación que, además del crecimiento de población describe muchos otros fenómenos biológicos y químicos, viene dada por:

$$\mathbf{P} = \frac{M.P_0}{P_0 + (M - P_0).e^{-M.k.t}} \quad ; \quad M = \mathbf{cte}$$ (*población de equilibrio*, valor al que tiende **P**).

Ejemplo:

A partir de registros anuales a nivel mundial, se puede establecer que cuando **P**, la población mundial, era de ***3000*** millones estaba creciendo a ***razón del 1.8 % anual***.

El dato dice $\mathbf{P} = P_o\, \mathbf{e}^{\alpha t}$ es un modelo apropiado para describir el crecimiento de la población mundial (*al menos por un período de tiempo*); que basta entonces hallar α, para tener una función que modelice el crecimiento, poder así predecir resultados, prevenir catástrofes adoptando políticas que las eviten.

El dato: **P** ***crece a razón del 1.8 % anual*** refiere a la ***tasa relativa de crecimiento*** (o sea, c) indica que $c = 1.8 / 100 = 0.018$.

Como c es pequeño, $\alpha \cong c$ y podemos finalmente proponer: $\mathbf{P} = 3\ 10^9\ \mathbf{e}^{0.018\, t}$.

Resumen: $y(t) = k\, b^t$ ó $y(t) = k\ \mathbf{e}^{\alpha t}$; $k \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$

➲ $k = y(0) = y_o$ (*cantidad inicial*).

➲ $y_{(t+1)} = b\ y_{(t)}$; ***b = factor de variación*** *(p/ cambios unitarios en t).*

➲ $\Delta y / y = c \Rightarrow c =$ ***velocidad relativa (o razón de crecimiento)***
$c =$ *variación ´relativa´ en y, por cada cambio unitario en t .*
o sea, variación en relación a la ´cantidad presente´.

Detectado que la función que modeliza el proceso es una exponencial el paso siguiente es determinar <u>el valor</u> de los parámetros en la ecuación del caso. Así tenemos:

➯ ***Dato***: **b** = ***factor de incremento*** *(para Δ t = 1)* $\Rightarrow$ $y(t) = y_o\, b^t$.

➯ ***Dato***: **b** = ***factor de incremento*** *(para Δ t = n)* $\Rightarrow$ $y(t) = y_o\, b^{t/n}$.

➯ ***Dato: c = velocidad relativa ;*** $c \cong 0$ $\Rightarrow$ $y(t) = y_o\ \mathbf{e}^{\alpha t}$; $\alpha = c$

➯ ***Dato: 100 c = % de variación relativa*** $\Rightarrow$ $y(t) = y_o\ \mathbf{e}^{\alpha t}$; $\alpha = c = \frac{\%}{100}$

14. En una experiencia se analiza el crecimiento de **P**, una población de bacterias, y se determina la misma se *duplica cada cinco días*. Sabiendo que se parte de una población de 10 bacterias, se pide:

a) hallar **P** = **P**(t) **,** función que describa el crecimiento de la población de bacterias (al menos por un tiempo).

b) demostrar que si $y = y_o .\ b^{\frac{t}{n}}$ entonces $\Delta y_{(t+1)} = \mathbf{c}.\, y_{(t)}$
con c *(velocidad relativa)* $= b^{1/n} - 1$

c) Para la población de bacterias investigada, indicar **V** ó **F** , justificar la respuesta:

(i) si *c = velocidad relativa* de variación de **P** entonces **c** = ***0.15***

(ii) **P** aumenta (*aprox.*) a razón de un 15 % *diario.*

(ii) Si **P**(t) = **10** $e^{\alpha t}$ entonces $\alpha \cong$ ***0.15*** .

15. Hallar la ley de crecimiento de una población de bacterias si se sabe que la misma aumenta a razón de un 3% diario e inicialmente hay 50 bacterias. ¿Cuanto tiempo deberá pasar para que haya 1000 bacterias?

16. Estudiando el crecimiento de un potrillo que al comienzo de las observaciones pesaba 50 kg. un biólogo observa que el mismo aumenta a razón de un 20 % de su peso, cada mes. ¿es posible deducir una ley que modele el crecimiento de este potrillo? ¿hasta donde tendría sentido la misma?

ⓘ ***Procesos de desintegración radiactiva***:

Al estudiar el comportamiento de las sustancias radiactivas se observa que las mismas se desintegran a *una razón proporcional a su masa*; más aún, que esta "*razón ó velocidad relativa de desintegración*" es un valor *característico* de *cada sustancia*. Este hecho señala que el tipo de función que mejor ajusta un proceso de desintegración radiactiva, *es la exponencial*.

Nota: si bien las exponenciales constituyen un buen modelo de este tipo de proceso presentan una limitación importante: no permiten predecir el instante en que no quedaría nada de sustancia radiactiva (la exponencial nunca se hace cero). Según el modelo (*no la realidad*) estas sustancias nunca desaparecerían, siempre quedaría un remanente. Para resolver esta cuestión se crea un ´estimador´ que admite ser calculado y proporciona información útil al respecto: el "*tiempo de vida media*", $t_{1/2}$

$t_{1/2}$ = tiempo requerido para que la masa presente, *se reduzca a la mitad*.

17. Para determinar la vida media del paladio 100 , ^{100}P , se registran datos acerca de su descomposición en el tiempo. La muestra observada tiene un peso inicial de 2 gramos y en la tabla se registran los valores de la masa remanente, medidos a intervalos de ocho días.

t (días)	**0**	**8**	**16**	**24**	**t ?**
M (grs.)	**2.000**	**0.500**	**0.125**	**0.031**	

a) *Inducir* la ley de la función a partir de trabajar con la tabla de valores hasta hallar algún *patrón* en el comportamiento de los valores calculados.

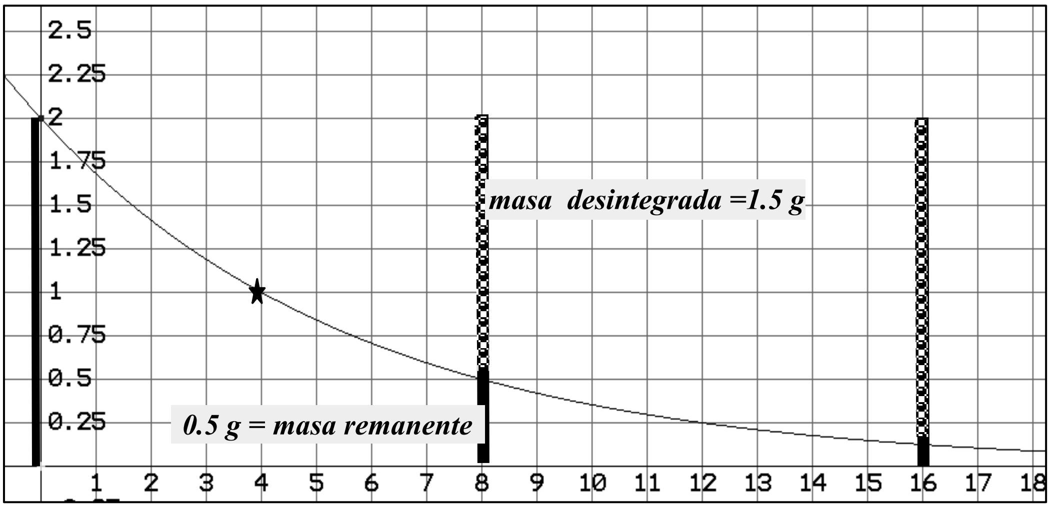
t	**0**	**8**	**16**	**24**	
m	**2.000**	**0. 500**	**0.125**	**0.031**	
m_i / m_{i-8}	------				
					→ m_i = ... m_{i-8}

Conclusión: ***"la masa remanente, cada .... días, es .... de la masa presente"***

__Esto remite a__: $f(t) = m_o\, b^{t/n}$ → m_o = ...

→ b(factor variac) = ...

→ n = ... → $f(t)$ = ...



Rescatamos así, la siguiente relación entre masas:

$$m_r \text{ (remanente)} = m_o - m_d \text{ (desintegrada)}$$

b) ¿Cuánto tarda en desintegrarse el 30 % del paladio 100?

c) Determinar el *tiempo de vida media* del ^{100}Pd.

18. Determinar una expresión para el cálculo del tiempo de vida media para $f(t) = m_o\, e^{\alpha t}$

→ Para el caso de una exponencial, el $t_{1/2}$, *es independiente de la cantidad inicial de la que se parta*? Sí? . No? Porqué?

19. Si se sabe que la vida media del radio es, aproximadamente, de 1600 años, encontrar α en $f(t) = m_o\, e^{\alpha t}$. Estimar luego cuanto tarda en desintegrarse el 90 % del radio, de una muestra cualquiera.

20. Para ciertas reacciones químicas se define el concepto de "*orden de reacción*". Así, si $C=C(t)$ expresa la concentración en cada instante t del componente químico que en la reacción "va desapareciendo", se dice que la reacción es de,

***__orden 0__** si $C(t) = C_o + k.t$;

***__orden 1__** si $C(t) = C_o\, e^{kt}$;

***__orden 2__** si $C(t) = \dfrac{C_o}{1 + C_o.k.t}$.

Una forma empírica de hallar el orden de una reacción consiste en *medir* los $\mathbf{t}_{1/2}$ que resultan de "*correr*" varias veces la reacción, con distintas concentraciones iniciales del componente químico cada vez. ($\mathbf{t}_{1/2}$ = tiempo para que la concentración de partida se reduzca a la mitad).

Se pide:

a) Determinar el orden de una reacción si al "*correrla*" con distintas concentraciones iniciales, $\mathbf{C}_o$, se observa que:

☞ $\mathbf{t}_{1/2}$ *depende* de $\mathbf{C}_o$

☞ $\dfrac{\Delta \mathbf{C}}{\Delta \mathbf{t}}$ *no es constante*.

(*Sugerencia*: hallar los $\mathbf{t}_{1/2}$ para c/u de las $\mathbf{C}$(t) indicadas).

b) Para verificar la repuesta dada**,** hacer **k** =1 (ó -1, según se estime) en la función elegida en (a) y graficar en un mismo sistema esta función para $\mathbf{C_o}$ =10 y $\mathbf{C_o}$ =20. ¿ Qué haría para *verificar* la respuesta dada en (a), con estos gráficos? Hacerlo.

21. Una especie de mosquito que habita una isla de Africa se reproduce triplicándose cada día. Al cabo de 8 días de arribar a la isla un equipo de investigación consigue implementar un sistema de fumigación que afecta a la especie de tal forma que impide su reproducción, y la población de mosquitos comienza a decrecer un 30% diario.

a. Indica qué tipo de función permite describir la cantidad de mosquitos en el transcurso del tiempo.
b. Halla la ley de esta función sabiendo que cuando llegaron los investigadores a la isla estimaron la presencia de 7000 mosquitos. ¿Cuántos mosquitos había al cabo de 6 días? ¿A los 8 días?
c. ¿Cuánto tiempo llevará la extinción de los mosquitos?

22. Durante un mes de hiperinflación un producto aumentó diariamente en forma exponencial. Al comenzar el mes costaba 4 $ y en el día 10 costaba 6.5$. ¿Cuánto costaba al finalizar el mes? ¿Cuánto habría aumentado entre el tercer y cuarto día? ¿entre el 20 y el 21? ¿Cuál es el porcentaje de incremento diario?

23. Se sabe que si bien existen fertilizantes para aumentar el rinde de las cosechas, llega un momento en que por más que se aumente la cantidad de fertilizante el rinde, prácticamente no aumenta; es decir y como es obvio, existe un límite superior para el mismo. Esto hace pensar que el rinde, $\boldsymbol{r}$, no puede representarse por una exponencial (pues esta crece indefinidamente). Sin embargo existe un modelo exponencial que da una aproximación aceptable de $\boldsymbol{r}$, y es de la forma: $\boldsymbol{r} = C(1- e^{k\,x})$, con $\boldsymbol{x}$ la cantidad de fertilizante usado en la campaña.

Al respecto te pedimos que:

a) expliques que indica el parámetro C
b) grafiques la función considerando las 4 opciones posibles para C y k
1) C>0 y k>0 ; 2) C<0 y k<0 ; 3) C>0 y k<0 ; 4) C<0 y k>0 ;
indiques luego cual debe ser el signo de estos parámetros para que la función represente el rinde de una cosecha según la cantidad de fertilizante usado.

TALLER 10

OBJETIVO: *Funciones Trigonométricas*

El objetivo general del taller es estudiar en profundidad la clase o familia de las funciones trigonométricas: ***seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante***. Las cuatro últimas se definen a partir de las dos primeras. Este hecho distingue al ***seno*** y ***coseno*** del resto de las funciones trigonométricas, les da otro *´estatus´*: con sólo conocer estas dos funciones conocemos las restantes de la familia. En razón de ello, el objetivo principal de este taller son las funciones trigonométricas que llamamos básicas: ***seno*** y ***coseno*.**

Requisitos para el abordaje del taller:

Las actividades planteadas demandan:
* el conocimiento y dominio de las funciones trigonométricas (ver **Anexo XI**); en particular el de las trigonométricas básicas: ***seno*** y ***coseno*** .

***función prototipo*: * seno**: $f(x) = A\ \textit{sen}\,(\omega x + h) + k$

**** coseno***: $f(x) = A\ \cos\,(\omega x + h) + k$.

* reconocer la diferencia entre el concepto de *´relaciones trigonométricas´* y el de *´funciones trigonométricas´* .

La trigonometría tuvo su origen con los griegos, unos *150 años A.C.* Estos la usaron para resolver problemas de astronomía, navegación y geografía. Así, prácticamente, esta ciencia surge debido a la necesidad de medir en forma indirecta distancias y ángulos en la esfera celeste (con la ayuda de *´triángulos´*).

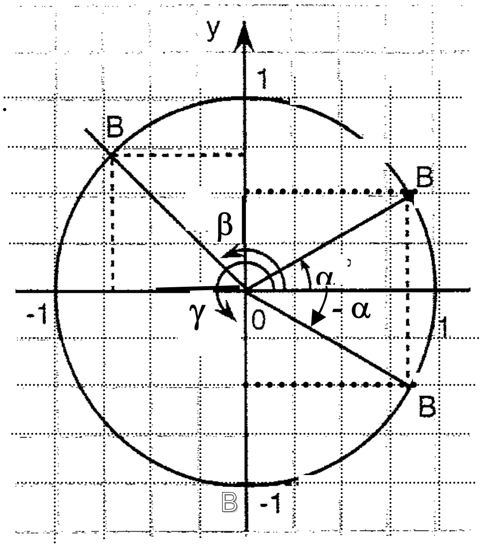
La palabra *´trigonometría´* significa *´medida de triángulo´* y fue usada por primera vez como título de un texto por el matemático alemán Pitiscus en el año *1600 D.C.* Y la razón del título es fácil entender: en la antigüedad, esta rama de la matemática se ocupaba básica y exclusivamente del estudio de las *´relaciones´* entre *´ángulos y lados de triángulos rectángulos´* (ó *´relaciones trigonométricas´*) O sea, se identificaba con el cálculo de triángulos y tenía como dominio los ángulos *´agudos´* o *´rectos´*.

Hoy día las ***funciones trigonométricas*** además de resolver los problemas que resolvían los griegos, sirven para resolver otro tipo de problema ***que poco o nada tienen que ver con triángulos rectángulos***. Fenómenos como el sonido, la luz, las ondas eléctricas, magnéticas y/o electromagnéticas o los ciclos financieros poco o nada tienen que ver con triángulos rectángulos y sin embargo, en el estudio de todos ellos, aparecen las funciones trigonométricas.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS

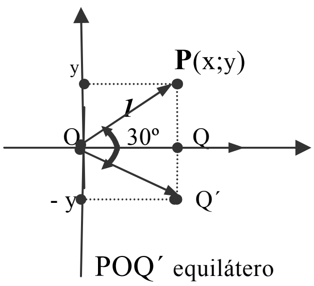
1.- ***Cálculo de valores de funciones trigonométricas*** ***: leer Anexo XI***

a) Para los ángulos indicados en la circunferencia unitaria adjunta, se pide:

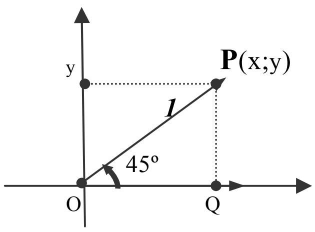


- dar la medida de γ en grados y radianes.
- dar, leyendo del gráfico y en forma aproximada, los valores de sen α ; sen β ; sen γ .
- dar, leyendo del gráfico y en forma aproximada, los valores de cos α ; cos β ; cos γ .
- dar, leyendo del gráfico los valores de sen (-α) y cos (-α). Comparar los valores obtenidos con los correspondientes de sen α y cos α. ¿*Qué observa*?. Lo observado, ¿vale siempre que se considere un ángulo y su opuesto? ; ¿porqué?.

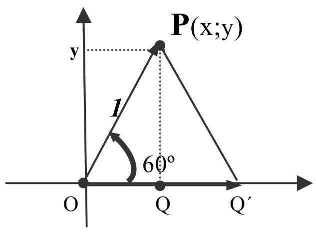
b) En general, los valores de las funciones trigonométricas son números irracionales; luego, normalmente, damos ´*aproximaciones*´ de ellos y debemos acudir a la calculadora para calcularlos. Sin embargo, con la ayuda de la geometría clásica podemos dar los valores ´*exactos*´ de las funciones de algunos ángulos del primer cuadrante.
Considerando **d(P;O)=1**; los triángulos dados y la definición del ***seno de un ángulo***:
i) justicar el primer renglón del cuadro adjunto (*sugerencia*: teorema de pitágoras).
ii) completar el cuadro según lo indicado en cada caso; aplicando identidades trigonométricas.



POQ´ equilátero



| OQ | = | PQ | ; OPQ isósceles



OPQ´ equilátero

α	0º	$30º = \frac{\pi}{6}$	$45º = \frac{\pi}{4}$	$60º = \frac{\pi}{3}$	$90º = \frac{\pi}{2}$
sen α = ***y***	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*
cos α = sen (90º- α)	*1*				
tag α = $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$					***no existe***

2.- Marcar el punto **P**(u;v) en un sistema cartesiano, sabiendo que **P** se encuentra sobre una circunferencia de radio 5 y centro en el origen; u = -3 ; v >0. Dibujar luego, en posición estándar, el ángulo α cuyo lado final pasa por **P**. Determinar el valor de " v ". Calcular luego ***sen*** $\boldsymbol{\alpha}$; ***cos*** $\boldsymbol{\alpha}$ y ***tag*** $\boldsymbol{\alpha}$.

a) Dibujar dos ángulos distintos de α cuyo coseno valga ***-3/5***
b) Dibujar tres ángulos cuyo seno valga ***-3/5*** .
c) Dibujar dos ángulos cuya tg valga ***4/3*** .

3.- Marcar **Q**(a;b) en un sistema cartesiano, sabiendo que a >0; b<0 y d(Q;O)=1. Dibujar en posición estándar y sentido antihorario, el ángulo β cuyo lado final pasa por **Q** .

a) Obtener ***sen*** $\boldsymbol{\beta}$; ***cos*** $\boldsymbol{\beta}$ y ***tag*** $\boldsymbol{\beta}$ en función de las coordenadas de **Q**. A partir de los valores hallados determinar el *signo* de las respectivas funciones.

b) Si $\theta = \beta$**-180º**, usando identidades trigonométricas obtener los valores de ***sen*** $\boldsymbol{\theta}$; ***cos*** $\boldsymbol{\theta}$ y ***tag*** $\boldsymbol{\theta}$ en función de a y b. Graficar θ y verificar.

c) Marcar **R** simétrico de **Q** respecto del eje x (en el mismo sistema que **Q**); dibujar γ, ángulo cuyo lado final pasa por **R** . Calcular ***cos*** $(\boldsymbol{\beta}+\gamma)$ (usar una identidad apropiada)**.** Deducir, a partir del valor hallado, quien es $(\boldsymbol{\beta}+\gamma)$ **.**

4.- En los puntos a continuación, α es un ángulo cualquiera entre 135º y 160º .

A (cos α; sen α**)** ; **B (**2 cos α ; 2 sen α**)** ; **C (**cos ($\alpha+\pi$); sen($\alpha+\pi$)**)** ;
D(cos (-α); sen(-α)**)**; **E(**cos ($\frac{\pi}{2}$ -α);sen ($\frac{\pi}{2}$ -α)**)** ; **F (**cos ($\alpha+2\pi$); sen($\alpha+2\pi$)**)**

Respecto a estos puntos se pide:
Determinar su distancia al origen y graficarlos en un mismo sistema cartesiano (*Sug*: marcar α en una circunferencia unitaria; usar identidades trigonométricas).

5.- a) Demostrar que trabajando en el sistema radian la suma de una función seno y una coseno, da como resultado una función seno "corrida". Equivalentemente: que $\forall$ A , B $\in$R , existe C , $\lambda \in$R tal que:

$$\boxed{\mathbf{A . sen\ x + B . cos\ x = C . sen\ (x + \lambda\ )}}$$

Sugerencia: partir del "2do miembro", aplicar identidades trigonométricas, igualar lo obtenido al "1er miembro", concluir que A = C cos λ; B = C sen λ. Obtener C y λ en función de A y B.

b) Escribir como el seno de un ángulo. Verificar la igualdad para $\boldsymbol{x = 0}$.

sen x + cos x =	sen x **-** $\sqrt{\mathbf{3}}$ cos x =
sen x + $\sqrt{\mathbf{3}}$ cos x =	**-** sen x + $\sqrt{\mathbf{3}}$ cos x =

6.- a) Hallar el mínimo "p" real y no nulo (el período) tal que:

i) sen [4 (x +p)] = sen (4 x)
ii) sen [$\sqrt{2}$ (x+p)] = sen $\sqrt{2}$ x)
iii) cos [4 (x+p)] = cos (4 x).

Sug: distribuir en el 1er miembro; aplicar identidades $trig_s$.

b) Generalizar lo hecho en (a); concluir que,

▶ si **T** es el período de ***sen** (ωx)* ó ***cos** (ωx)*, entonces $\mathbf{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

c) Indicar V ó F ; justificar grafica y/ó analíticamente:

i) sen (x) y 3 sen (x) tienen el mismo período.

ii) sen (x) y sen $(x + \pi)$ tienen el mismo período.

iii) sen (2x) y ½ .sen (2x) tienen el mismo período.

iv) cos (πx) y **-** cos (πx) tienen el mismo período.

v) sen $(x + \frac{\pi}{2}) =$ cos x

vi) Si $y = A$ sen (ωx) entonces $A =$ "amplitud de onda ".

▶ ***amplitud de onda*** = máximo desplazamiento de la onda respecto al eje x.

7.- Sea ***y = sen*** (ωt), $t \in \mathbb{R}$. ($\Rightarrow$ ángulos medidos en radianes)
Si medimos el ángulo en radianes podemos interpretar al ángulo como "tiempo" y al *"**sen t**"* como la "ordenada de **B** al instante ***t***" (**B** punto móvil s/circunf. r =1);
En tal caso ***f*** **,** la ***frecuencia*** , se define como:

▶ ***f = cantidad de veces que se repite una onda, en la unidad de tiempo***.

