

Física II

Guía de estudio n°3:
Flujo de Campo eléctrico - Ley de Gauss

1er. Cuatrimestre 2020

Distribuciones continuas de cargas

Distribución LINEAL de carga:

La carga está distribuida sobre una **línea**.

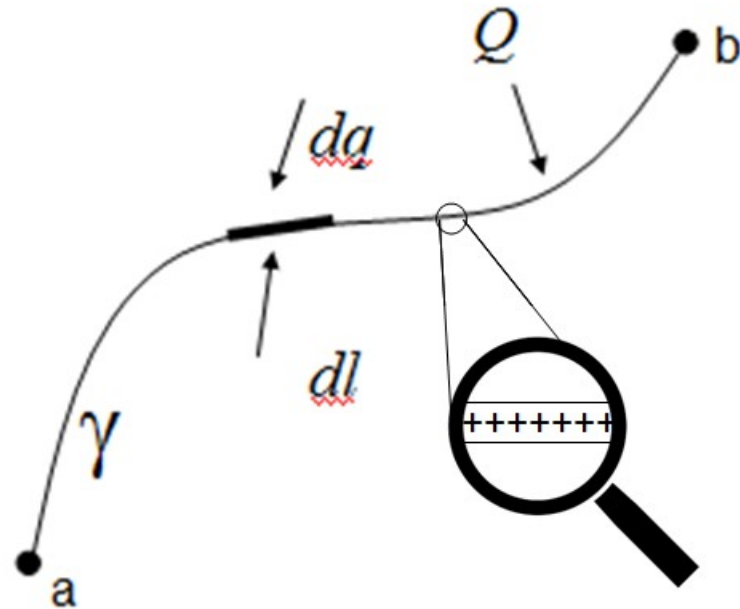
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad [\lambda] = \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

$$Q = \int \lambda dl$$

λ es uniforme



$$Q = \lambda L$$



Distribuciones continuas de cargas

Distribución SUPERFICIAL de carga:

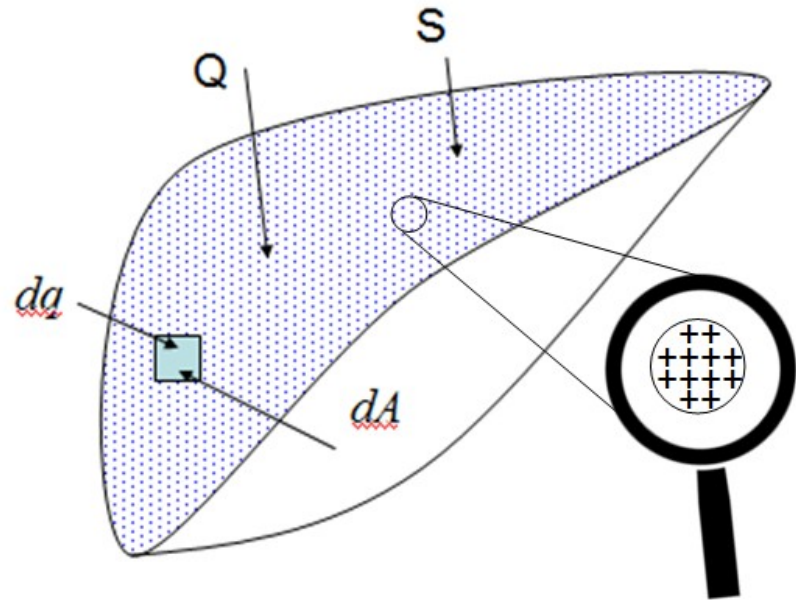
La carga está distribuida sobre una **superficie**.

$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

$$Q = \int \sigma dA \quad \sigma \text{ es uniforme}$$



$$Q = \sigma A$$



Distribuciones continuas de cargas

Distribución VOLUMÉTRICA de carga:

La carga está distribuida en un **volumen**.

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

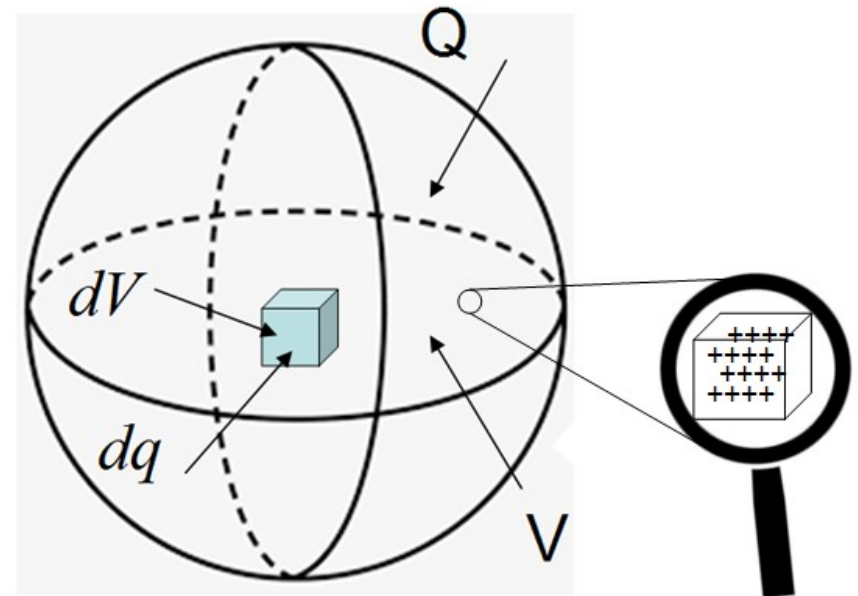
$$[\rho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

$$Q = \int \rho \, dV$$

σ es uniforme