[***t***]= ***seg***. → ***f se mide en Hertz*** (Hz) **o** ***ciclos por seg*** (c.p.s.).

Al respecto se pide explicar porqué son ***verdaderas*** las siguientes afirmaciones:

a) ***y = sen*** (ωt) ; $\mathbf{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ $\Rightarrow$ **T** es el *tiempo* en que se produce una onda.

b) si ***f*** es la ***frecuencia*** y **T** el ***período*** entonces $f = \dfrac{1}{T}$ **.**

c) Si ***y = sen*** (ωt) entonces $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$. ($\Rightarrow$ ***f es directamente propor. a*** ω**)**

d) Si ***y = sen*** (ωt) entonces a mayor ω mayor número de ciclos por seg.

e) Si ***y = sen*** $(2\pi t)$, entonces se produce una onda por seg.

f) Si ***y = sen*** $(\frac{\pi}{2} t)$ entonces se produce un cuarto de onda por seg.

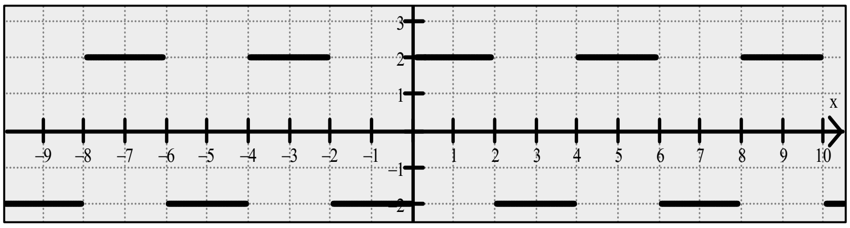
g) Si ***y = sen*** $(1200\pi t)$, entonces se producen 600 ondas por seg. .

h) Si ***y = sen*** $(1200 t)$, entonces se producen alrededor de 200 ondas por seg.

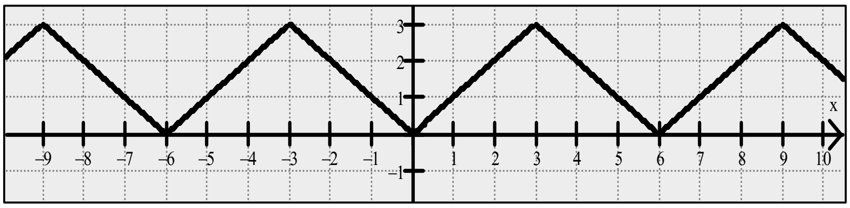
8.- Las gráficas a continuación corresponden a funciones periódicas. Se pide: indicar amplitud y período. Para las trigonométricas, escribir la ley de la función

(*Sugerencia*: recordar que, $\mathbf{y = sen\ (\omega\, x)} \Leftrightarrow \mathbf{T}_{(\text{período})} = \dfrac{2\pi}{\omega}$)

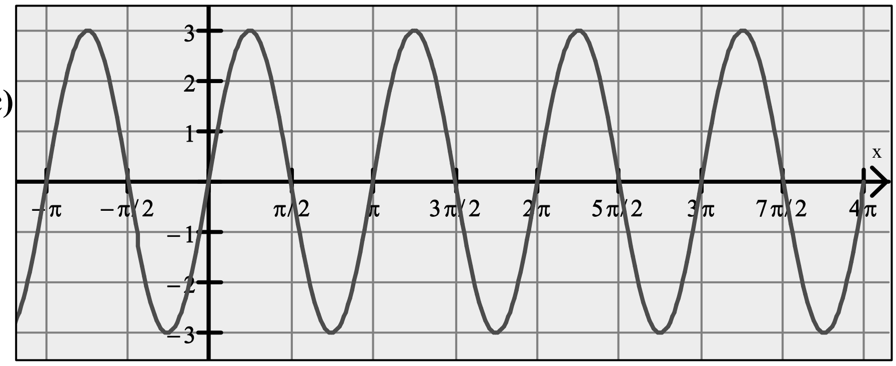
a)



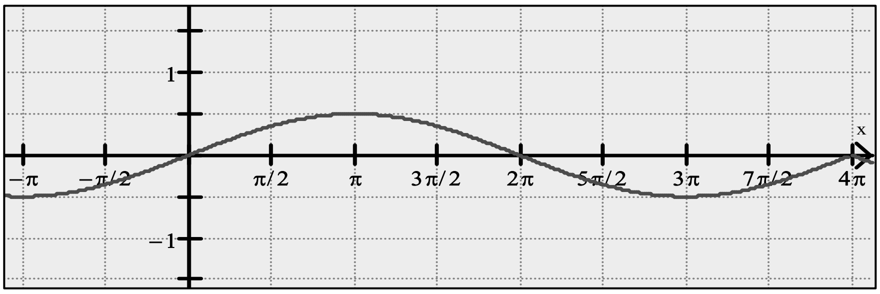
b)



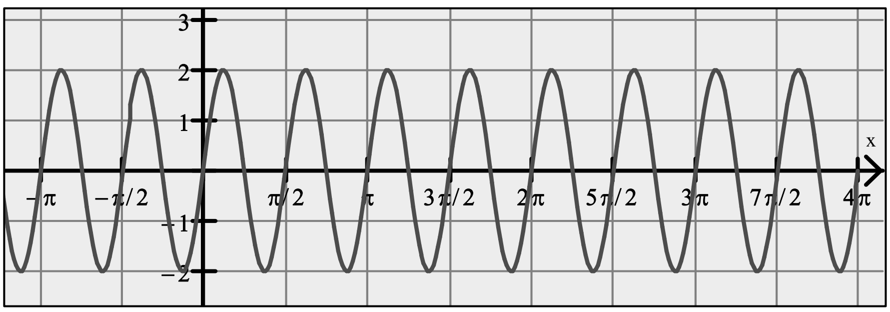
c)



d)



e)

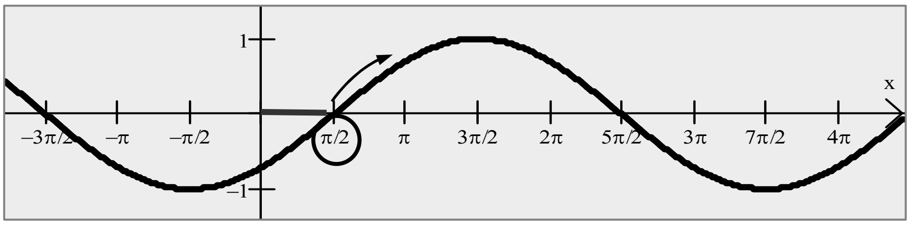


9.- Amplitud y período (o frecuencia) no son los únicos elementos necesarios para definir completamente una onda senoidal. Para ello necesitamos otro dato el cual recibe el nombre de ***fase*** y se define como:

> ▶ ***fase*:** es el punto del dominio más cercano al origen en el que la onda cruza el eje x , en su trayectoria ascendente.

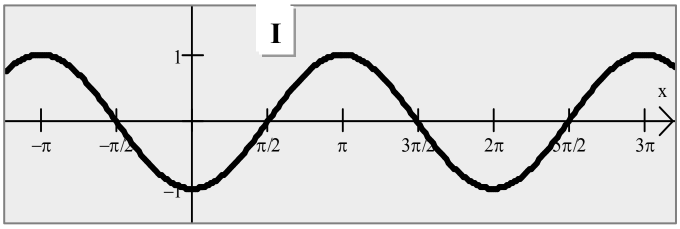
Si la ***fase es cero*** la onda sinoidal ***pasa por el origen***.

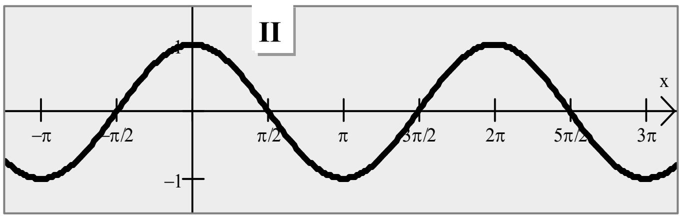
En el gráfico la ***fase*** es $x = \pi/2$ **.**

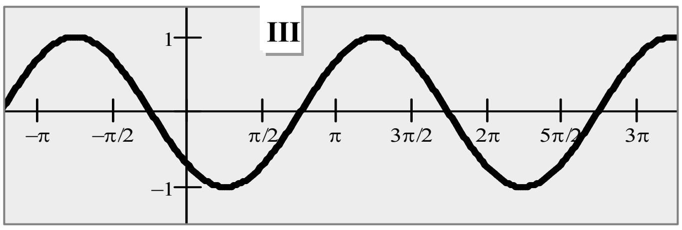


a) Indicar la onda correspondiente a cada una de las fórmulas dadas a continuación. Determinar ***período*** y ***fase*** de las mismas. Luego, analizar la validez de la siguiente afirmación: "si $p = 2\pi$ y la ***fase*** es ***h*** entonces $y = sen\,(x - h)$ "

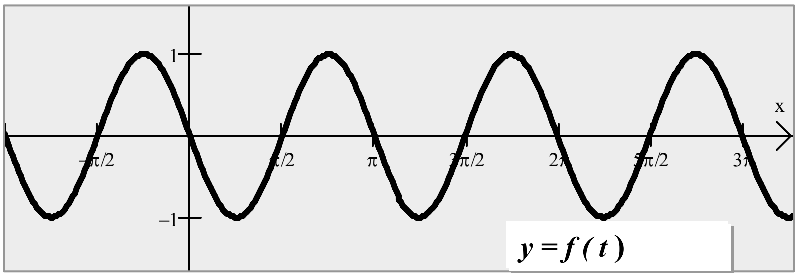
	A) $y = sen\,(x - \pi/2)$	**B)** $y = sen\,(x - 3/4\,\pi)$	**C)** $y = sen\,(x + \pi/2)$
onda	....	....	....
fase	....	....	....







b)



Para el gráfico adjunto se pide:

i) Determinar período y fase de f; dar la ley de f usando transformaciones. Verificar que $f(t) = sen\,(2t - \pi)$

ii) Completando la oración dada a continuación, obtener un proceso para el cálculo de la fase en funciones trigonométricas con período distinto de 2π .
« $f(t) = sen\,(w\,t - b) = sen\,[w\,(t - \ldots\ldots)]$ y la ***fase*** es **…………** »

10.- Para $f(x) =$ **A** $sen\,(w\,x + h) + k$, realizar las actividades que se indican:

- Si $w = 1$, $h = k = 0$ y **A = 3 , ½ , -2 ;** para cada **A** se pide:
  * determinar amplitud, período, frecuencia y fase de la ***onda.***
  * graficar f con Excel , corroborar lo indicado en el paso anterior .
  Informar el efecto que la variación del parámetro **A**, produce sobre la onda.

- Si $A = 1$, $h = k = 0$ y **w = 2 , ½ , -1 , π ;** para cada **w** se pide:
  * determinar amplitud, período, frecuencia, y fase de la ***onda.***
  * graficar f con Excel , corroborar lo indicado en el paso anterior .
  Informar el efecto que la variación del parámetro **w**, produce sobre la onda.

- Si $A = w = 1$, $k = 0$ y **h = - 2 , 1 , - π/4 ;** para cada **h** se pide:
  * determinar amplitud, período, frecuencia y fase de la ***onda.***
  * graficar f con Excel , corroborar lo indicado en el paso anterior .
  Informar el efecto que la variación del parámetro **h**, produce sobre la onda.

- Si $A = w = 1$, $h = 0$ y **k = 2 , -1 ;** para cada **k** se pide:
  * determinar amplitud, período, frecuencia e imagen de f
  * graficar f con Excel , corroborar lo indicado en el paso anterior .
  Informar el efecto que la variación del parámetro **k**, produce sobre la onda.

- Si $A = 3$, $w = 8$, $h = -16$ y $k = 0$; se pide:
  * determinar amplitud, período, frecuencia y fase de la ***onda***
  * graficar f con Excel , corroborar lo indicado en el paso anterior .

SONIDO Y ONDAS SENOIDALES.

Un ***sonido puro*** es aquel donde la presión del aire sube y baja en el tiempo según la siguiente ley: $y = A\ sen\ (wt)$; y = presión del aire , t = tiempo en segundos.
Así el sonido puro más simple que conocemos es $y = sen\ t$ (Ver **ANEXO XII**)

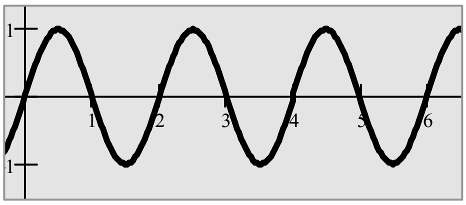
Características del sonido y de las ondas senoidales: su correspondencia

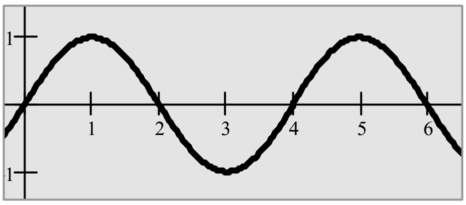
1. Los sonidos tienen distintas características perceptibles, una de ellas la ***´altura´***.
La ***´altura´*** es un término usado para indicar si un sonido es ***más o menos agudo***.
(a mayor altura, más agudo es el sonido).
La cuestión que interesa es si esta característica del sonido está relacionada en forma directa con algún valor característico de la onda senoidal.
A este respecto uno de los grandes descubrimientos musicales es que, en los sonidos periódicos, la ***altura*** está relacionada con la ***frecuencia***. Como la frecuencia es directamente proporcional a ***w,*** concluimos que la altura está relacionada con ***w.***
Se observa que, a mayor ***altura*** (sonido más agudo) mayor ***frecuencia*** en la onda.

El oído humano puede percibir sonidos cuya frecuencia varíe entre 20 y 20.000 ciclos por segundo, aproximadamente. Si tocamos en un piano el "**la**" por encima del "**do**" central y registramos el sonido vemos una onda periódica con frecuencia ***440 Hz*** (440 ciclos en un segundo). Si ascendemos en la escala y tocamos el **"la"** que sigue, escuchamos un sonido ***más agudo*** y observamos que la onda periódica tiene una frecuencia de ***880 Hz***. Y esto se repite en cualquier experiencia que se haga.

a) ¿Qué modificarías en el gráfico de $y = sen\ t$ para obtener un sonido puro más agudo que este?; ¿y para obtener uno menos agudo?. Dar ejemplos de ambos.

b) ¿Cuál es la diferencia auditiva entre los siguientes sonidos puros?.
Dar la ley de cada uno de ellos.





c) Dar la ley del sonido puro correspondiente al ***la*** por encima del ***do*** central.
Dar la ley del ***la*** por debajo del ***do*** central si se sabe que su frecuencia es la mitad de la frecuencia del primero. ¿Cuál es la diferencia auditiva entre estos sonidos?.

d) Se puede demostrar que al producirse dos sonidos en forma *simultánea*, la presión sonora del ***sonido resultante*** está dada por la ***suma*** de las presiones sonoras individuales. O sea que si f y g son las leyes de dos sonidos puros que se producen en simultáneo y h la ley del sonido resultante, entonces $h = f + g$.

En el caso que dos sonidos tengan ***la misma altura***, ¿existirá alguna diferencia auditiva entre el ***sonido individual*** y el ***resultante*** al tocarlos en simultáneo ?.

Para contestar esta pregunta analizar el sonido resultante de tocar una misma nota, por ejemplo ***la***, al mismo tiempo en ***2*** pianos distintos. Obtener ***h***, la ley del sonido resultante; frecuencia y amplitud de la onda respectiva. Concluir.

2. Otra característica perceptible del sonido es la ***intensidad*.**
El término ***´intensidad´*** lo usamos para indicar si un sonido es ***más o menos ´fuerte´.***
(a mayor intensidad, más *´fuerte´* escuchamos el sonido).

A este respecto otro descubrimiento musical es que, en los sonidos periódicos, la la ***intensidad*** está relacionada con la ***amplitud*** de la onda. Se observa que, a mayor ***intensidad*** mayor ***amplitud*** en la onda.

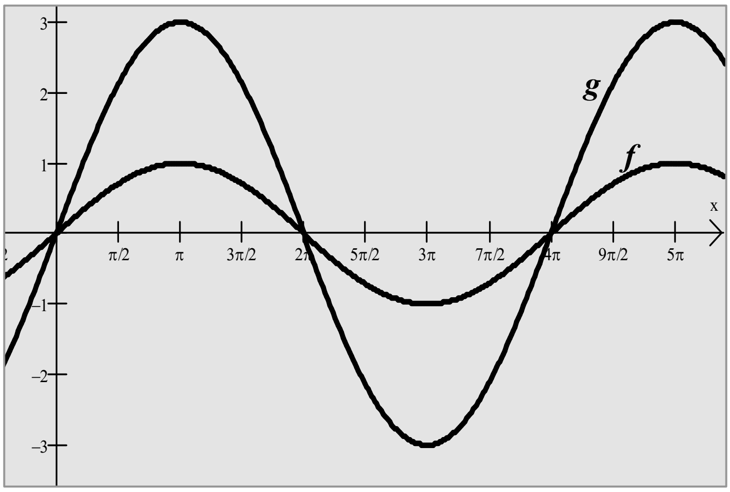
a) Si se toca la misma nota, por ejemplo ***la***, al mismo tiempo y en 4 pianos distintos, ¿cuál es la diferencia auditiva con respecto al sonido de un ***la*** , en un piano?.
Dar la ley del sonido resultante en este caso.

b) El gráfico dado corresponde a dos sonidos puros: ***f*** y ***g***.

Se pide:

- dar la ley de ***f*** y ***g.***

- obtener ***h ,*** ley del sonido resultante al producirse ***f*** y ***g*** en simultáneo.



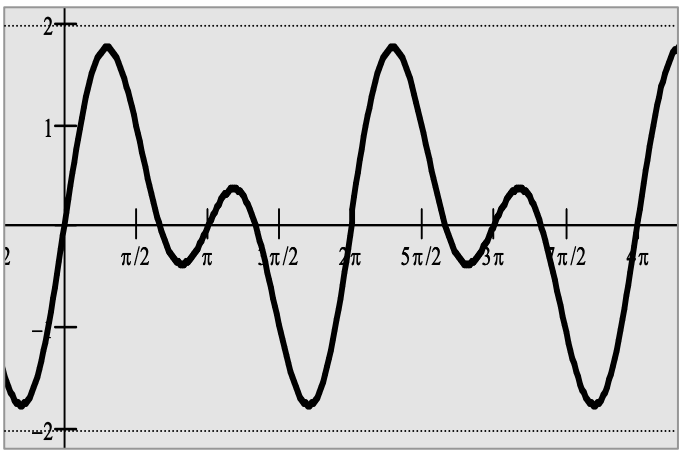
* ***Conclusión*** : si dos o más sonidos de ***igual altura*** *(frec.)* suenan en simultáneo, ***el sonido resultante tiene la misma altura y su amplitud es la suma de las amplitudes de cada uno de los sonidos sumados***. O sea, escuchamos el mismo sonido, pero con más intensidad.

c) Y si dos o más sonidos que suenan en simultáneo tienen ***distinta altura*** :
¿cuál es la ley del sonido resultante?, ¿qué características presenta la onda resultante?, ¿percibimos alguna diferencia auditiva?.

El gráfico adjunto corresponde al registro del *sonido que resulta* al sonar en simultáneo los sonidos puros ***f(t)= sent*** y ***g(t) = sen (2t).***

Si indicamos con ***h*** la ley del sonido resultante, entonces
h (t) = sen t + sen (2t)

Señalar la característica fundamental de ***h*** ; indicar si existe alguna relación entre la *´amplitud´* de la onda resultante y la de las ondas componentes de la misma.



*__*Conclusión*__*: si dos sonidos de ***alturas*** *(frec.)* ***distintas y proporcionales entre sí,*** suenan en simultáneo, ***el sonido resultante tiene la altura del sonido de menor frecuencia y una amplitud variable que depende de los sonidos sumados.*** O sea, escuchamos un sonido distinto al de cada uno de los sonidos componentes.

En general se puede probar que la *onda resultante* de la suma de sonidos puros es una *onda periódica* aún cuando las ondas componentes no tengan el mismo período. O sea que: "***la suma de funciones periódicas tiene por resultado una función periódica***".

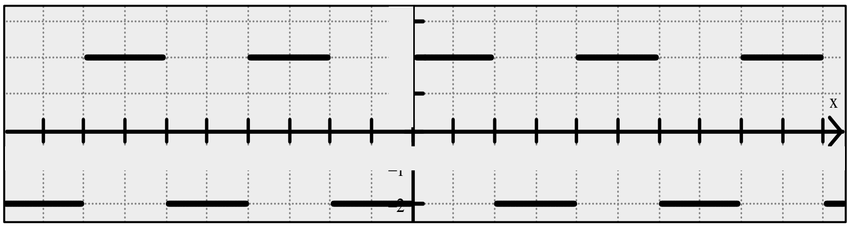
*__*Observación*__*:
Obtenidas las anteriores conclusiones, las investigaciones se desplazaron al problema inverso: ***dada una onda periódica cualquiera*** *(por ejemplo la correspondiente al sonido de un violín),* ***¿podría esta ser representada como suma de ondas senoidales de adecuadas amplitud y frecuencias?.***

El descubrimiento de Fourier refiere justamente a este problema. Fourier demuestra que toda onda periódica se puede escribir o al menos *aproximar*, por la suma de apropiadas ondas senoidales (y/o cosenoidales). Por ejemplo, la función que representa el sonido correspondiente a un violín tocando la nota de 500 Hertz, es esencialmente la siguiente:

$$f(t) = 0.06 \text{ sen } (1000\pi t) + 0.02 \text{ sen } (2000\pi t) + 0.01 \text{ sen } (3000\pi t)$$

(y esta propiedad tiene que ver con otra característica del sonido: ***el timbre***).

3.- Representar en Excel las funciones que se indican a continuación; observar cómo, a medida que se agregan sumandos, la gráfica se aproxima cada vez más a la gráfica de la "***onda cuadrada***" con período 2π y amplitud $\pi/4$.



Representar todas las funciones en el intervalo [-10; 10], con $\Delta t = 0.5$

$y_1 = \text{sen } t + 1/3 \text{ sen } (3t)$

$y_2 = \text{sen } t + 1/3 \text{ sen } (3t) + 1/5 \text{ sen } (5t)$

$y_3 = \text{sen } t + 1/3 \text{ sen } (3t) + 1/5 \text{ sen } (5t) + 1/7 \text{ sen } (7t)$

$y_4 =$ ……………………………………………………… (*¿Cómo sería esta ley*??)

ANEXO XI

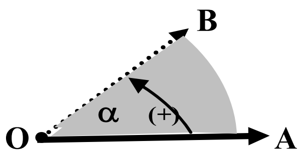
1. - *Angulos – Distintos tipos de ángulos*

*Los ángulos admiten distintas conceptualizaciones las cuales dependen del ámbito donde se trabaje. En **Geometría**, los ángulos se definen como ´intersección de dos semiplanos´; no tienen signo y son siempre menores de cuatro rectos. Esta definición es esencialmente estática, útil a los objetivos de la **Geometría** pero no a los de la **Geometría Analítica.***

*El estudio de procesos ´dinámicos´, de ´objetos en movimiento´ plantea la necesidad de dotar al ángulo de ´movimiento´. Se redefine así este concepto contemplando este hecho y estableciendo un **sentido** en la generación de los mismos al efecto de evitar ambigüedades. Para distinguir estos ángulos de los geométricos se los llama ´ **ángulos dirigidos**´. Vamos a trabajar sólo con ángulos dirigidos por lo que a partir de aquí vamos a omitir el adjetivo y hablar de ´ángulos´ dando por sobrentendido que es un ángulo ´dirigido´*

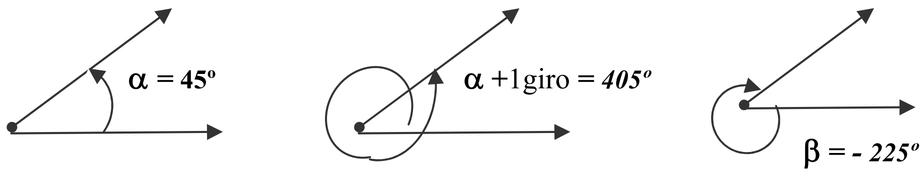
Ángulo ***(dirigido ó trigonom.)***	*Llamamos ángulo dirigido ó trigonométrico* ***´a la porción de plano barrida por una semirrecta móvil que gira alrededor de su origen O´.***

O sea, al ángulo $\mathbf{A\hat{O}B}$ barrido por la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ al girar sobre **O,** considerando *´sentido de giro´* y *´número de giros´* realizados antes de llegar a la posición final.



$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$: lado inicial

$\overrightarrow{\mathbf{OB}}$: lado final.

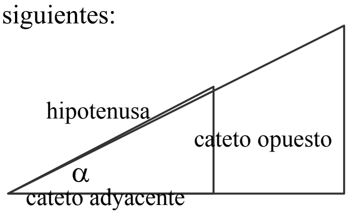


2.- TRIGONOMETRÍA - *Relaciones Trigonométricas*

La aparición de la TRIGONOMETRÍA se remonta a 150 años A. C. y se atribuye a Hiparco. En sus inicios, como su nombre lo expresa (*trígonos* = triángulo, *metrón* = medida), se ocupó del cálculo de los elementos del triángulo (lados, alturas, superficie, ángulos, bisectrices). Tales cálculos revelan en su momento que "si en un triángulo *rectángulo* se modifican los lados *pero no los ángulos*, las razones entre los lados *permanecen constante"*. A estas razones se las llama *´**relaciones trigonométricas**´*. Las mismas refieren a ángulos interiores de un triángulo rectángulo; por ende, valen sólo para ***ángulos agudos***. (***menores de 90º***).
Según los lados que intervienen en la razón tenemos las siguientes:

Relaciones Trigonométricas
válidas sólo para
α / $\mathbf{0^o < \alpha < 90^o}$

- Sen $\alpha = \dfrac{\text{cat . op}}{\text{hip .}}$
- Cos $\alpha = \dfrac{\text{cat . ady .}}{\text{hip .}}$
- Tag $\alpha = \dfrac{\text{cat . op .}}{\text{cat . ady .}}$



3.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

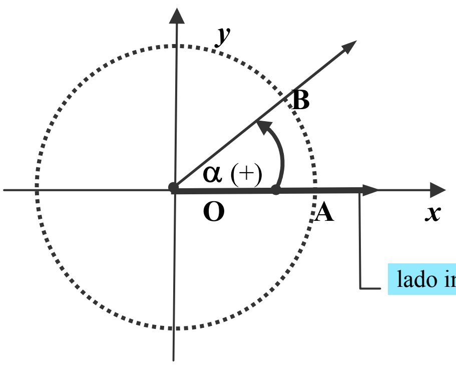
El origen de las ***funciones trigonométricas*** está en la Trigonometría pero hoy día los objetivos de esta disciplina han sido ampliamente rebasados. Los ángulos se constituyen en objetos matemáticos con entidad propia, se redefinen conceptos (***ángulo dirigido***) y se generan otros: ***funciones trigonométricas*** (generalización de las *relaciones trigonométricas*, al quitarse la restricción de que el ángulo sea agudo)

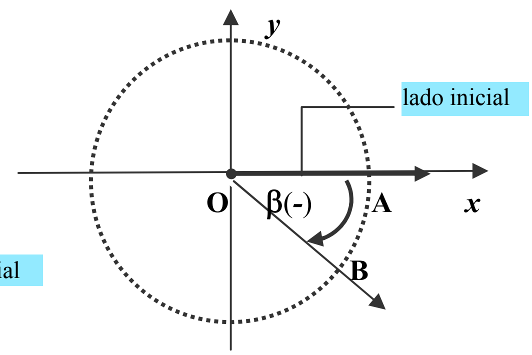
Las funciones trigonométricas resultan imprescindibles para el estudio de fenómenos de muy distinta naturaleza; en particular, los cíclicos o periódicos (ondas, vibraciones, sonidos, etc). El carácter de *periódicas* que presentan estas funciones hace que las mismas se constituyan en el *sistema de representación* natural para la *modelización* de este tipo de fenómeno.

¿Cómo se definen las funciones trigonométricas?.

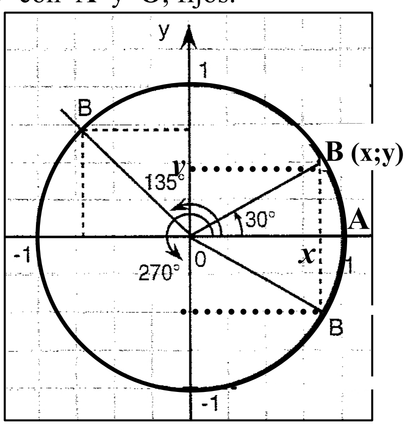
Estas funciones operan sobre ángulos dirigidos y se generan a partir de barrer ángulos sobre una circunferencia ubicada en un sistema cartesiano ortogonal. Así, definirlas requiere fijar un sistema de referencia, aclarar los términos a usar en la definición.

circunferencia trigonométrica o unidad	* C(0;1) * Circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1.
ángulo en posición estándar	Decimos que un ángulo está en posición estándar cuando su vértice coincide con el origen de coordenadas, O, y su lado inicial está sobre el eje x positivo.





Dado α**,** ángulo en posición estándar, sus lados cortan la circunferencia en dos puntos: **A** (s/ lado inicial) y **B** (s/ lado final); o sea, $\alpha = A\hat{O}B$ con **A** y **O**, fijos.



Es fácil ver que al variar el lado final de $A\hat{O}B$ el punto **B** se desplaza sobre la circunferencia; que $(x;y)$, sus coordenadas, van cambiando. En particular, se observa una muy notaria regularidad en dicho cambio.

Concluimos así que las coordenadas x e y de **B**, y el ángulo α**,** están *relacionados*, que el *vehículo* de esta relación es la circunferencia. Más aún, vemos que la relación entre cada coordenada y el ángulo $A\hat{O}B$, es una relación ***funcional.***

O sea, reconocemos que:

- "*y* es ***función*** de $\alpha = A\hat{O}B$ "
- "*x* es ***función*** de $\alpha = A\hat{O}B$ "

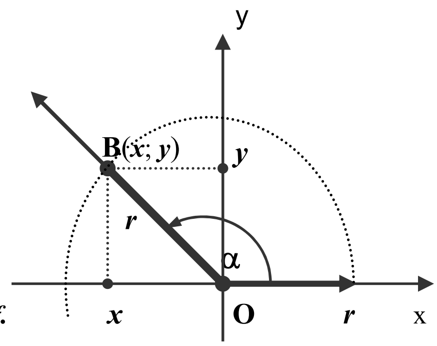
Así, y en principio, descubrimos ***dos funciones*** asociadas al desplazamiento de **B** sobre la circunferencia; ambas con dominio en el conjunto de los ángulos dirigidos. Estas funciones no son otras que ***seno*** y ***coseno***; las trigonométricas básicas.

DEFINICIÓN

funciones trigonométricas (básicas)

Dado un ángulo α en posición estándar y **B**(x; y), punto del lado final del ángulo sobre la circunferencia de radio **r** , definimos las funciones trigonométricas básicas como:

- **sen** $\alpha = \frac{y}{r}$
- **cos** $\alpha = \frac{x}{r}$
- **tag** $\alpha = \frac{y}{x}$



r* = *d*(B;O)= *radio circunf.

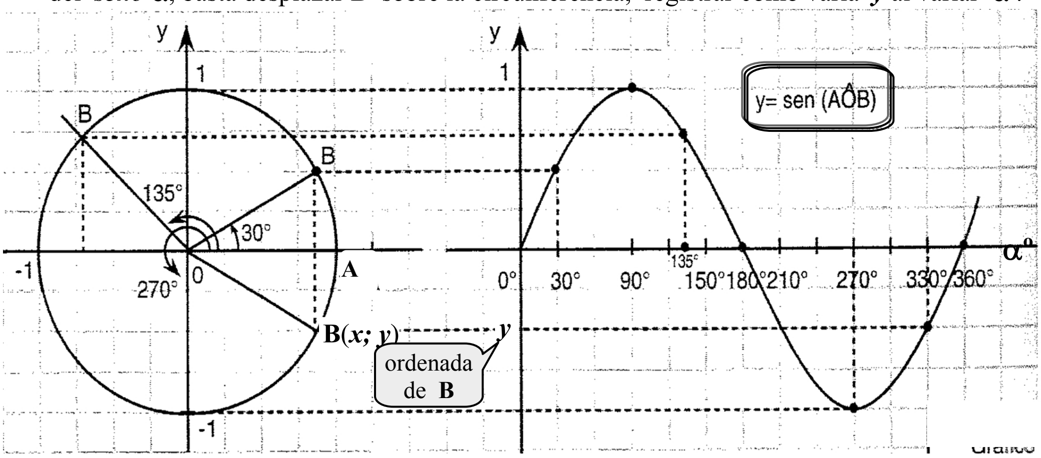
Si **r = 1 ;** ➢ **sen** $\alpha = y$ (***ordenada de* B**)

➢ **cos** $\alpha = x$ (***abscisa de* B**)

<u>Cofunciones</u>: son las *recíprocas* de las trigonométricas básicas. Las llamamos:

- recíproca del seno → cosec α = r/y
- recíproca del coseno → sec α = r/x
- recíproca de la tangente → ctg α = x/y

ⓘ En la circunferencia unitaria, ***seno*** y ***coseno*** son ***ordenada*** y ***abscisa*** de **B**. Este hecho facilita la obtención del gráfico de estas funciones. Así, y por ej., para obtener el gráfico del ***seno*** α, basta desplazar **B** sobre la circunferencia, registrar como varía ***y*** al variar α .

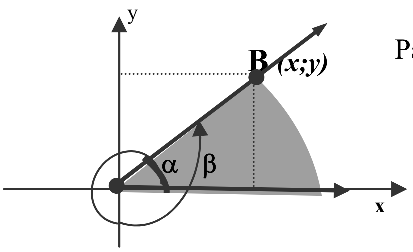


Funciones trascendentes

En general el seno, coseno o tangente de un ángulo es un número irracional. Por esta razón se las llama *funciones trascendentes.*

ángulos congruentes

α y β son congruentes cuando difieren un número entero de giros. O sea, si $\beta = \alpha + \mathbf{k}$ **giros**, con $\mathbf{k} \in \mathbf{N}$; de otra forma, si $\beta = \alpha + 2\,\mathbf{k}\,\pi$ y el lado final de β coincide con el de α.



Para las funciones de ángulos congruentes, tenemos:

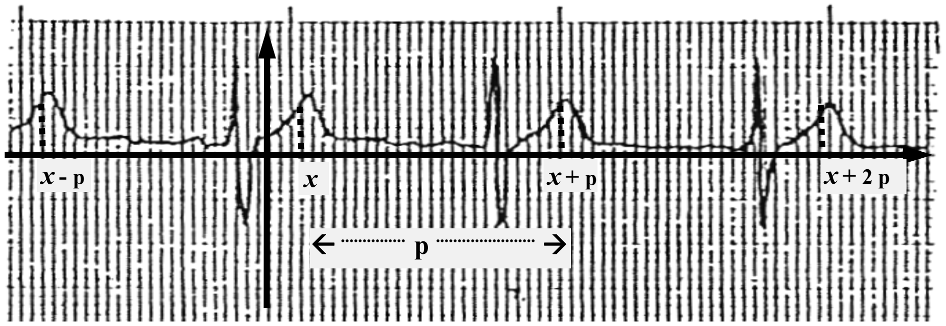
$* \cos\beta = \cos\alpha = x \rightarrow \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$

$* \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha = y \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow$ ***seno y coseno son funciones periódicas.***

Funciones periódicas

Son funciones cuyos valores se repiten *cíclicamente* a lo largo del dominio. Esto determina la existencia de un *ciclo* en el gráfico de la función; o sea, de una parte de la curva que se repite una y otra vez.



Si **p** es la longitud del intervalo correspondiente a la parte de la curva que se repite, la función toma el mismo valor en todos aquellos puntos que difieren en **p**, 2**p**, 3**p**, etc. Esto sugiere entonces la forma de expresar analíticamente la propiedad observada (la existencia de un ´*ciclo*´).

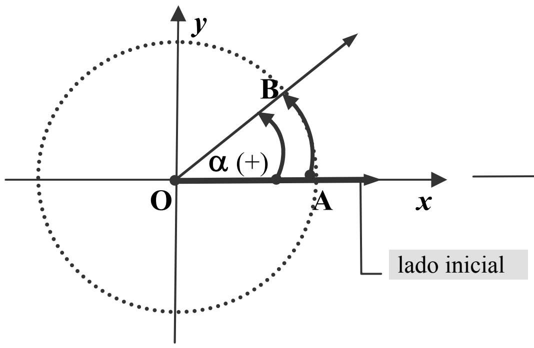
Definición 1: llamamos ***función periódica*** a toda función f para la cual existe $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^+$ tal que $f(x + \mathbf{p}) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{D}f$.

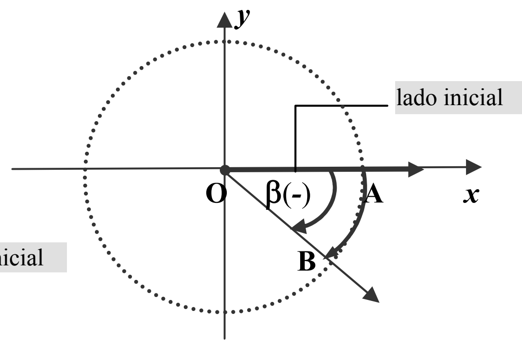
Definición 2: llamamos ***período***, al menor **p** no nulo para el cual vale la ***Def. 1.***

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas. En particular seno y coseno son periódicas con período igual a 2π :

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \;;\quad \forall\alpha$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}\alpha \;;\quad \forall\alpha$$

4.- *Sistemas para medir ángulos*





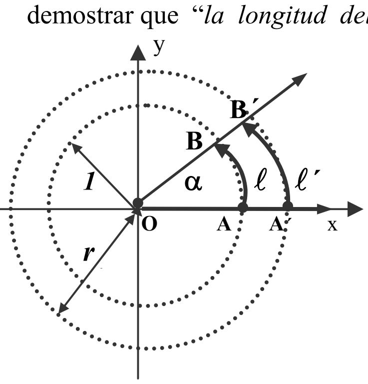
Dada una circunferencia unidad y un ángulo en posición estándar (α ó β), los lados del ángulo cortan la circunferencia en **A** (s/ lado inicial) y **B** (s/ lado final), determinan un ***arco de circunferencia*** (el comprendido entre **A** y **B**). Así, a cada *ángulo en posición estándar* menor a 1giro, le corresponde un *arco de circunferencia* (**AB**) y viceversa. Esta correspondencia biunívoca se usa para *medir* ángulos y se establece que:

´la medida de un ángulo es la medida del arco que dicho ángulo intercepta en la circunferencia unidad´.

- Los sistemas que usamos para medir ***arcos*** son dos: el ***sexagesimal*** y el ***radian.***
- La diferencia entre ambos sistemas radica en la *unidad de medida* adoptada.
  En el sistema sexagesimal es el ***grado*** ; en el sistema *radian* es ***unidad de long***.

medida de ángulos en GRADOS	La medida en ***grados del ángulo*** α es la medida en ***grados del arco*** **AB** que este intercepta en la circunferencia unidad.
medida de ángulos en RADIANES	La medida en ***radianes del ángulo*** α es la ***longitud del arco*** $\overset{\frown}{AB}$ que este intercepta en la ***circunferencia unidad***.
unidad de medida de ángulos	***1 grado*** = *ángulo que abarca un arco igual a la 360 avas partes de toda la circunferencia.* ***1 radian*** = *ángulo que en la circunferencia unidad (r = 1); intercepta un arco de longitud 1.*

ⓘ La *´longitud´* del arco interceptado por un ángulo en una circunferencia depende del radio de la circunferencia. En particular, a mayor radio, mayor longitud de arco. Se puede demostrar que "*la longitud del arco es directamente proporcional al radio*".



O sea que:

si $\mathbf{L} =$ long. $\overset{\frown}{AB}$ entonces $\mathbf{L/r} = cte$ **.**

- Sea $\ell =$ long. $\overset{\frown}{AB}$ (circunf. $r = 1$);
- Sea $\ell' =$ long. $\overset{\frown}{AB}$ (circunf. $r \neq 1$);

Luego: $\dfrac{\ell'}{\mathbf{r}} = \dfrac{\ell}{\mathbf{1}} = \ell =$ ***medida de*** α (en rad.)

Conclusión*:** si $\mathbf{r} \neq \mathbf{1}$, la medida α en ***radianes , se obtiene como el cociente entre **L** (longitud del arco interceptado en la circunferencia) y **r** .

En lo que sigue, con α indicamos tanto el ángulo como su medida. Luego:

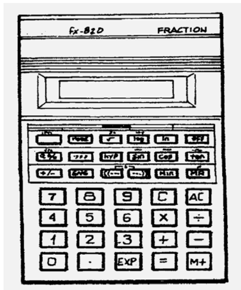
$$\alpha \text{ (rad.)} = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{r}} \quad ; \qquad \mathbf{L} = \text{long. } \overset{\frown}{AB} \quad , \quad \mathbf{r} = \text{radio circunf.}$$

La medida de un ángulo en el sistema radian es un número real adimensional.

***Ejemplo*:** $\mathbf{L} = \mathbf{\textit{6 cm}}.$; $\mathbf{r} = \mathbf{\textit{5 cm}}.$

$$\alpha = \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{r}} = \frac{6\,\mathbf{cm.}}{5\,\mathbf{cm.}} = \mathbf{\textit{1,2}}$$

α subtiende una arco de ***1,2 cm.*** en una circunferencia de $\mathbf{r} = \mathbf{\textit{1 cm}}$.



Las calculadoras permiten calcular el seno (coseno o tg) de un ángulo expresado en *grados* o en *radianes*.
Si al encender la calculadora en pantalla aparece "**DEG**"; esto indica que la calculadora está programada para hallar el valor del seno de ángulos expresados en ´***grados***´.

Así para ***sen 1***:

1 — **sen** — **0. 0174524** ⇨ ***sen 1º*** .

*en modo DEG, la calculadora interpreta el ***1*** como "ángulo de ***1*** grado".

Si pasamos al modo "**RAD**"; la calculadora queda programada para hallar el valor del seno de ángulos expresados en ´***radianes***´ .

Así para ***sen 1***, obtenemos:

1 — **sen** — **0.8414709** ⇨ ***sen 1 (rad.)*** .

*en modo RAD, la calculadora interpreta el ***1*** como "ángulo de ***1*** radian"

Cuidado!!*:** ***sen 1 ≠ sen 1º .

1** (rad)* = **57.29 º** → ***sen 1**(rad)* = ***sen **57.29 º** = **0.8414709**

ⓘ Para α =360º el *arco* interceptado es la circunferencia.

Luego, para α en radianes tenemos,

α (rad.) = ***long.de la circunferencia de radio* 1** = **2π**

y podemos establecer la relación entre ambos sistemas.

$0° = 0$

$90° = \frac{\pi}{2} = 1.57 \ldots$

$180° = \pi = 3.14\ldots$

$270° = 1.5\,\pi = 4.71$

$360° = 2\pi = 6.28\ldots$

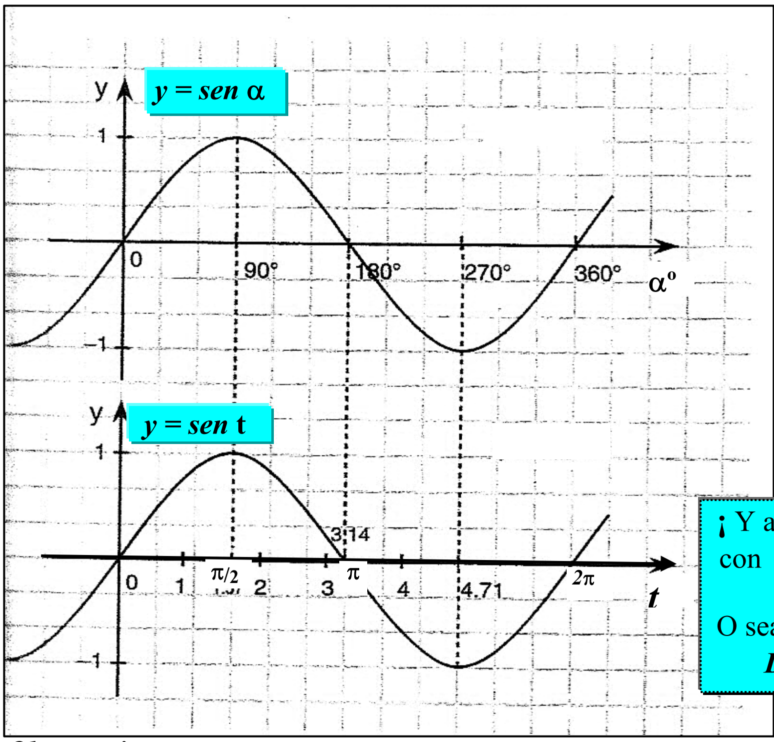
5.- NUEVO, PERO NO TANTO…

Dado que la medida de un ángulo en radianes es un ***número real*** podemos identificar cada ángulo con un número real: ***su medida en radianes*** (long. arco en circunf., r = 1).

$$\alpha \text{ (rad)} \leftrightarrow \mathbf{t} \in \mathbf{R}$$

Y de aquí la utilidad de este sistema; esta identificación entre ángulos y números reales es la que permite tratar a las funciones trigonométricas como ***<u>funciones escalares</u>***; o sea, como funciones con ***<u>dominio en los reales</u>***.

Más aún, esto permite interpretar la ´***medida del ángulo***´ como ´***tiempo***´ .
En definitiva, es el hecho de medir los ángulos en el sistema radian lo que posibilita el uso de las funciones trigonométricas en la *modelización* de *procesos dinámicos;* o sea, de procesos variables en el tiempo.



¡ Y ahora tenemos ***sen t*** con ***t*** un número real **!**

O sea, tal que,
Dominio seno: **R** .

Observaciones:

1) A partir de aquí, trabajamos las funciones trigonométricas con dominio en los reales; o sea, ***con los ángulos medidos en radianes***. Por ello aconsejamos que cuando se vaya a trabajar con funciones trigonométricas se revise la calculadora, que la misma esté en el modo "**RAD**".

2) El hecho de interpretar la variable independiente como ***´tiempo´***; en particular, como ***tiempo*** para recorrer el ***arco*** interceptado por el ángulo en la circunferencia unidad, es lo que posibilita la aplicación de dichas funciones en el tratamiento, modelización o simulación de procesos o fenómenos reales; en particular, de aquellos procesos caracterizados por presentar un ciclo o período. (no tendría sentido, por ejemplo, hablar de 30º de tiempo).

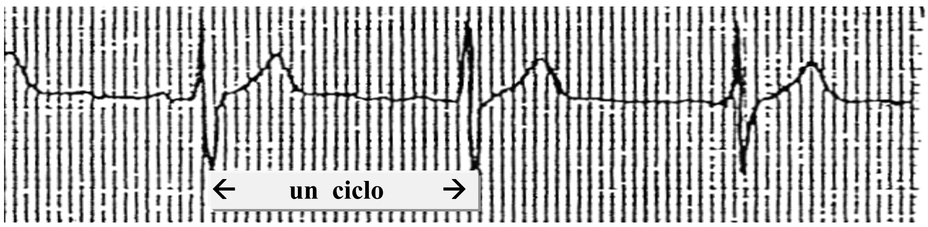
ANEXO XII

Movimiento ondulatorio - Ondas

Históricamente ha sido preocupación del hombre comprender los distintos fenómenos que lo rodean, usar este conocimiento en la mejora de su calidad de vida. Desde un principio focalizó su atención en fenómenos categorizados como *´regulares´*; o sea, en aquellos fenómenos donde se observa alguna *´regularidad´* o *´patrón´* en el proceso que lo determina.
En esta instancia nos vamos a ocupar de un fenómeno de este tipo donde la regularidad se manifiesta del siguiente modo: ***existe un hecho que se repite una y otra vez, en forma cíclica***.
Son fenómenos de este tipo: la revolución de los planetas alrededor del sol, los latidos del corazón, etc. En general, estos procesos pueden ser representados por funciones escalares; en particular por funciones cuyas graficas resultan *curvas en las que se observa la existencia de un ciclo; es decir, de una parte de la curva que se repite una y otra vez, cada **T** segundos.*
En definitiva, por curvas periódicas ó *aproximadamente*(*) periódicas.

(*)*En un proceso natural los ciclos no son ´exactamente´ iguales. Luego, para calificar de regular a un fenómeno natural debemos ´relajar´ ciertos parámetros, no exigir para este la misma exactitud que para el objeto matemático, aceptar pequeñas diferencias de un ciclo a otro*.

Ejemplo: en un electrocardiograma se registra como varía en el tiempo el voltaje en el músculo cardíaco. En la figura adjunta se muestra parte de un electrocardiograma. En ella vemos claramente como una parte de la curva se repite cada vez, determinándose así un *´ciclo´*.



También vemos claramente que la curva graficada por el electrocardiógrafo define función. O sea, que si ***y*** representa el voltaje en el músculo cardíaco y ***t*** el tiempo: ***y = f(t).***
Además, dado que el ***graf f*** presenta un ciclo, se trata de una ***función periódica.***

Ondas y Sonido

Uno de los fenómenos más fáciles de estudiar y a la vez más ilustrativo de las características de las funciones periódicas son los ***fenómenos sonoros.*** Así, vamos a ocuparnos de ellos para luego ir a las cuestiones de índole matemática que nos interesan destacar en este caso.

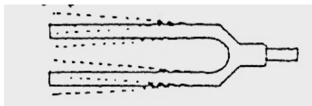
Cuando golpeamos una campana o encendemos la radio, el sonido se oye en puntos a distintas y considerables distancias de la fuente sonora. Es que el sonido se propaga a través del aire que nos rodea. Si estamos en el río y pasa un barco, al rato nos llega la ´onda´ producida por el barco en su desplazamiento. Cuando encendemos una lámpara el cuarto se ilumina. Sin dudas estamos hablando de distintos fenómenos, por consiguiente de procesos físicos también distintos; sin embargo todos ellos tienen una característica común: ***inducen una alteración física en un punto del espacio la cual se propaga a través del mismo y se recibe en otro punto a cierta distancia del primero***.
Todos estos procesos son ejemplos de lo que llamamos ***movimiento ondulatorio.***
En cualquiera caso lo importante es comprender *que es lo que se ´propaga´ en un movimiento ondulatorio*. Así, y por ejemplo, la producción de sonido comprende el desplazamiento de las moléculas del medio en el cual se propaga la onda pero "*no son las moléculas las que se desplazan desde el punto donde se produce la perturbación hasta donde muere la onda"*.

En el caso de una campana, por ejemplo, no son las moléculas de aire las que se mueven desde la campana hasta nuestro oído. En definitiva, ***lo que se propaga no es la materia***. Entonces: ***¿qué es?...*** En lo que sigue analizaremos este fenómeno de la propagación de ondas tanto para satisfacer el interrogante físico planteado como la inquietud matemática ocasionada por este tema (la razón última de la estrecha relación entre el movimiento ondulatorio y las funciones periódicas). Nos abocamos así al ***sonido***, su ***propagación***.

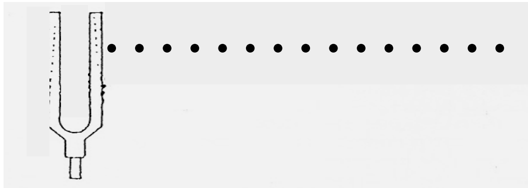
¿Qué es el sonido?.

Desde el punto de vista físico podemos decir que el sonido está producido por *variaciones de presión en el aire* provocadas por el movimiento de una fuente sonora.

Comenzamos entonces considerando el sonido producido por un *diapasón* de los usados para afinar instrumentos musicales. El mismo consiste en una horquilla de metal con dos dientes o barras, las cuales, al ser golpeadas, comienzan a vibrar rápidamente, producen ´*sonido*´.



¿Qué es lo que sucede?:

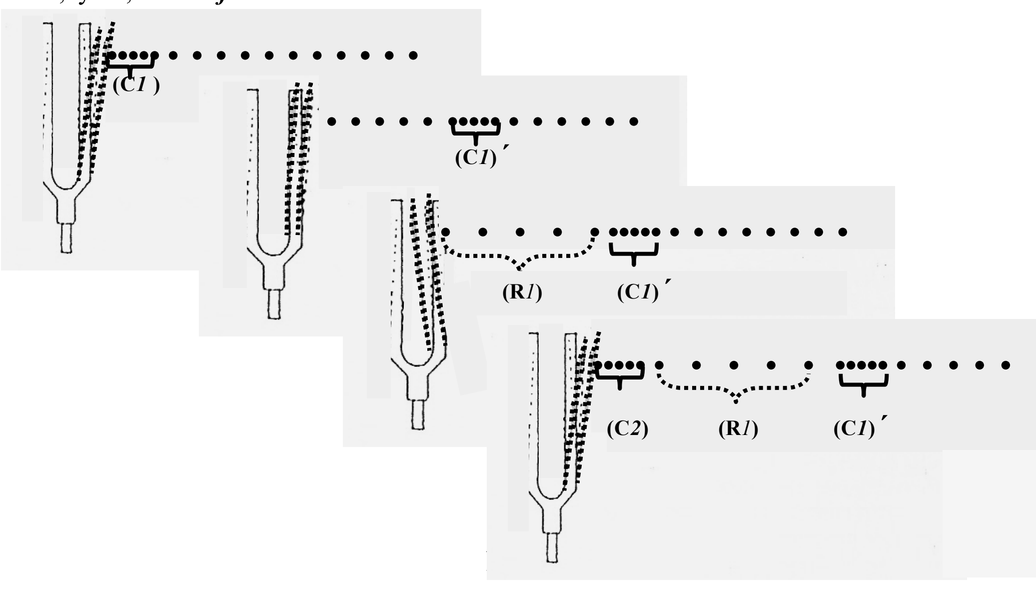


* Antes de ser golpeadas las barras las moléculas de aire próximas a ellas se encuentran en *equilibrio*; es decir, uniformemente distribuidas (la *presión* es la misma en cualquier punto).

* Al ser golpeadas, las barras se desplazan. Supongamos que en principio, hacia la derecha.

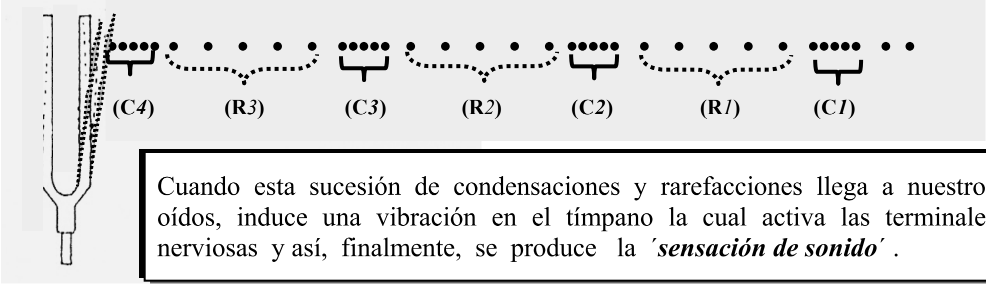
* La barra al desplazarse *comprime* las moléculas de aire próximas a ella y a su derecha (C*1*). Este fenómeno se llama ´***condensación***´. Como la presión del aire tiende a uniformarse las moléculas *comprimidas* se desplazan hacia la derecha donde el *amontonamiento* es menor; inducen así una *condensación* en las moléculas próximas a ellas y a su derecha (C*1*)´. Las nuevas moléculas comprimidas reaccionan igual y así, ***la condensación se traslada hacia la derecha***.

* ***En simultáneo***, una vez alcanzado el máximo desplazamiento a derecha, la barra comienza a moverse hacia la izquierda, hacia la posición inicial. Este desplazamiento produce un ´*vacío*´ en la región que antes ocupaba, vacío que fuerza a las moléculas inmediatamente a su derecha a moverse hacia la izquierda. Se genera así una zona ´*poco comprimida*´ (R*1*). Este fenómeno se llama ´***rarefacción***´. Esta zona poco comprimida fuerza a otras moléculas a desplazarse hacia allí; y así, ***la rarefacción se va trasladando hacia la derecha.***



*La vibración del diapasón dura cierto tiempo. En ese tiempo, cada vez que la barra avanza hacia la derecha, se reinicia el proceso. O sea, se produce una nueva condensación (C*2*), seguida de una nueva rarefacción (R*2*)......, etc.

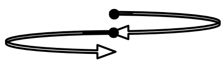
* Así, mientras dura la vibración de los dientes del diapasón, tenemos una ***sucesión*** de ***condensaciones*** y ***rarefacciones*** desplazándose hacia la derecha. (idem a izquierda).



Cuando esta sucesión de condensaciones y rarefacciones llega a nuestros oídos, induce una vibración en el tímpano la cual activa las terminales nerviosas y así, finalmente, se produce la ***´sensación de sonido´*** .

Conclusiones:

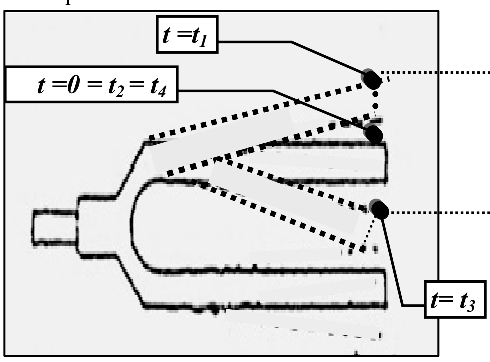
- Lo observado muestra que al producirse la *´condensación´* la molécula de aire avanza hacia derecha; que luego, al producirse la *´rarefacción´*, avanza hacia la izquierda. En definitiva, que cada molécula ***oscila*** rápidamente a derecha e izquierda en una pequeñísima región alrededor de su posición de *equilibrio*.

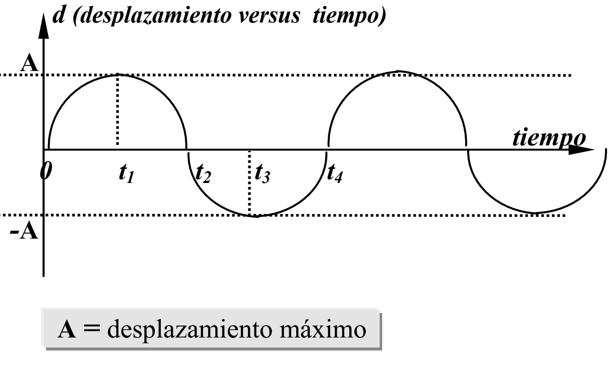


  (*va y vuelve*, *no se desplaza desde el diapasón hasta nuestros oídos*).
- Lo que se trasmite entonces es la *sucesión de condensaciones y rarefacciones*; o sea, el *´estado de movimiento´* de la molécula.
- En rigor, no todas las moléculas se mueven de la manera descripta (como siempre que se trata de describir un fenómeno natural, se han hecho muchas simplificaciones). Sin embargo se sabe que, colectivamente y en promedio, *las moléculas se mueven de esta forma*. Así, esta descripción resulta *´válida´* a los efectos de estudiar el fenómeno.

Representación gráfica de la onda sonora

Detectado como se mueven las moléculas, podemos representar gráficamente dicho movimiento en un sistema cartesiano ortogonal. Para ello tomamos el ***tiempo*** en el eje horizontal y, en el vertical, ***el desplazamiento de la molécula (d) respecto a su posición de equilibrio*** (***d = 0***), ***en el instante t*** . Para realizar este gráfico ubicamos el diapasón en forma horizontal y consideramos el desplazamiento de una *molécula ideal* ubicada sobre el diente superior del diapasón. Suponemos también que al comenzar a vibrar, dicho diente se desplaza hacia arriba.





Descubrimos así que la curva que representa las oscilaciones de las moléculas de aire es la gráfica de una función del tipo: $y = A \operatorname{sen} \omega t$. → ***SONIDO PURO***

<u>Sonido puro</u>: ***$y = A$ sen ωt.***

ⓘ el sonido correspondiente a una onda senoidal (como el producido por un diapasón), es un sonido particularmente simple, de allí que a este tipo de sonido lo llamamos *´sonido puro´*.

ⓘ los sonidos, aún los puros, presentan *diferencias auditivas* que normalmente podemos percibir. ***Intensidad***, ***altura*** y ***timbre*** son cualidades del sonido que hacen a la diferencia auditiva entre ellos. ¿De qué o quien dependen la intensidad o altura de un sonido?: de los valores de A y ω; o sea, de los parámetros que caracterizan al sonido puro. Veamos esto:

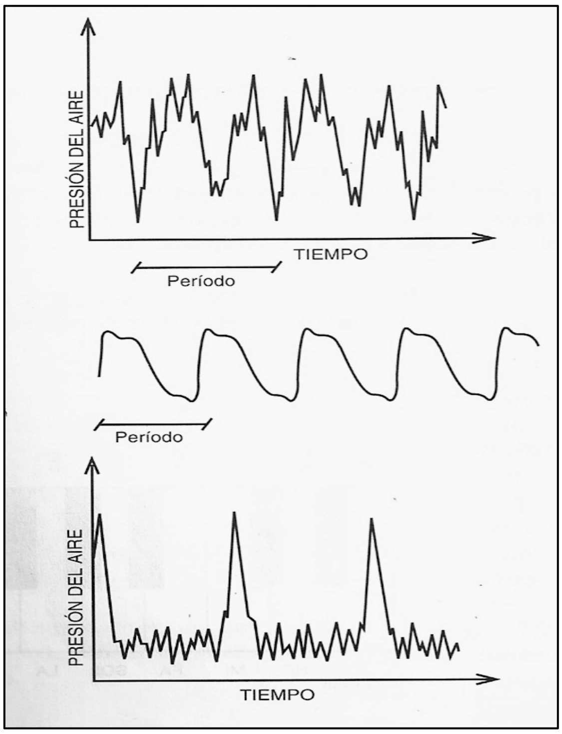
▸ ***Intensidad***: con este término indicamos si el sonido se escucha ***más o menos ´fuerte´.*** Si al diapasón lo golpeamos *más fuerte,* escuchamos el *mismo sonido* pero con *más intensidad.* Este fenómeno obedece al hecho de que el diente del diapasón, al vibrar, tiene un desplazamiento mayor respecto a su posición de equilibrio. Consecuentemente, las moléculas de aire, también sufren un mayor desplazamiento mayor respecto a su posición de equilibrio. Como en la fórmula de un sonido puro el ***desplazamiento máximo*** viene dado por A, resulta claro entonces que este parámetro refiere a la ***intensidad del sonido***. **[Intensidad ↔ Amplitud ↔ A]**

▸ ***Altura:*** este término se usa para indicar si un sonido es ***más o menos agudo***. Si se hacen vibrar diapasones de *distintas longitudes,* se observa que a medida que la longitud del diente disminuye, las vibraciones se hacen *más rápidas*, el sonido *más agudo*. En cambio, si el diapasón es largo, las vibraciones son *más lentas*, el sonido *más grave*. Concluimos así que esta cualidad del sonido de ser más agudo o más grave, ***resulta de la mayor o menor <u>rapidez</u> con que se producen las vibraciones***. En otras palabras, de la cantidad de vibraciones o ciclos que se produzcan por segundo, y esto no es otra cosa que la ***frecuencia***. Como en la fórmula de un sonido puro quien determina la ***frecuencia*** es ω, resulta claro entonces que este parámetro esta relacionado con la ***altura del sonido***. **[altura ↔ *frecuencia* ↔ ω]**

▸ ***Timbre:*** esta es una cualidad del sonido que permite diferenciar si una misma nota (igual *altura*) tocada con la misma *intensidad*, proviene de un piano, una guitarra o un violín. Como la altura (ω) y la intensidad (A) son la misma, esto significa que el ***timbre*** es una cualidad del sonido que no podemos relacionar con ninguno de los parámetros del sonido puro. Entonces, ***¿qué determina el timbre de un sonido???.***
La respuesta a este interrogante la da el descubrimiento de Fourier.
El sonido puro (ej: el producido por un diapasón) es un sonido extremadamente simple; en general, los sonidos producidos por la voz humana o por instrumentos musicales son mucho más complejos, la onda que los representa si bien es periódica, no es una onda senoidal .

ⓘ La ***variación de presión*** producida en cada punto del espacio al vibrar una fuente sonora y la ***oscilación*** alrededor de su posición de equilibrio de la molécula en ese punto, son fenómenos interdependientes. Así, el gráfico obtenido al representar "variación de presión en el punto versus tiempo", es igual al obtenido al considerar "oscilación de la molécula versus tiempo". Concluimos así que, ***la variación de presión en el aire provocada por una fuente sonora es un fenómeno ondulatorio matemáticamente descripto por las mismas funciones que describen la oscilación de la molécula alrededor de su posición de equilibrio.***

Así, para estudiar el fenómeno sonoro podemos acudir tanto a una como a otra variable (*presión en el punto* ó *desplazamiento de la molécula*). Dado que existen instrumentos que permiten *´captar´* y *´registrar´* las variaciones de presión, nuestro objetivo se hace posible si tomamos como variable dependiente a la variación de presión. Las variaciones de presión *sonora* pueden captarse con un micrófono y visualizarse a través de un osciloscopio. De tal manera podemos obtener las ondas correspondientes a distintos sonidos, estudiar las características de los mismos a partir de las características de las respectivas ondas



Forma de onda de un violín.

¿Qué característica particular observás en estas ondas?

Forma de onda de un piano.

Forma de onda de un violín electrónico.

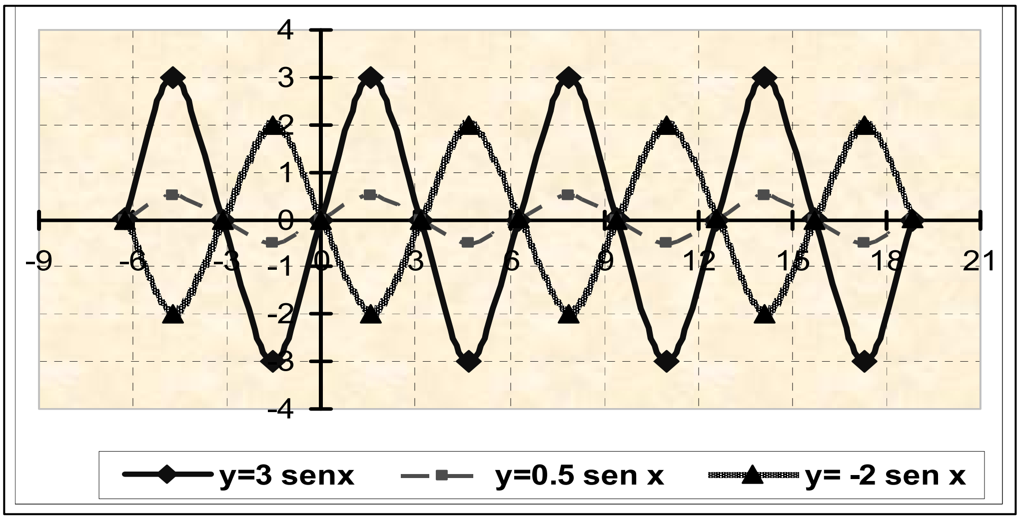
ⓘ La cantidad de fenómenos naturales que se pueden representar con funciones periódicas es enorme. Así, y en principio, dado la naturaleza tan distinta de estos fenómenos y lo amplia que parece ser la condición de periodicidad, parecía difícil que a partir de ella se pudiera obtener algún resultado importante. Pero esto no es así.

A comienzos del XIX, el célebre matemático francés Joseph Fourier (1768) demostró que, en general, las funciones periódicas presentan una propiedad bastante singular: pueden ser *aproximadas* o ser *directamente* el resultado de la suma de funciones periódicas sencillas de sólo dos tipos**.**

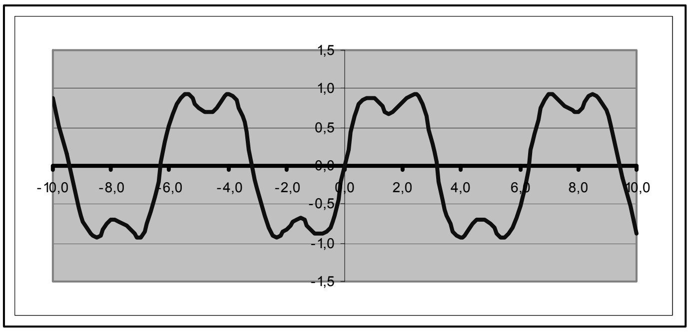
¿Cuáles?!!: nada más ni nada menos que ***seno*** y ***coseno !!.***

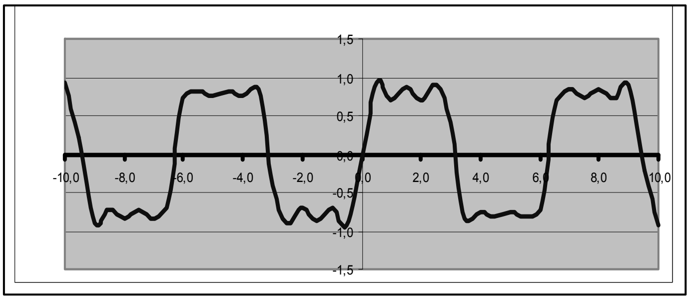
(ver *ejercicio 2c* y *3* en SONIDOS y ONDAS SENOIDALES).

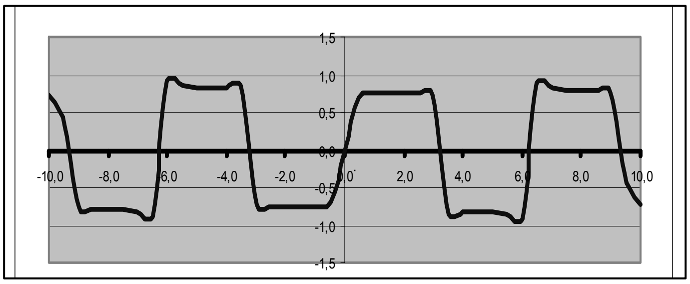
EJERCICIO 10.a



EJERCICIO 3- (Sonido y Ondas)







TALLER 11

OBJETIVO: ***métodos gráficos para la identificación de funciones tipo***.

- Hasta aquí hemos:
  - propuesto y estudiado las ***familias de funciones*** de uso más frecuente,
  - reconocido que es lo que ***caracteriza*** a cada familia tipo.
  - establecido y discutido la ***ecuación y curva prototipo*** de cada una de ellas.

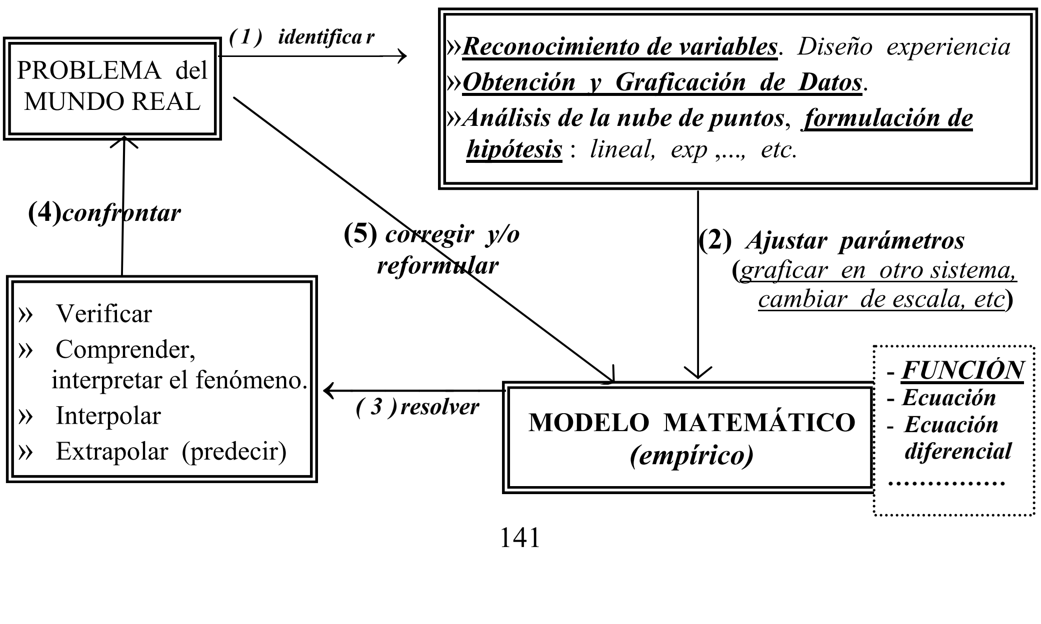
  Queda pendiente aún otra forma o método de reconocer funciones. El método a tratar aquí, ya presentado en el ***PLAN DE ATAQUE*** **(*creciente*)** y pospuesto hasta ahora por razones de orden práctico, lo vamos a aplicar a funciones dadas en forma gráfica o numérica (f_{graf}; f_{num}) y permitirá:
  - ***identificar el tipo de curva ó función***;
  - ***obtener la ley de f con fórmula y = f(x)*.**

  Es un ***método gráfico*** y puede ejecutarse en forma manual o con *auxilio* de utilitarios.
- Así, el objetivo de este taller es trabajar con *métodos gráficos para la identificación de funciones, determinación de la ley con una fórmula; modo y oportunidad de uso.* Básicamente, resolver el problema de hallar la ***función prototipo*** que mejor represente un cierto fenómeno o proceso del cual sólo tenemos la ***función gráfica*** o ***numérica*** (o sea, una serie de ***datos experimentales***); hacer esto a partir del ***tratamiento gráfico*** de estos datos.

- Un sustento importante de este método es ***la función lineal*** ya que, en esencia, el método consiste en ***´linealizar´*** la ***´curva dato´*** al efecto de poder ***calcular*** el valor de los parámetros característicos correspondientes a la función que modeliza el proceso.

Proceso de modelado a partir del *´método gráfico de identificación de curvas´*.

El siguiente esquema sintetizan los pasos del proceso a realizar al efecto de obtener el llamado ***modelo ´empírico´*** (modelo obtenido a partir de ***datos*** reunidos en una o más ***observaciones*** ó ***repeticiones experimentales*** del hecho investigado).



⏭ PLAN DE ATAQUE. ***Modelización a través de funciones. Método Gráfico***

I-II) ***Reconocimiento de la situación***:

- *reconocer tipo de problema*: ´*dos magnitudes variables relacionadas entre sí*
- *reconocer variables*: dependiente (***v.d.***) e independiente (***v.i.***).
- *etiquetar* y *describir* las variables detectadas.
- *recoger y/o describir los datos* → tabla de valores (**f_{num}**).
- *graficar los puntos/dato*; obtener **f_{graf}** .
- *analizar la nube de puntos graficada*; buscar alguna regularidad o patrón; formular una hipótesis o conjetura respecto a la función que mejor parece ´*ajustarse*´ a la nube de puntos/dato graficada.

III) ***Planificación (de un proceso para reconocer " funciones tipo ").***

Plan de Trabajo: leer del gráfico y observar si los puntos/dato rectifican; o sea; si se disponen sobre una ***recta*** o ***´casi´*** :

☞ ***rectifican*** → ***f lineal*** → $f(x) = m\,x + h$ con $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $h = f(0)$

☞ ***no rectifican*** → ***f no lineal***

En este caso formulamos una *conjetura* acerca del *tipo* de c*urva/función* que mejor parece ajustar a la nube de puntos/dato; tratamos de *verificarla*. Y es aquí donde el problema se complica; para verificar debemos *calcular los parámetros característicos* de la función propuesta y, salvo el caso de la lineal, no existen *expresiones tipo* que permitan hacer esto en forma inmediata y simple

Determinación de parámetros característicos, tenemos dos caminos:

(A) ***resolver en forma manual*** ;

(B) ***acudir a algún utilitario ó software matemático útil al efecto***.
(por ej. Excel)

ⓘ Para entender el *proceso* que *justifica la técnica* en este taller primero vamos a ver la resolución manual y luego la informática (que es a la que usamos *en la práctica*). Cabe aclarar que el software o programa es un *auxiliar de cálculo* que, en función de ello, *facilita la resolución* sólo en cuanto a *los cálculos*; las decisiones de base, tales como la muestra a considerar, el rango de variación de los datos, comandos a utilizar, interpretación de los resultados, coherencia de los mismos, bondad del modelo, etc, siguen estando a cargo del usuario (o sea, ***nosotros***). De allí entonces que, antes de abocarnos a ´*calcular*´, es fundamental conocer e *internalizar* el proceso que subyace detrás de los resultados que nos ´*devuelve*´ la PC, cada vez que la cargamos con una serie de datos.

(A) ***Proceso manual*:**

Conjeturado el tipo de función que proporcionaría el mejor ajuste de la nube de puntos, planteada su ecuación prototipo, si los *puntos/dato no rectifican*, no disponemos de fórmulas que permitan hallar los parámetros característicos *directamente a partir de dichos puntos*. Una forma de resolver este problema es ***´rectificar´ la curva***.

Rectificación de una curva, proceso por el que a través de un oportuno *cambio en el sistema de representación* se logra que la gráfica de una función que en el sistema original *se ve* como una *curva* pase a ***´verse´*** como una *recta*.

El *cambio de sistema de representación*, puede hacerse de dos formas:

(*) **Cambiando la(s) escala(s);** o sea, *graduando* uno o ambos ejes del sistema de referencia con una escala no uniforme (U= unidad →U ≠ cte); por ejemplo, con *´escala logarítmica´* , *´escala recíproca´* , etc. (existen papeles graduados con distintas escala)

(*) ***Transformando los puntos/dato***, proceso que consiste en aplicar las funciones del *cambio de escala* (ej: *log*) al o los valores de la tabla, graficar luego los *puntos transformados* en un *sistema ordinario*, es decir en un sistema donde los ejes están graduados con escalas uniformes. (U = cte).

Cualquiera sea el caso, *si en el nuevo sistema*:

☞ ***los puntos ´rectifican´***, lo conjeturado es *correcto*. Obtenemos entonces $\mathbf{r}_a$, la *´recta de ajuste´* de estos puntos; procedemos a calcular a partir de ella los parámetros de la curva de ajuste (o sea, a partir de pendiente y ordenada de $\mathbf{r}_a$).

☞ ***los puntos no ´rectifican´***, lo conjeturado *no vale*, hacemos *otra conjetura* .

Ejemplo:

Si los puntos/dato ***rectifican*** en el sistema $\boldsymbol{x}$ **-Y /** $\mathbf{Y} = \boldsymbol{ln\, y}$ $\Rightarrow$ ***f exponencial***

$$\boxed{y = a\, e^{\alpha x}} \xrightarrow{\text{aplicamos ln}} \ln y = \ln a + \alpha x \xrightarrow{\text{hacemos } Y = \ln y} \boxed{Y = \underbrace{\ln a}_{h} + \underbrace{\alpha}_{m} .\, x}$$

$\mathbf{r}_a$: recta de ajuste

$$e^{\ln y} = e^{\ln a} . e^{\alpha x} \xleftarrow[\text{y calculamos}]{\text{reemplazamos}} e^{Y} = e^{\ln a + \alpha x} \xleftarrow[\text{aplicamos la exp.}]{}$$

Conclusión: $\alpha = m =$ ***pendiente de*** $\mathbf{r}_a$; $\ln a = h =$ ***ordenada al origen de*** $\mathbf{r}_a \rightarrow a = e^{h}$

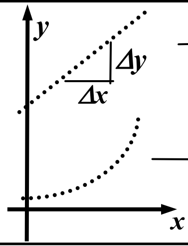
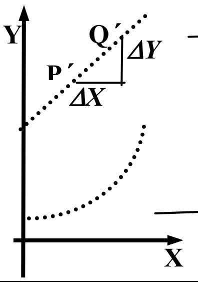
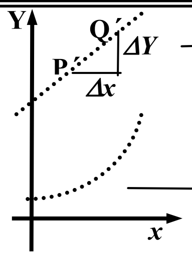
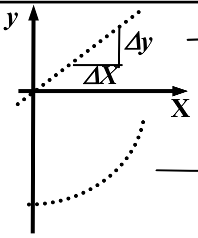
ⓘ Normalmente los puntos no aparecen *exactamente* alineados; de allí que $\mathbf{r}_a$ sea la *recta de ajuste* de los puntos transformados; o sea, la que mejor los ´ajusta´ en algún sentido el cual debemos establecer previamente. Existen varios métodos para determinar $\mathbf{r}_a$.

**Método Rápido*: tomar primer y último punto dato, calcular pendiente y ordenada al origen de $\mathbf{r}_a$.

Regresión Lineal: a la recta obtenida con este método se la llama ***recta de regresión***. Esta recta tiene la importante propiedad de que la *distancia* entre cada *punto experimental* (pto/dato) y el correspondiente de la recta *es mínima*; o sea, es la recta para la cual se ***minimiza el error***. El método para hallar los coeficientes de esta recta no es simple, se llama ***método de mínimos cuadrados*** y su formulación requiere del Cálculo en Dos Variables. Existen numerosos dispositivos, por ejemplo Excel, que poseen paquetes estadísticos que calculan los coeficientes de esta recta y dan directamente la ecuación de la misma.

***Método gráfico ´manual´ para la identificación de curvas*.**

El siguiente cuadro muestra como se puede ordenar el trabajo al efecto de proceder en *forma metódica* en la identificación de curvas, a partir del método gráfico y en forma manual. El cuadro corresponde al caso en que, *la rectificación de la curva*, se propone a través de la *´transformación de los puntos/dato´*.

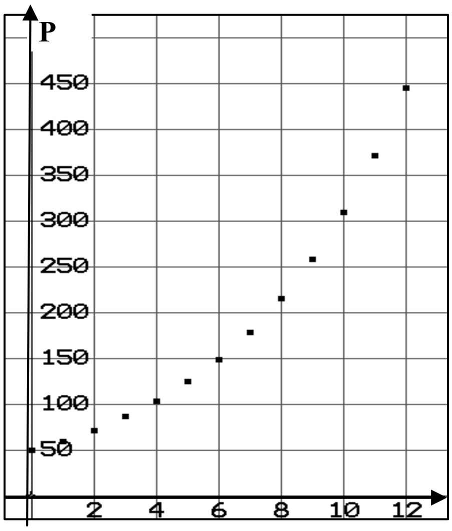
representación numérica de f	***representación gráfica de f***	***¿rectifica?***	***representación algebraica de f***	***parámetros***
x | y .... | .... x_P | y_P | P x_Q | y_Q | Q		**SI** **NO**	$y = \mathbf{m}\,x + \mathbf{h}$ *lineal*	$\mathbf{m} = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$ $\mathbf{h} = y_P - \mathbf{m}.\,x_P$
X=*ln x* | Y=*ln y* ...... | .... *ln* x_P | *ln* y_P | P´ *ln* x_Q | *ln* y_Q | Q´		**SI** **NO**	$\mathbf{Y = m\,X + h}$ $y = \mathbf{a}.\,x^{\mathbf{k}}$ *potencial*	$\mathbf{k = m}$ $\mathbf{m} = \dfrac{ln\,y_P - ln\,y_Q}{ln\,x_P - ln\,x_Q}$ $\mathbf{a} = \mathbf{e}^{\mathrm{h}}$
x | Y=*ln y* .... | ...... x_P | *ln* y_P | P´ x_Q | *ln* y_Q | Q´		**SI** **NO**	$\mathbf{Y = m}\,x + \mathbf{h}$ $y = \mathbf{a}.\,\mathbf{e}^{\alpha x}$ *exponencial*	$\alpha = \mathbf{m}$ $\mathbf{m} = \dfrac{ln\,y_P - ln\,y_Q}{x_P - x_Q}$ $\mathbf{a} = \mathbf{e}^{\mathbf{h}}$
X=*1/x* | y * | y_P * | y_Q		**SI** **NO**	$y = m\ \mathrm{X}$ $y = \dfrac{m}{x}$ *hipérbola*	$m = \dfrac{y_P - y_Q}{(1/x_P) - (1/x_Q)}$

EJEMPLO:

Estudiando el crecimiento de un potrillo que al comienzo de las observaciones pesaba 50 kg. un biólogo registra el peso del animal cada mes, durante cierto periodo. Su deseo es hallar un modelo matemático del proceso para evaluar ciertas innovaciones que está implementando.

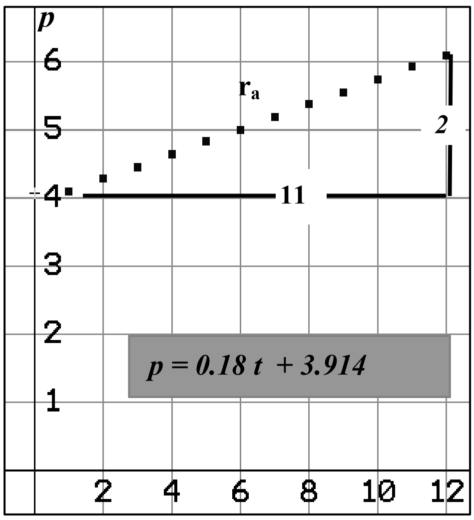
1er paso — 2do paso (*no rectifican*)

t	P
0	50
1	60
2	72
3	86.4
4	103.6
5	124.4
6	149.2
7	179.1
8	214.9
9	257.9
10	309.5
11	371.5
12	445.8



3er paso, hip: **P= a** e $^{\alpha t}$ — 4to paso, verificación

t	p = ln P
1	4.09
2	4.27
3	4.45
4	4.64
5	4.82
6	5.00
7	5.18
8	5.37
9	5.55
10	5.73
11	5.91
12	6.09



Los puntos/dato ***transformados*** , ***rectifican*** $\Rightarrow$ **P**(*t*) ***exponencial*** : **P = a. e** $^{\alpha t}$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{m} = \frac{\ln y_P - \ln y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{6.09 - 4.09}{12 - 1} = \frac{2}{11} = 0.18 \rightarrow \boxed{\alpha = 0.18}$$

$$\blacktriangleright\ \mathbf{Q(6;\, 5) \in r_a \rightarrow h = 3.914 \rightarrow \ln a = 3.914 \rightarrow \boxed{a = 50.09} \rightarrow \boxed{P(t) = 50.\ e^{0.18\, t}}}$$

PROBLEMAS y ACTIVIDADES:

Parte A - *Proceso Manual.*

1.- Para determinar la vida media de un isótopo del paladio (Pd), se registran datos acerca de su descomposición en el tiempo. La tabla adjunta contiene los valores medidos a intervalos de 5 días.

a) demostrar que la función que modeliza el proceso es una exponencial

b) hallar el tiempo de vida media para este isótopo del paladio.

t (días)	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
M (gr.)	**20**	**8.408**	**3.535**	**1.486**	**0.625**	**0.2627**	**0.1104**

2.- La siguiente tabla muestra los valores de concentración del bromuro de etilo (BrC_2H_5, compuesto cuya descomposición responde a una cinética de 1er orden), medidos durante media hora, cada 5 minutos.

Se pide: hallar una función que modelice la concentración de bromuro de etilo (reactivo) en función del tiempo; estimar con ella la concentración a los 12 min. y el tiempo requerido para que se descomponga la mitad del BrC_2H_5 .

La ley hallada, ¿permite obtener el instante en que no queda más compuesto?, y el instante en que se ha descompuesto prácticamente todo (el 99%)?. Si?, hallarlo.

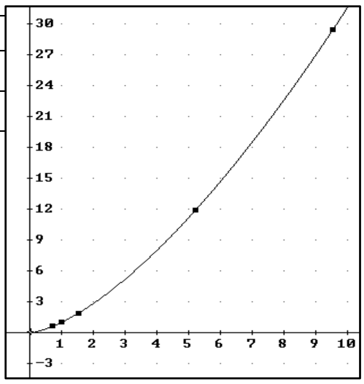
t (min)	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
C	**50**	**35.4**	**25**	**17.7**	**12.5**	**8.8**	**6.3**

3.- La siguiente tabla muestra los valores estimados de la población del mundo en el siglo XX, cada 10 años y a partir de 1900 (1900 $\leftrightarrow$ 0). Se pide de mostrar que la población tiene un crecimiento exponencial y hallar la tasa de crecimiento estimada para la misma, en el siglo XX.

Año	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	
Pob.	**1330**	**1530**	**1750**	**2010**	**2300**	**2630**	**3020**	**3460**	**3960**	**4540**	millón

4.- La tabla adjunta muestra la distancia (d) de los planetas al Sol (la unidad de distancia tomada es la distancia de la Tierra al Sol), y el tiempo de revolución alrededor del sol en años terrestres (T). Indicar si los puntos/dato verifican la tercera ley de Kepler.

Planeta	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno
d	0.723	1.000	1.523	5.203	9.541
T	**0.615**	**1.000**	**1.881**	**11.861**	**29.457**



El grafico adjunto muestra el comportamiento tendencial de los puntos dato; o sea, la relación entre *d* y T .

Sobre esta cuestión la tercera ley de Kepler, dice:

"*el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia al sol*".

Parte B - *Proceso con Excel* .

Problema 1

El siguiente registro corresponde a valores experimentales obtenidos en un laboratorio al realizar una experiencia con el objeto de estudiar cierto fenómeno.

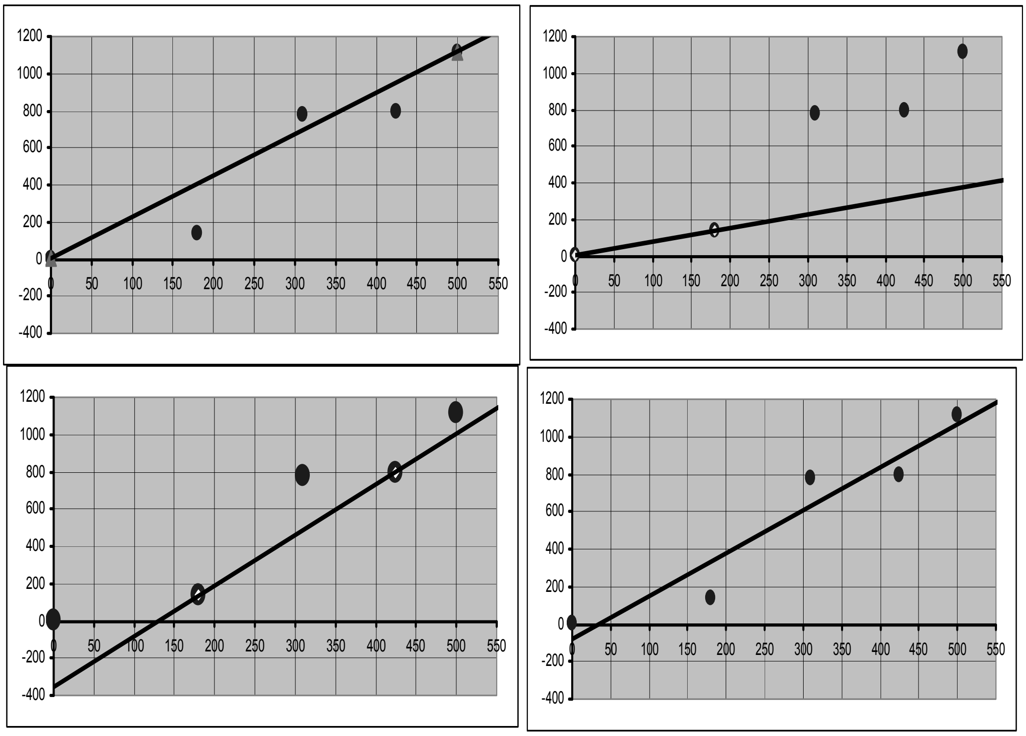
x	y	P_T
0,00	0,01	P1
180,00	135,00	P2
310,00	780,00	P3
425,00	800,00	P4
500,00	1120,00	P5

Obtenida la serie de puntos *dato* interesa encontrar un "*modelo matemático*" que la represente de tal forma que resulte útil a los objetivos propuestos. Equivalentemente, interesa hallar **FA**, la ***función que mejor ajuste*** (*en algún sentido*) a dichos puntos.
Según el Plan de Trabajo propuesto la primera función a la que acudimos es la "lineal".

Al efecto de hallar un modelo matemático para describir estos puntos, te pedimos:

a) ***Identificar*** cada una de las rectas que siguen y, de ser posible, dar su ecuación.

- r1 = recta que pasa por P1 y P2.
- r2 = recta que pasa por P2 y P4.
- r3 = recta que pasa por P1 y P5.
- r4 = ***recta que pasa "entre los puntos"*** .



b) ¿Cuál de ellas, a su juicio e intuitivamente, es la que ***peor ajusta*** a los puntos/dato ?; ¿y la que ***mejor ajusta*** ?. Evidentemente la primer pregunta es fácil de contestar (es r1) pero no sucede lo mismo con la última. ¿Porqué ?, ¿qué es lo primero que intuitiva e inconscientemente *evaluamos* en cada caso?, ¿por qué este *tipo de evaluación* no alcanza para decidir en todos los casos?.

Analizar la validez de las siguientes afirmaciones, justificar las respuestas:

1- *Toda recta* obtenida a partir de *dos puntos* de la tabla proporciona un buen ajuste de la nube de puntos.

2- *Existen rectas* obtenidas a partir de *dos puntos* de la tabla que dan un ajuste "aceptable" de la nube de puntos.

3- Sólo una recta obtenida con puntos de la tabla puede dar un ajuste "aceptable" de la nube de puntos.

4- Evaluar la *distancia* entre cada punto de la tabla y el respectivo sobre la recta, no alcanza para decidir si esa recta es la que mejor ajusta al conjunto de puntos/dato.

ⓘ para evaluar la calidad del ajuste de la recta al conjunto de puntos/dato, *intuitivamente lo* que hacemos es observar la ´*distancia*´ entre ´*puntos*´. En este caso, la *diferencia de ordenadas* entre P_T (x; y), punto de la tabla dato, y P_r (x; Y_r), el correspondiente punto sobre la recta (Y_r = m* x +h). Así, lo que hacemos es estimar, ***punto a punto***, el ***error (e)*** producido al aproximar cada punto experimental con su correspondiente en el modelo. De esta forma obtenemos una *serie de datos* para *cada recta investigada*, datos que en última instancia resultan muy difíciles de comparar recta a recta, no permiten *decidir* con que recta se produce el ´***menor error***´.

5- Te pedimos que para *cada recta* que parezca ajustar los puntos/dato construyas una tabla como la indicada, realices los cálculos (con Excel) y digas si la información así obtenida te permite decidir cual de estas rectas es la que "*mejor ajusta*". Trabaja con las ecuaciones halladas en (a) y usando el dato siguiente; r4**:** ***y = 2.3 x - 81.8.***

	A	B	C	D	E
1	x	y	Y_r = m* x + h	***e*** = y – Y_r	***e*** ^{2} = (y- Y_r)^2
2	0.00	0.01	= m*A2 + h	= B2 – C2	= POTENCIA(D2;2)
3	180.00	135.00			
4	310.00	780.00			
5	425.00	800.00			
6	500.00	1120.00			
					E= SUMA(D2:D6))

ⓘ Existe un ***criterio de ajuste*** que permite obtener la ***recta que ´mejor ajusta´*** a la vez que provee un ***método*** para el cálculo de **"m"** y **"h"**, pendiente y ordenada al origen de dicha recta, respectivamente.
El método es el de los "***mínimos cuadrados***" y el criterio que lo sustenta consiste en hacer ***mínimo el error total E*** **,** donde $E = \Sigma\, e_i^2$ con $e_i = y_i - Y_{r\,i}$.
O sea, ***E*** = "a la suma de los cuadrados de la diferencia de ordenadas entre P_T (x;y), punto de la tabla, y P_r (x; Y_r), punto correspondiente a la recta incógnita".
La recta que se obtiene acorde a este criterio es la llamada ***recta de regresión*** y es la, según vimos, hace mínima "***la suma de los errores (e) al cuadrado***".

6- Mostrar que r4 es la recta de regresión.

7- Obtener la ***recta de regresión*** usando Excel y según lo indicado en el párrafo "**Agregar líneas de tendencia**" del Tutorial de Excel.

Problema 2

El siguiente registro corresponde a mediciones obtenidas en un laboratorio. El objetivo es encontrar un "MODELO MATEMATICO" que describa este fenómeno. Para ello ir a Excel y:

0,50	2,50
1,00	1,25
1,50	0,83
2,00	0,63
2,50	0,50
3,00	0,42
3,50	0,36
4,00	0,31
4,50	0,28
5,00	0,25

a. Graficar los puntos/dato. Copiar la tabla en la hoja de cálculo, seleccionar los puntos y presionar ;

Tipo: **XY (**Dispersión**);**

Subtipo*:** dispersión con puntos dato ***no conectados.

b. Ajustar los puntos graficados con distintas funciones.

Ir a "***Agregar línea de tendencia***",
Tipo: lineal (luego exponencial; potencial, etc.) ;
Opciones: presentar ecuación en el gráfico.

c. ¿Existe una función que *visiblemente* sea la que *´mejor ajusta´* a los datos?. Si fuera así, indicar cual es y dar su ecuación.

d. Evalúa la respuesta dada en el item (c) procediendo a buscar la "curva de ajuste" en forma manual, con el proceso indicado en la "Parte A" de este taller

Problema 3

El siguiente registro corresponde a mediciones obtenidas en un laboratorio.

1	1,6
2	4,5
3	13,8
4	40,2
5	62,9
6	99,3

El objetivo es encontrar un "MODELO MATEMATICO" que describa el fenómeno estudiado en este caso.

Para ello te pedimos que hagas lo mismo que en el ejercicio 2.

Problema 4

Resolver los problemas de la Parte A usando Excel, comparar los resultados obtenidos de una y otra forma.

Notas:

1) en el caso que los puntos/datos, *rectifiquen*, la recta que se obtiene al aplicar el comando ***Agregar líneas de tendencia*** es la ***´recta de regresión´.***

El criterio adoptado para el diseño del programa es el de hacer mínimo ***E*** *(el error total);* para lo cual y según dijimos se acude al método de los ***mínimos cuadrados***. Este método proporciona el m y h de la recta buscada a partir de hacer mínima "***la suma de los cuadrados de las diferencias*** $|y - Y_r|$" con $y = f(x)$ (*función dato*) e $Y_r = m\,x + h$ (*recta incógnita*).

2) en el caso que los puntos/datos se dispongan según una *exponencial*, (*potencial u otra*), la función que se obtiene al aplicar el comando ***Agregar líneas de tendencia*** es aquella que también hace mínimo ***E*** *(el error total).* Por ende se usa el mismo método y los parámetros de ***FA*** (*función de ajuste*) se obtienen a partir de hacer mínima "***la suma de los cuadrados de las diferencias*** $|y - Y_{FA}|$" con $y = f(x)$ (*función dato*) e $Y_{FA} = FA(x)$ (*función incógnita*).

ANEXO XIII

TUTORIAL PARA EXCEL

⁂ Tutorial para Excel ⁂

1. Alcance

Cabe aclarar que el material aquí propuesto no es un manual completo y exhaustivo de ***Excel***; que el objetivo perseguido en esta oportunidad es ofrecer en forma sencilla, guiada y práctica los elementos y aspectos básicos de esta aplicación, aquellos que permitan comenzar a trabajar la misma, con cierta fluidez.
Este material, como tantos otros en el ámbito docente, surge esencialmente a partir de las notas de clase y del trabajo con nuestros alumnos, aunque con una diferencia importante respecto a otros escritos de carácter más teóricos. Su confección requirió considerar un hecho normalmente ajeno a nosotros: el vertiginoso avance tecnológico, las distintas versiones que a raíz de ello circulan de un mismo utilitario. Es decir, hubo que considerar el hecho de que el destinatario de este tutorial podía disponer de una versión de ***Excel*** distinta a la nuestra, tener una configuración de Windows distinta a la estándar (el usuario puede cambiarla a su gusto). Dada la imposibilidad de contemplar todas estas cuestiones de orden "técnico" optamos por presentar los distintos comandos y sugerencias en la forma más general posible, suponer que se conoce como ejecutar Windows y abrir Excel.
Como sin dudas, *habrá dudas*, van las siguientes indicaciones o recomendaciones:

- la computadora, usada con criterio, *no se rompe* si algo se ejecuta mal.
- los programas están provistos de "*ayuda en pantalla*". Así, ante cualquier duda se sugiere acudir a ella, "*leer atenta y completamente*" la información allí ofrecida.

Finalmente, la propuesta es, ¡¡*animarse*!!, *la PC no se rompe y los programas nos guían*. Practicar, probar, experimentar, apagar la computadora y volver a empezar si fuera necesario pero, y fundamentalmente, siempre a partir de leer atenta y completamente las indicaciones, reflexionar y volver a leerlas antes de proceder a realizar cualquier acción con el mouse o el teclado.

2. El ambiente de trabajo de Excel

Excel es una aplicación del tipo ***planilla de cálculo*** u ***hoja de cálculo***, integrada en el entorno ***Windows***. Antes de 1993 Excel trabajaba con objetos llamados, precisamente, ***hojas de cálculo***. Hoy día trabaja con objetos denominados ***libros de cálculo.***

Una ***hoja de cálculo*** es una especie de ***tabla*** cuyas ***casillas o celdas*** pueden contener texto, valores numéricos, fechas, fórmulas o funciones matemáticas.

Un ***libro de cálculo*** está formado por una cierta cantidad de ***hojas de cálculo***, presentadas estas en las solapas etiquetadas como "Hoja1", "Hoja2", "Hoja3", etc, en el borde inferior de la pantalla. Los libros de cálculo son a Excel como los Documentos a Word; luego, su manejo básico es similar al de estos documentos: se abren, cierran, graban, llevan nombre, guardan en un archivo que se almacena en disco, o en un diskete, etc.
Con ***Excel,*** en particular se pueden guardar, manipular, calcular y analizar *datos numéricos*, *fórmulas* y *funciones*; presentar rápidamente estos datos mediante gráficos de distinto tipo (cartesianos, nubes de puntos, diagramas de barras, de líneas, circulares, etc. ...) los que pueden ser creados sobre la misma hoja de cálculo.

Excel se utiliza de forma similar a la de cualquier otra aplicación en el entorno ***Windows***, esto es, mediante el ratón o el teclado, haciendo uso de distintas teclas tales como las ***flechas*** para los desplazamientos, la tecla ***Intro*** para accionar, ***Alt*** + la letra subrayada de cada menú o comando para seleccionar, etc.
Una vez arrancado el programa, al abrir un libro de cálculo lo que se ve en ventana es *una hoja de cálculo*, normalmente la "Hoja1". Se sugiere abrir un libro y probar lo sencillo que resulta activar una hoja distinta de la que aparece en pantalla con solo hacer clic con el puntero del mouse, en la solapa de la hoja que se quiere abrir.

Dependiendo de la configuración instalada, aparecerá una pantalla similar a la que se muestra en la **Fig. 1**.

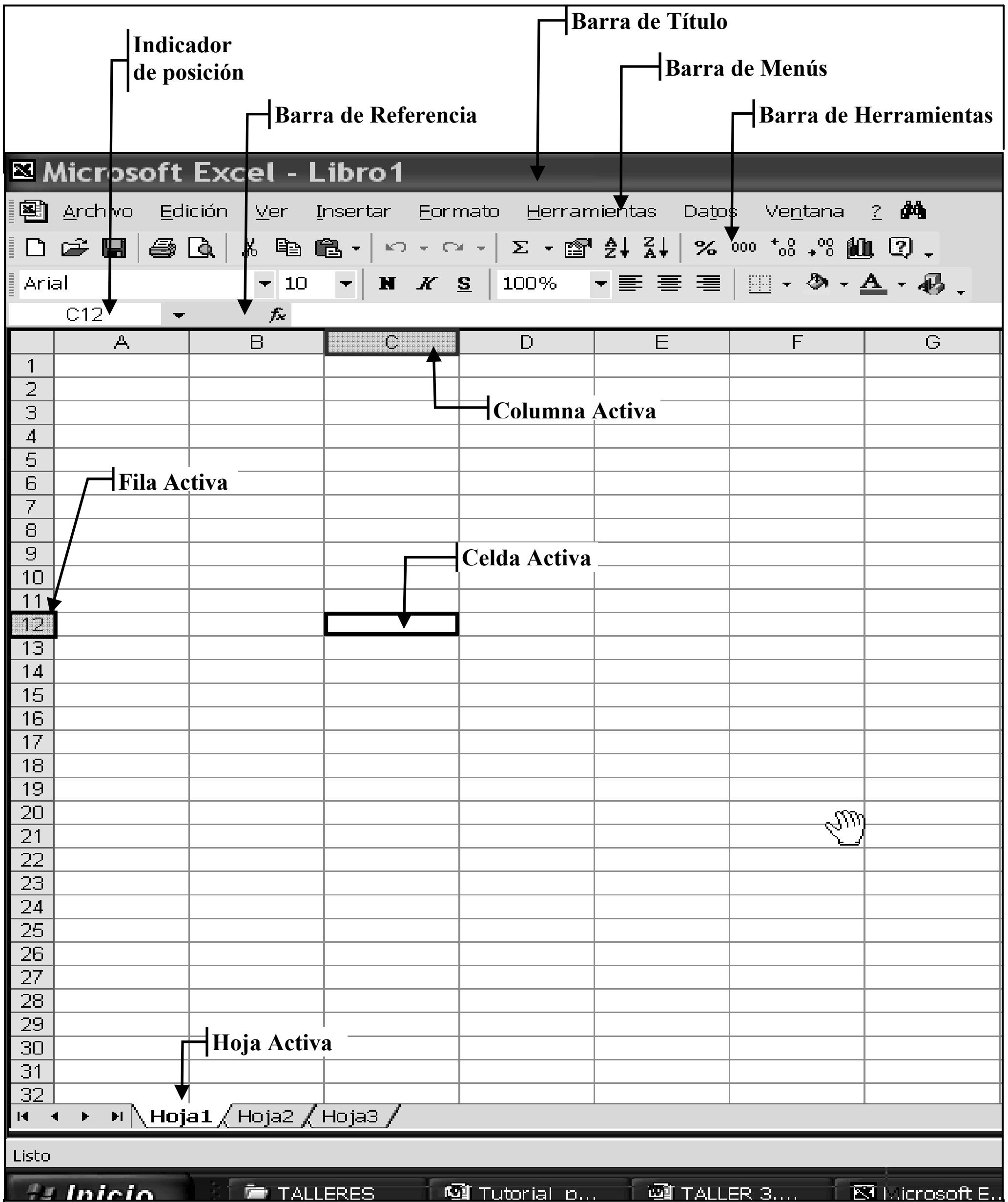


Fig. 1

3. Utilización básica de una hoja de cálculo

Al abrir ***Excel,*** el libro que aparece en pantalla tiene, por defecto, 3 hojas de cálculo. Se pueden abrir varios libros a la vez pero en todo momento ***Excel*** presenta una hoja ***activa*** (solapa resaltada en la parte inferior de la pantalla) por cada ***libro***. Vamos a trabajar sólo con una hoja de cálculo (aprendida una, las demás son iguales), no vamos a ver como *relacionar* datos de una hoja con los de las demás hojas (o libros). O sea no vamos a ver o trabajar toda la potencialidad de este utilitario, particularmente las ventajas que reportó el paso de ***hoja*** a ***libro*** de cálculo.

CONFIGURACIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO.

A continuación definimos términos con los que vamos a trabajar de aquí en más.

* ***celda***: nombre que se da a cada rectángulo de la cuadrícula. Cada celda puede almacenar tres tipos de datos: numéricos (ej: edad de una persona); alfanumérico o carácter (ej: nombre de la persona) y fórmulas o funciones (ej: (B1+B2+ B3+ B4+ B5+ B6+ B7)/ 7 , fórmula para calcular el promedio de una serie de datos numéricos almacenados en las celdas B1 a B7). *Cada celda puede almacenar un único dato; así, si ya contiene un dato y se escribe otro, se pierde el primero.*
* ***celda activa***: Es la que está preparada para aceptar información desde el telado. Se distingue de las otras pues aparece ***enmarcada de modo diferente***. Existen distintas formas de activar una celda, que vemos luego.
* ***columna activa***: columna donde se encuentra la celda activa. Las columnas se identifican con una letra mayúscula (A, B,..) en la parte superior de la hoja. La columna activa es la que aparece resaltada. Para "activar" una columna basta poner el cursor sobre la letra de la columna en cuestión y hacer *clic*.
* ***fila activa***: fila donde se encuentra la celda activa. Las filas se identifican con un número (1, 2, 3,...) a la izquierda de la hoja. La fila activa es la que aparece resaltada. Para "activar" una fila basta poner el cursor sobre la letra de la columna en cuestión y hacer *clic*.
* ***coordenadas***: letra y número que aparecen en el "indicador de posición" (Fig.1). Este par "LetraNúmero" (C12) indica la ***dirección*** de la celda activa; o sea, columna y fila que corresponden a dicha celda. Se lo llama ***coordenadas de la celda***.

SELECCIÓN Y ACTIVACIÓN DE CELDAS

Para ***introducir*** -o ***borrar***- datos en una celda la misma tiene que estar ***activada***.
Para ***activar*** una celda, podemos:

→ posicionar el cursor del mouse sobre la celda y ***clicar sobre ella***.
→ llegar desde celdas vecinas utilizando las ***flechas del teclado***.

Con cualquiera de estas acciones habilitamos la celda para introducir en ella datos, texto o fórmulas. El contenido de la celda activa se visualiza en la *Barra de Referencia* y podemos introducir datos en ella, tanto como en la celda activa. También podemos ***modificar*** datos, hacer esto desde la barra de referencia o desde la propia celda haciendo ***doble clic*** sobre ella (de otra forma el contenido se *borra*). La modificación se hace efectiva pulsando la tecla *Intro*; cambiando de celda activa con las flechas del teclado o clicando sobre otra celda.

Para ***seleccionar un conjunto de celdas*** tenemos distintos procedimientos según sea dicho conjunto. Así, para ***seleccionar*** :

* **toda la hoja de cálculo:** clicar con el ratón en la esquina superior izquierda de la hoja (intersección de la *´fila´ con los nombres de columnas* y la *´columna´ con la numeración de filas*).

* **una fila ó columna:** clicar una sola vez sobre la *etiqueta* (número o letra que corresponde a la fila o la columna, respectivamente).

* **un rango de varias filas y/o columnas contiguas**: clicar sobre la primer etiqueta y *´arrastrar´* (sin soltar el botón del ratón) hasta la última etiqueta del rango deseado.

* **un bloque contiguo de celdas (*un rectángulo*):** clicar con el ratón en la celda ubicada en la *´esquina´* del bloque, arrastrar el cursor hasta la celda ubicada en la esquina del bloque opuesta a la inicial.

* **bloques no contiguos de celdas:** seleccionar un bloque cada vez (como se indicó antes) manteniendo presionada la tecla ***Ctrl*** hasta finalizar la selección de todos los bloques. De este modo se evita que la selección de un nuevo bloque anule los seleccionados previamente. Esta técnica puede utilizarse también para seleccionar filas o columnas no contiguas.

INTRODUCCIÓN DE DATOS EN UNA CELDA

Una vez ***activada*** una celda introducimos datos en ella escribiéndolos directamente mediante el teclado o acudiendo a los comandos ***copiar*** y ***pegar.*** Si los datos son ***numéricos,*** debemos cuidar que la celda esté preparada para procesarlos según necesitemos para el caso ya que Excel ofrece distintas *´categorías´* (ver Fig. 2). Para ello, en la *barra de herramientas,* clicamos la siguiente secuencia de comandos: **Formato/ Celdas/ Número***(solapa)***/ Número***(categoría)*.

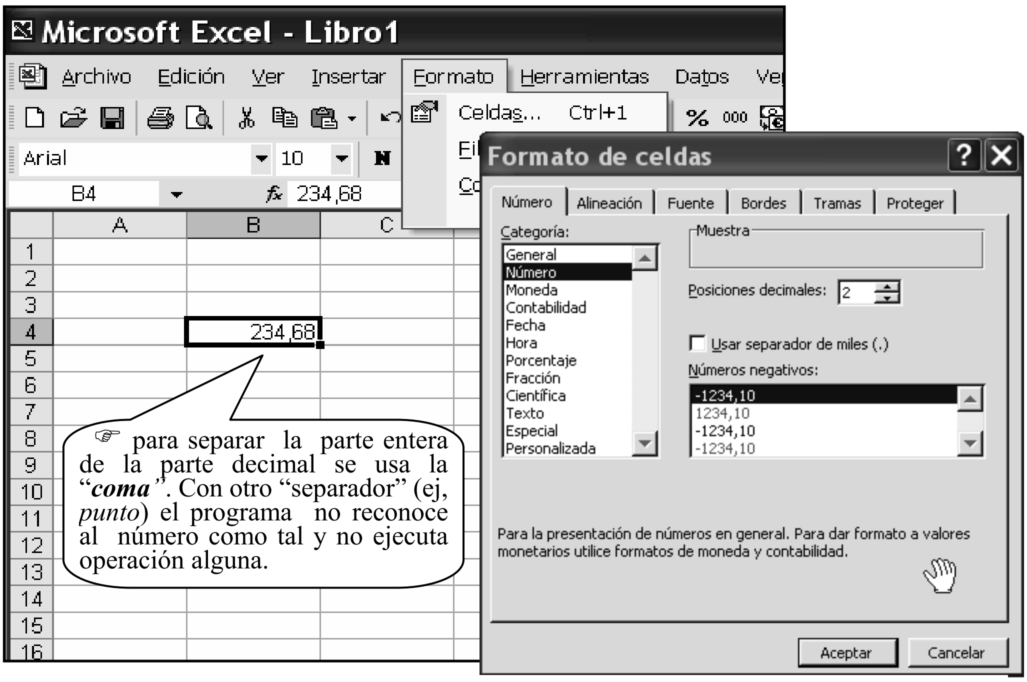


Fig. 2. Introducción de datos numéricos

Una vez introducido datos en una hoja de cálculo podemos ejecutar sobre ellos desde operaciones sencillas (suma, resta,..) hasta complejos cálculos financieros, estadísticos o científicos. Para obtener información sobre los ***operadores o funciones*** en Excel podemos abrir la ***Ayuda***, buscar y clicar sobre el objeto que nos interesa en el listado que se despliega al abrir la solapa *´Contenidos´*
Ver en Fig. 3 , ***Operadores de Cáculo.***

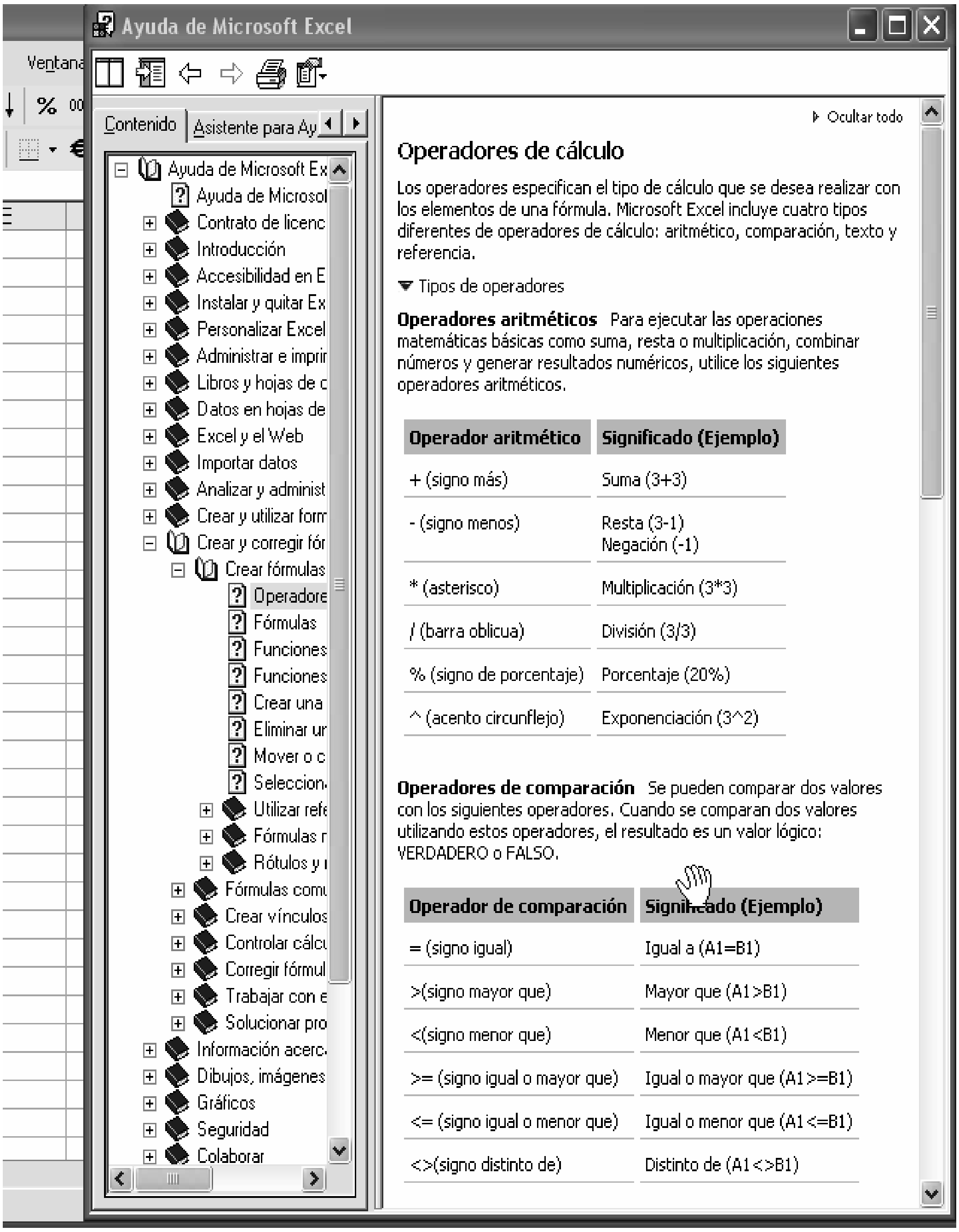


Fig. 3. Ayuda de Microsoft Excel. Operadores

FÓRMULAS Y FUNCIONES

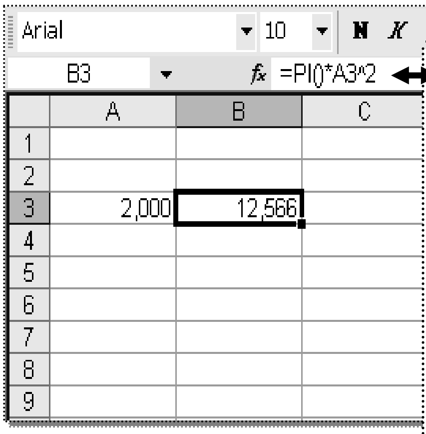
Fórmulas

Todas las operaciones que se pueden hacer en una hoja de cálculo se llevan a cabo mediante ***fórmulas***. Estas se construyen acudiendo a los operadores disponibles en Excel y se pueden introducir en la ***celda*** o en la ***Barra de Referencias.***

Las *fórmulas* permiten efectuar cálculos a partir de valores introducidos en la hoja de cálculo y los operadores disponibles en Excel.
Comienzan siempre con el signo igual " = ". Por ejemplo, la siguiente *fórmula* multiplica 2 por 3 y a continuación suma 5 al resultado: " = 2*3 + 5 ".

Partes de una fórmula

Una fórmula puede contener: ***funciones***, ***referencias***, ***operadores*** y ***constantes***.



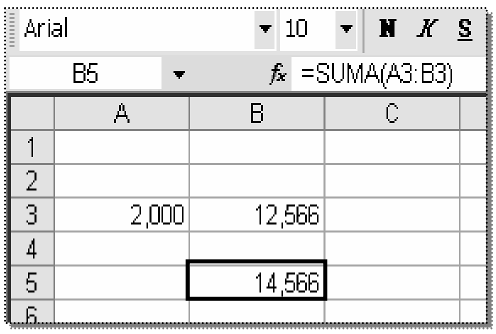
Partes de una fórmula (ejemplo):

* *Función:* función PI(). La fórmula devuelve el valor de π (*3,141*....).
* *Referencias* (o nombres): A3. La fórmula devuelve el valor en la celda A3.
* *Constantes*: números o valores de texto escritos directamente en una fórmula. Ej: *2*.
* *Operadores*: el operador "^ " eleva el valor en A3 a la potencia 2. El operador * multiplica π por el resultado de la potencia (Ej: π. 2^2 = 12,566).

Fig. 4. Partes de una fórmula

* ***Funciones***

Las funciones son *fórmulas predefinidas* que ejecutan cálculos o acciones en un orden o estructura dado utilizando valores denominados ***argumentos***. Por ejemplo, la función "SUMA" ejecuta la suma de los valores cuyas referencias se indican entre paréntesis, luego del nombre de la función. (A3:B3).
En el ejemplo: ***14,566 = 2,000 + 12,566***



* ***Referencias***

Una referencia *identifica* una celda o un rango de celdas en una hoja de cálculo e indica a Microsoft Excel en qué celdas debe buscar los valores o los datos que desea utilizar en una fórmula.

Estilo de referencia: Excel utiliza de forma predeterminada el estilo de referencia que identifica a las columnas *con letras* (de A a IV, para un total de 256 columnas) y a las filas *con números* (de 1 a 65536). Para referir a una celda, damos sus ***coordenadas.***

Para hacer referencia a	Utilizar
La celda de la columna A y la fila 10	A10
El rango de celdas de la columna A y de las filas de la 10 a la 20.	A10:A20
El rango de celdas de la fila 15 y de las columnas B a E.	B15:E15
El rango de celdas de las columnas A a E y de las filas 10 a 20.	A10:E20

* ***Operadores:*** Los operadores especifican el tipo de cálculo que se desea realizar con los elementos de una fórmula. Como vimos en pag. 5, Excel incluye cuatro tipos diferentes de operadores de cálculo: *aritmético, comparación, texto* y *referencia*.

* ***Constantes***: Una constante es un valor que no se calcula. Por ejemplo, el número 210, la fecha 9-10-2008 o el texto "Ganancias trimestrales" son constantes. Si se utiliza valores constantes en la fórmula en vez de referencias a celdas, el resultado cambia sólo si modifica la fórmula.

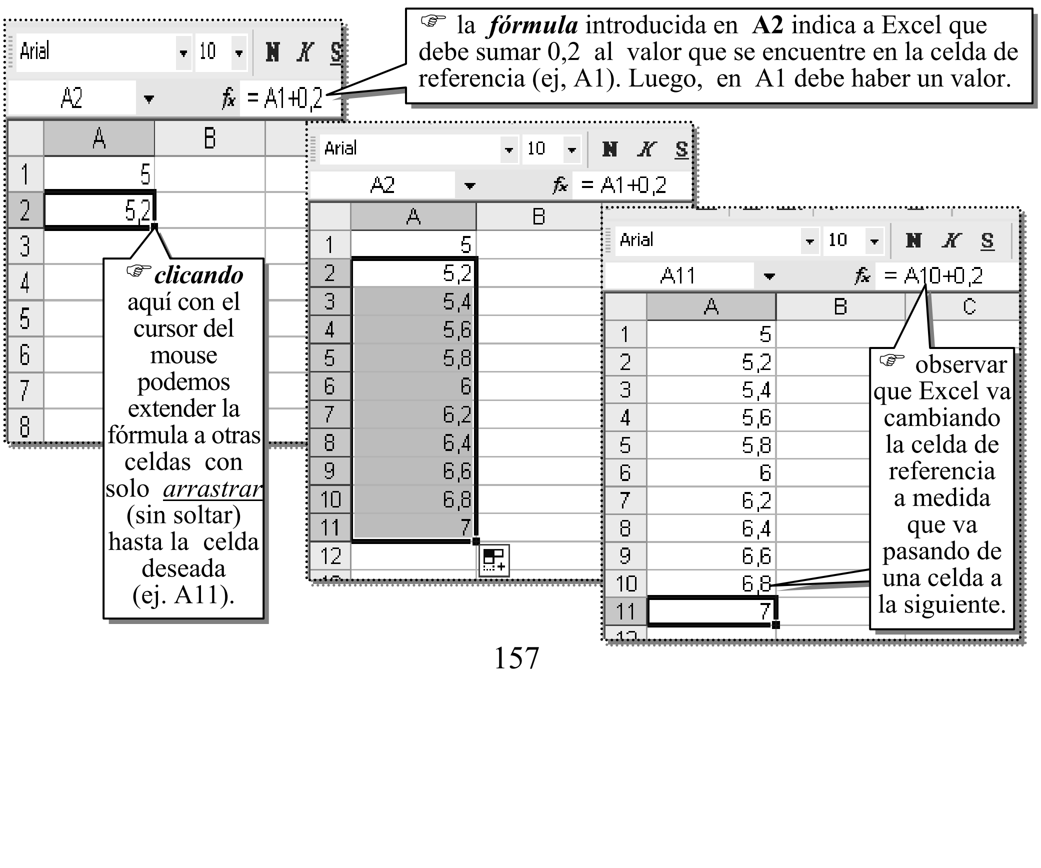
Introducción de fórmulas. Para introducir una fórmula procedemos a:

1. Seleccionar con el ratón la *celda* (o la zona derecha de la *Barra de Referencias*).

2. Teclear en ella el signo igual **" = "**. De esta forma informamos a ***Excel*** que lo que vamos a introducir en la celda activa es una ***fórmula***.

3.Teclear valores numéricos, referencias a celdas, constantes o nombres, todos ellos ellos separados por los correspondientes ***operadores***. Si la fórmula a ejecutar *ya está creada* ó *disponible en Excel como función*, podemos entonces acudir a ella e introducirla directamente como se indica en lo que sigue. (Ver, ***Funciones***)

4. Terminar la introducción de la fórmula pulsando ***Intro***.



▸ *Funciones*

Para hacer más fácil el uso del programa e incrementar su velocidad de cálculo Excel está provisto de ***funciones.*** Estas actúan sobre los datos contenidos en una celda o conjunto de celdas de la misma forma que las *fórmulas* pero *directamente*; es decir, ya están *programadas* para realizar un determinado cálculo y no hace falta que el usuario la construya paso a paso, dentro de la celda (ver Fig. 4, para $\pi . 2^{2}$).
En general es mejor utilizar ***funciones*** antes que ***fórmulas*** pues las primeras son más rápidas, ocupan menos espacio y reducen la posibilidad de errores tipográficos.

Las ***funciones*** para ejecutarse requieren de una información la que se indica después del nombre de la función, entre paréntesis y se llama "***argumento*"** .

***<u>Insertar función sin "asistente de funciones"</u>*.**

1. Activar con el ratón la *celda* donde se desea introducir la función.
2. Teclear en ella el signo igual **" = "** y el ***nombre de la función***.
3. Teclear entre paréntesis el ***argumento*** (número, referencia a celda o rango de celdas) al cual vamos a aplicar la función.
4. Terminar pulsando ***Intro***.

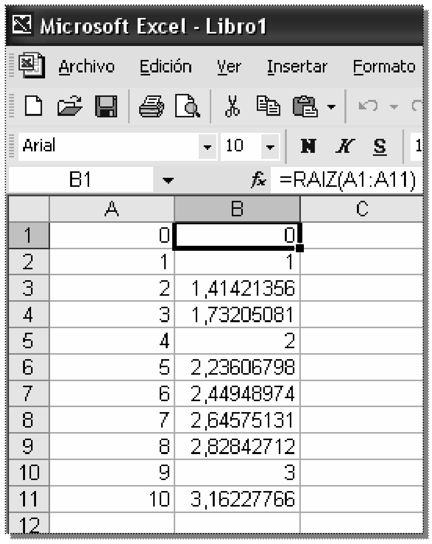
Ejemplo: para hallar la "raíz cuadrada" de los números entre 0 y 10, procedemos a:

☞ introducir en una columna los valores (0.....10) a los que se les va a aplicar la función, (en "A2", con la fórmula "=A1+1" y A1=0).

☞ seleccionar una celda (B1), teclear **" = "** y el nombre de la función "RAIZ".
(***Excel*** tiene un símbolo predeterminado para cada función. Buscar el mismo en ***Ayuda***).

☞ introducir el argumento entre paréntesis. (A1:A11). Pulsar ***Intro***.

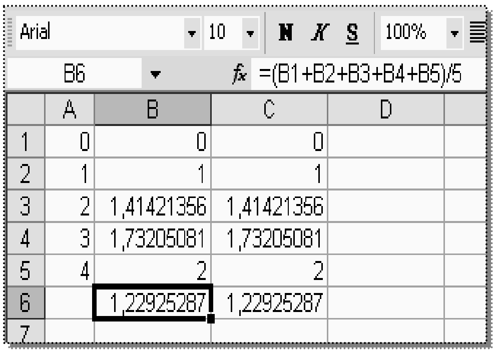
☞ clicar con el puntero del mouse en la *esquina inferior derecha de la celda* donde se introdujo la función y ***<u>arrastrar</u>*** hasta el último valor.

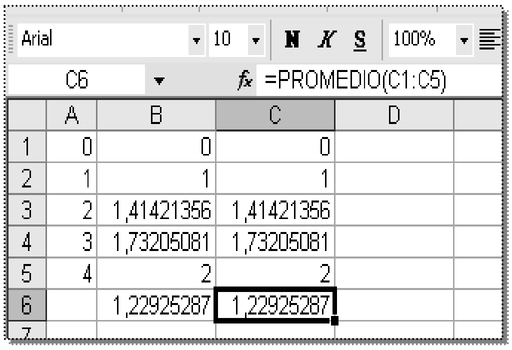


Ejemplo: para hallar el *promedio* de los valores en la columna B, desde B1 a la B5 (o desde C1 a C5, donde aparecen repetidos), una vez activada la celda donde vamos a calcular dicho promedio, podemos:

(a) crear la ***fórmula*** " = (B1+B2+ B3+ B4+ B5)/5 " ; ó
(b) usar la ***función*** PROMEDIO: **"** = PROMEDIO(C1:C5) "

En cualquier caso una vez dado el *Intro*, en la casilla seleccionada aparece el "***resultado" (*** en el ejemplo: ***1,22925287***).

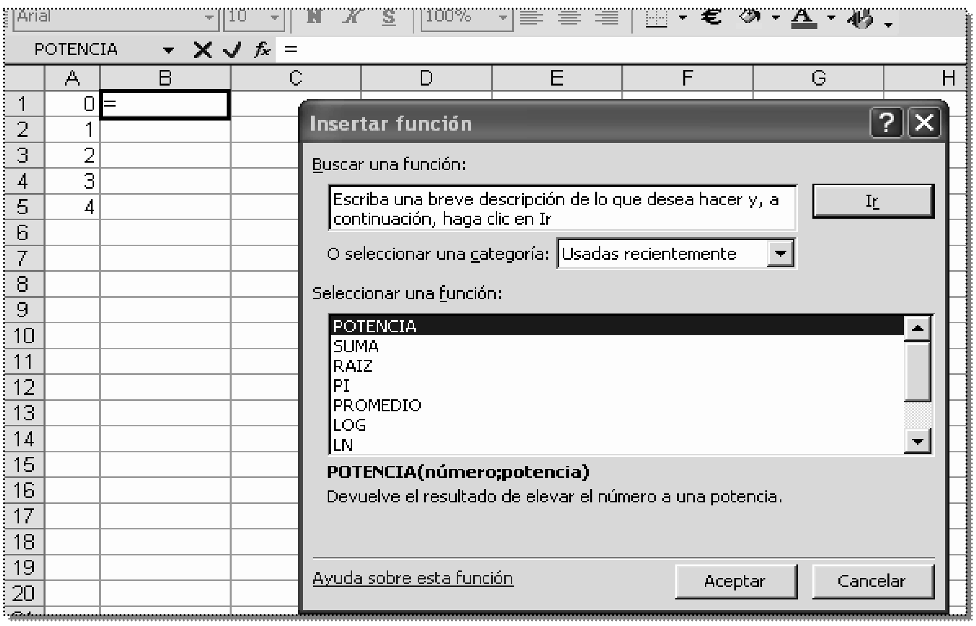


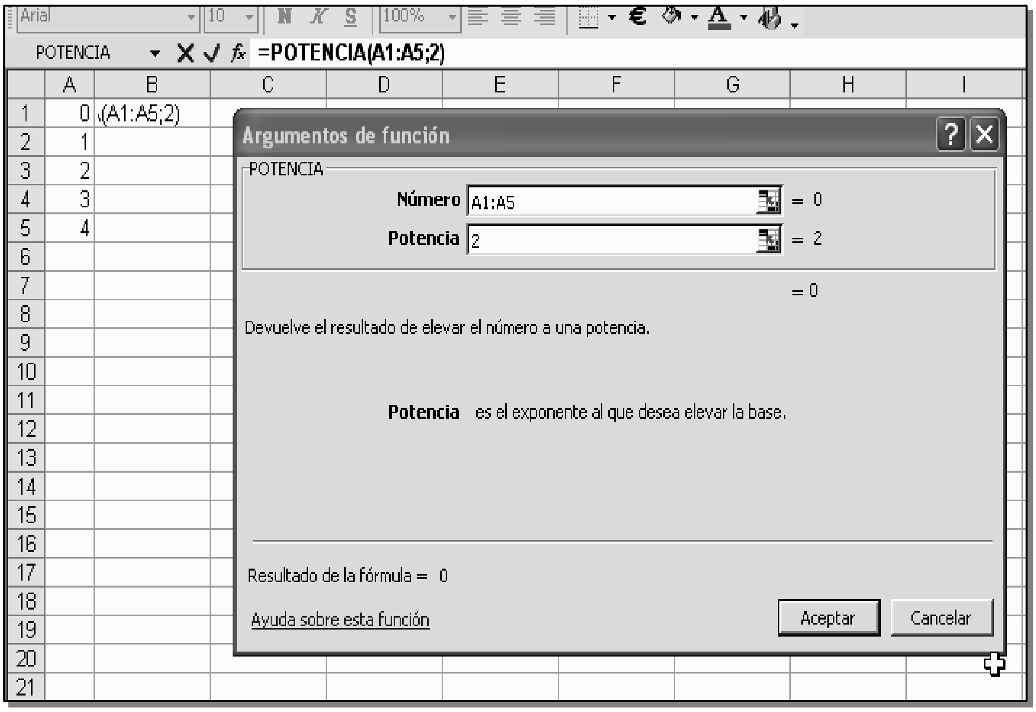


Para agilizar o facilitar la introducción de una función podemos acudir al cuadro de diálogo que se abre al clicar sobre “**Insertar función” (** ***fx*** **).** Este cuadro de diálogo sirve de guía a través de todo el proceso de introducir una función a la vez que proporciona una breve explicación tanto de la función como de sus argumentos.

<u>Insertar función con “ asistente de funciones”</u> *fx*

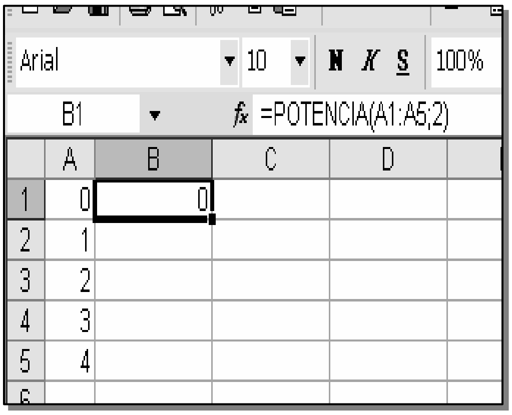
1. Activar con el ratón la celda donde se desea introducir la función.
2. Clicar sobre ***fx*** *(*Asistente de Funciones) en la Barra de Referencia ó ejecutar la siguiente secuencia de comandos ***Insertar/Función*** en la Barra de Menús. En cualquier caso se hace visible un cuadro de diálogo en el que, entre otras cosas, aparece un listado de funciones entre las que procedemos a buscar la función a introducir.
3. ***Seleccionar la función*** y clicar sobre el botón ***Aceptar*** . Ejecutada esta acción aparece otro cuadro de diálogo a través del cual y siguiendo las instrucciones procedemos a ***introducir el argumento*** (número, referencia a celda o rango de celdas) sobre el cual vamos a aplicar la función.
4. Completado este cuadro clicar sobre el botón ***Aceptar*** para completar la acción. En la celda activa aparece el valor de la función calculada en el número introducido o en el valor contenido en la 1er celda de referencia.

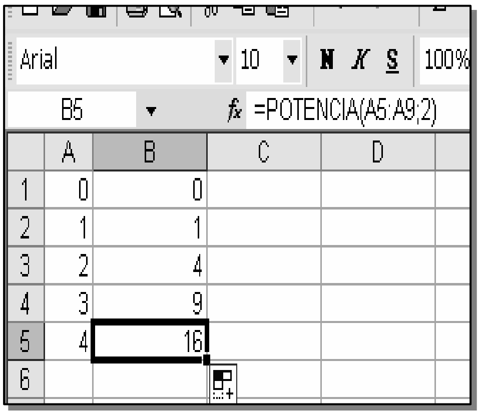




Al clicar sobre **Aceptar** en la celda activada para introducir la función (B1) aparece el resultado de calcular la función en el valor contenido en A1. (1er celda de referencia).

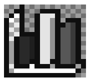
Si deseamos obtener el resultado de la función aplicada a las otras celdas de referencia, basta con posicionar el puntero del mouse en la esquina inferior derecha de la celda donde se introdujo la función, y arrastrar hasta la última celda del rango.





CREACIÓN DE DIAGRAMAS Y DE GRÁFICOS

Excel puede crear gráficos a partir de datos previamente introducidos en la hoja de cálculo. Existen distintos tipos de gráficos, para distintos propósitos. En particular, si los datos provienen de una función; o sea, si se tiene una ***tabla de valores*** (ó ***función numérica***) se puede obtener el gráfico de la función.
Los gráficos obtenidos pueden incrustarse en la misma hoja de cálculo en donde están los datos o en una hoja distinta, especial para gráficos (el sistema da la opción). En cualquier caso el gráfico queda *vinculado* a los datos que le dan origen y lo hace de tal modo que si en algún momento estos se modifican, el gráfico se actualiza automáticamente. Los gráficos de ***Excel*** contienen muchos *objetos* (títulos, etiquetas de los ejes, etc.), que pueden ser seleccionados y modificados individualmente.

ASISTENTE PARA GRÁFICOS - 

La manera más simple de introducir un gráfico en ***Excel*** es mediante la utilización del ***Asistente para Gráficos***. En este material presentamos sólo la forma de crear el gráfico de funciones escalares, ***y = f(x)***, dadas en ***forma numérica*** (***tabla de valores***). Si la función viene dada por una ***ecuación o fórmula***, para graficarla primero debemos generar una ***tabla de valores*** según el rango en que deseamos graficar. (ver: Excel- *Fórmulas y Funciones*)

I .- *Para graficar los datos de una tabla*

1. Seleccione el rango de celdas donde se encuentran los datos que desea graficar, incluido los títulos si los desee mantener. Para hacer esto *seleccione* con el mouse el rango de filas y columnas que forman la tabla de valores (ver: Excel- S*elección de celdas o bloques de celda*) .
2. Presione el botón Asistente para gráficos  de la barra de herramientas. (O ejecute la secuencia *Insertar/Gráfico* de la barra de Menús). Con cualquiera de estas acciones se abre el primero de una serie de cuadros de diálogo, los cuales nos irán guiando en la creación del gráfico.

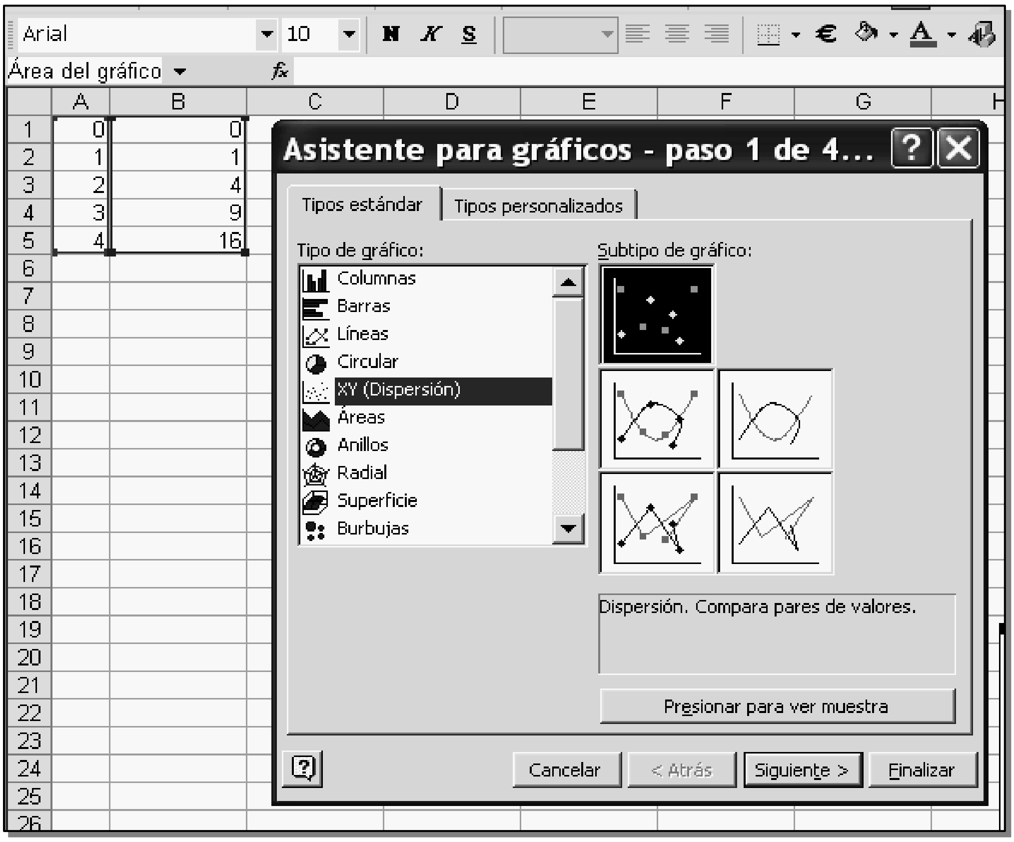
☞ ***1er cuadro de diálogo:***

Permite seleccionar el ***tipo*** *de gráfico*, el cual depende del uso que queramos darle. Al clicar sobre uno de los ***´tipos´*** propuesto en la lista aparece una breve explicación acerca del gráfico al que refiere el mismo; o sea, una breve idea acerca de para que lo podemos usar. Además, si hemos seleccionado los datos previamente, clicando sobre el botón ***Presionar para ver muestra*** tenemos acceso a una vista preliminar del gráfico que resulta, según el tipo y subtipo seleccionado.

Como nuestro objetivo es graficar una ***función numérica***, elegimos el

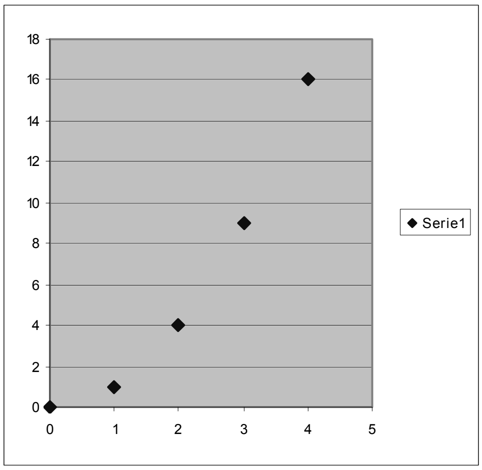
* ***tipo de gráfico***: **XY (Dispersión),** y el
* ***subtipo*:** dispersión con puntos dato *no conectados* ó dispersión con puntos datos *conectados con líneas suavizada* (según lo que convenga al caso).

Una vez elegido el tipo de gráfico, podemos insertar el gráfico en la hoja de cálculo tal como aparece en la vista preliminar. Para ello basta clicar sobre el botón "***Finalizar***".



En el ejemplo: $f(x) = x^2$

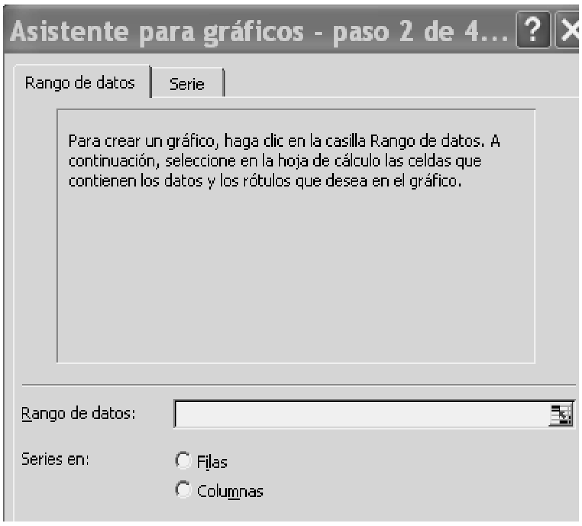
En este caso, para el tipo y subtipo de gráfico elegido, se obtiene el siguiente gráfico



Observación :

Si no hemos seleccionado las celdas o si deseamos modificar algún dato pues en la vista preliminar detectamos algún error o la necesidad de cambiar las escalas, clicamos sobre **"Siguiente** >" y abrimos el segundo cuadro de diálogo.

☞ ***2do cuadro de diálogo:***

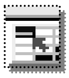


Este cuadro muestra dos solapas: "Rango de Datos" y "Series" en las que se observan distintas *barras*: (R*ango de datos* en una; *Valores de X, Valores de Y,* en la otra*)* a través de ellas podemos introducir, comprobar o corregir la selección de celdas .

Para ello podemos:

* introducir ó modificar directamente en la barra que aparecen en el cuadro; ó,

* clicar sobre el botón, *a la derecha de la barra*.



La segunda opción nos vuelve a la ***hoja de trabajo*** donde aparece una pequeña ventana en donde se visualiza la barra "Rango de datos". Para introducir los datos para el gráfico en esta ventana basta seleccionar con el mouse la tabla de valores; de esta forma los datos aparecen automáticamente en la barra. Terminamos el proceso clicando sobre la parte derecha de la barra para volver al cuadro de diálogo del ***Asistente***. Desde este mismo cuadro podemos controlar si la selección se lee por filas o por columnas (**Filas**, si la tabla se introdujo en forma horizontal; **Columnas** si se hizo en forma vertical).

Si "seguimos" tenemos el,

☞ ***3er cuadro de diálogo:*** permite configurar todos los aspectos que conciernen a la presentación del gráfico, aportando una vista preliminar del mismo. Así, se determinan el título, las inscripciones de los ejes, la apariencia de éstos, etc. Si "seguimos",

☞ ***4to cuadro de diálogo:*** refiere a la ubicación del gráfico: en la hoja donde se esta trabajando o en otra nueva. Clicando sobre el botón ***Finalizar*** el gráfico aparece ya en el lugar seleccionado.

SELECCIÓN DE OBJETOS GRÁFICOS

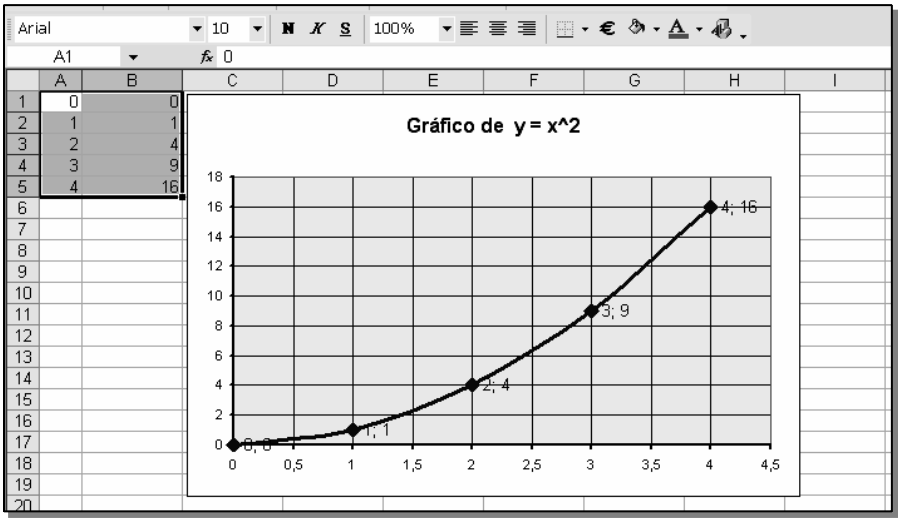
Los gráficos de ***Excel*** están compuestos por ***objetos*** tales como *marcadores*, *leyendas*, *títulos*, *ejes, texto* y la propia *área de gráfico*. El usuario puede añadir *objetos* o bien dar formato a los existentes, modificar su apariencia. Para dar formato a un *objeto gráfico* primero debemos ***seleccionar*** el objeto, cosa que se hace ***clicando*** sobre él.
Para modificar ***puntos del gráfico*** podemos seleccionarlos de distinta forma:

* clicando ***una vez*** sobre un punto del gráfico, seleccionamos ***todos los puntos***;

* clicando ***dos veces*** sobre el punto, con un *intervalo de tiempo* entre ambas pulsaciones, seleccionamos ***sólo ese punto***.

El mismo procedimiento de uno (o dos) clic se aplica a los elementos de una leyenda y a los rótulos de los datos.

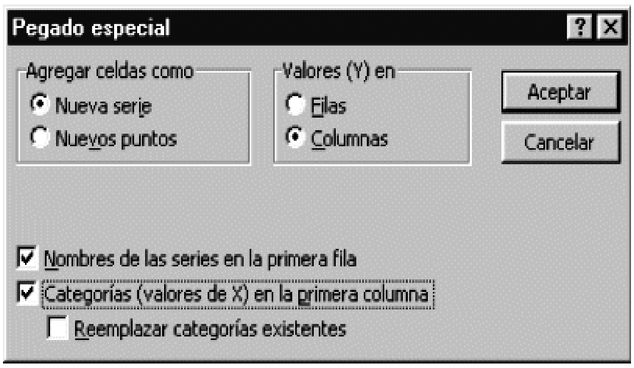
Si se hace ***doble clic*** sobre un objeto gráfico se ***abre un cuadro de diálogo*** que presenta ***opciones para modificar apariencia*** ó ***propiedades*** del mismo. Según el objeto seleccionado y según el botón del ratón con el que clicamos podemos hacer distintas cosas: con el ***izquierdo*** abrir un *cuadro de diálogo* con el que podemos cambiar la estética del gráfico (colores, presencia o no de rótulos, leyendas, formato de fuente, de números, etc); con el ***derecho*** abrir un *menú contextual* que ofrece más opciones que la de cambiar la estética ya que a través del mismo podemos modificar totalmente el gráfico cambiando los *datos* o el *tipo de gráfico*.



II.- *Para graficar una nueva serie de datos en un gráfico ya creado*

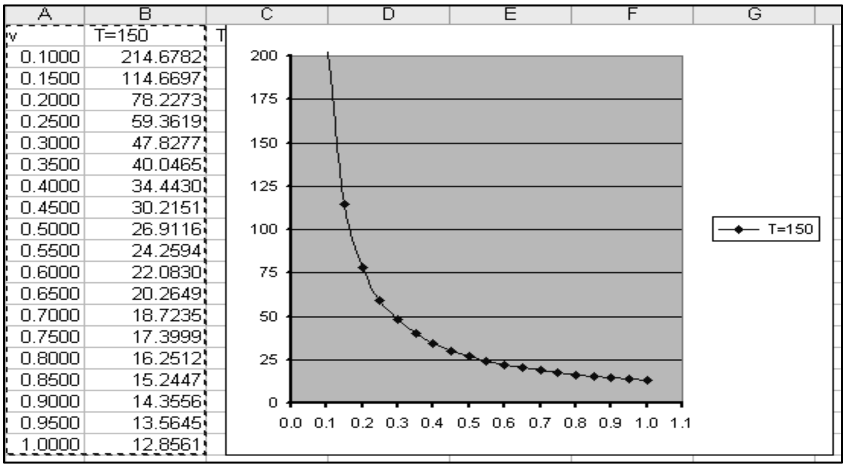
Para introducir un nuevo gráfico en un área donde ya hay otro, proceder a realizar la siguiente secuencia de comandos:

1. Seleccionar el rango de celdas que contiene los datos de la <u>*nueva serie a graficar*</u>.
2. Presionar el botón <u>*copiar*</u> de la barra de herramientas.
3. <u>*Activar*</u> el gráfico creado previamente.
4. Elegir <u>*Edición – Pegado especial*</u> de la barra de menú.
   Aparecerá la siguiente ventana de diálogo:

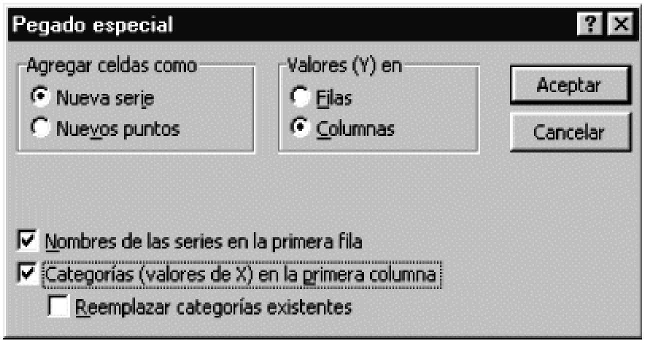


Marque las opciones como se muestra en la figura y luego presione ***Aceptar***

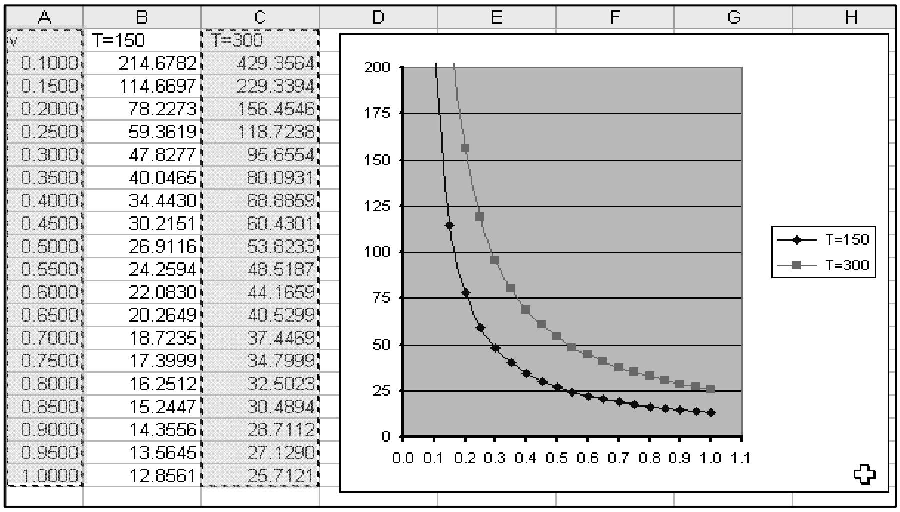
Ejemplo: introducimos una serie en la manera habitual.



Agregamos la otra según lo indicado:



Obtenemos los dos gráficos en un mismo cuadro:

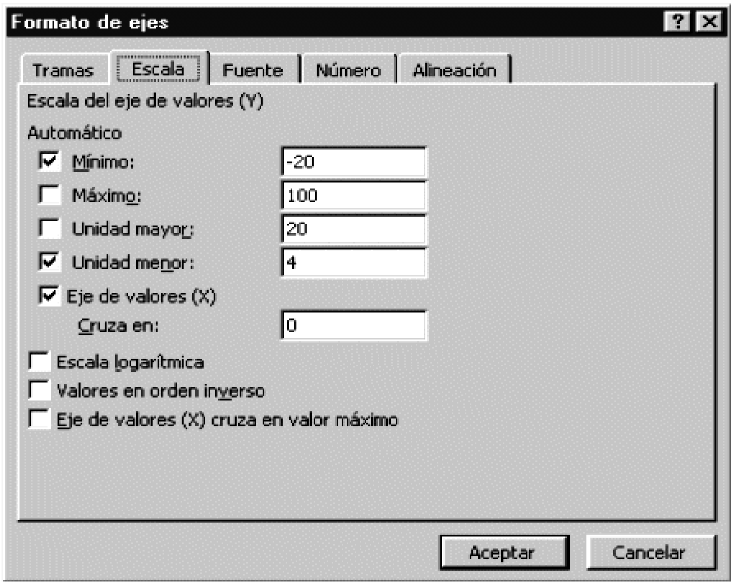


III.- Para fijar los ejes

Para observar el comportamiento de la función para distintos valores de las constantes o parámetros que la definen, se logrará un mejor resultado si en el gráfico se dejan fijos los valores del ***eje y*** o el ***eje x***, según sea necesario.
Para lograr esto:

(a) Activar el área de gráfico, y luego hacer doble clic sobre el ***eje y*** (o el ***eje x***).

(b) Aparecerá el cuadro de diálogo ***Formato de ejes***. Desactive las opciones que desee dejar fijas. Para este ejemplo dejamos el valor máximo del eje Y en 100 unidades y la escala de 20 unidades.

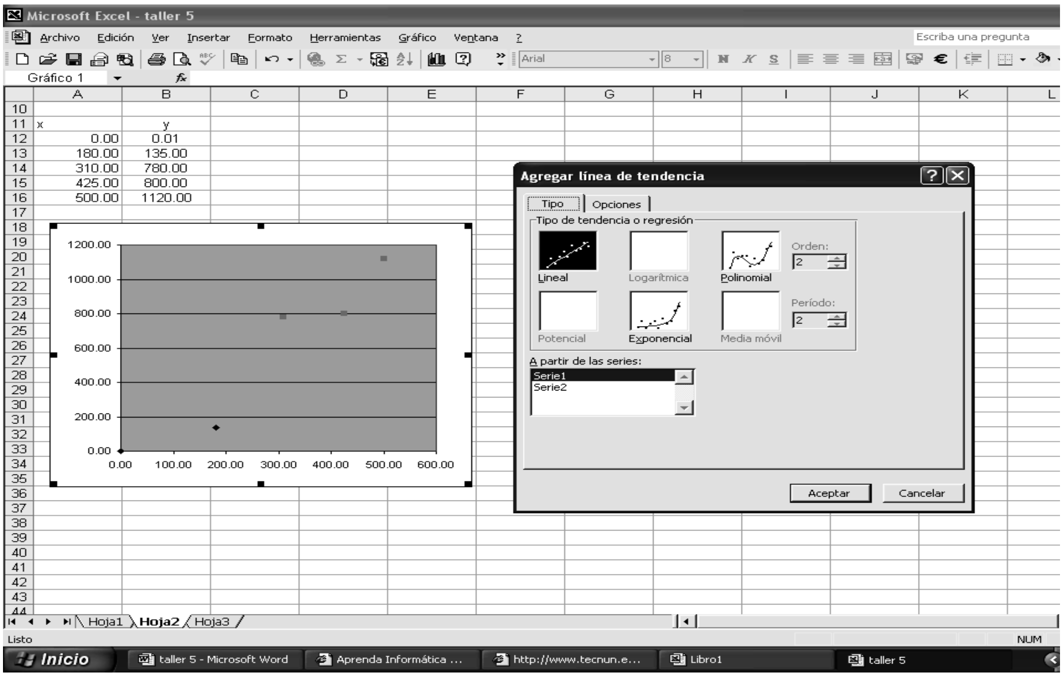


<u>AGREGAR LÍNEA DE TENDENCIA</u>

Una vez graficados y formateados los puntos experimentales estamos en condiciones de buscar una curva (función algebraica) que se "ajuste" a ellos "lo más posible".

Al clicar sobre el gráfico automáticamente, en la Barra de Menús aparece la opción ***Gráfico*** (en el lugar de *Datos*) y, dentro de ella, la opción "***Agregar línea de tendencia...***" (a la misma opción llegamos clicando una vez, con el *botón derecho del ratón*, sobre un punto cualquiera del gráfico).

El comando "***Agregar línea de tendencia...***" permite, en forma fácil y sencilla, probar con distintas funciones (lineal, exponencial, potencial, etc.), elegir entre todas ellas la que *mejor ajuste* (en algún sentido previamente fijado) a los puntos experimentales.



Para agregar una línea de tendencia basta con seguir los siguientes pasos:

1. Clicar con el botón derecho del ratón en un punto del gráfico en el que se desea agregar la <u>*línea de tendencia*</u> (ó clicar en la Barra de Menú el comando **Gráfico**).
2. Clicar (en el cuadro que se abre en cualquier caso) la opción ***Agregar línea de tendencia***. Aparecen allí dos solapas: ***Tipo* y *Opciones***
3. En la ficha **Tipo**, hacer clic en el tipo de línea de tendencia con la que se estima se puede llegar a obtener, cuanto menos, un "buen ajuste". En **Opciones,** marcar la opción "*Presentar ecuación en el gráfico*" . Dar el enter (aceptar) . En el gráfico aparecen la línea de tendencia elegida y la ecuación de la misma. Clicando sobre esta línea se abre un cuadro de diálogo que permite cambiar forma (lisa, punteada, etc) y color de esta línea. Lo mismo sobre los puntos.

Notas

- Si la línea de tendencia elegida es la "***lineal***", la recta que proporciona el programa es la que se conoce con el nombre de "***recta de regresión***".
- Si se desea obtener una línea de tendencia que contemple sólo *alguno* de los datos de una tabla, basta con seleccionar sólo esos datos en el cuadro de diálogo en el que se introducen los datos. Si luego se desea que aparezcan en el gráfico los demás valores de la tabla, una vez seleccionado el gráfico se selecciona en el menú gráfico (de la barra de herramientas) la opción ***agregar datos.***

Este libro se terminó de imprimir
durante el mes de abril de 2009 por

DelRevés Soluciones Gráficas

graficadelreves@gmail.com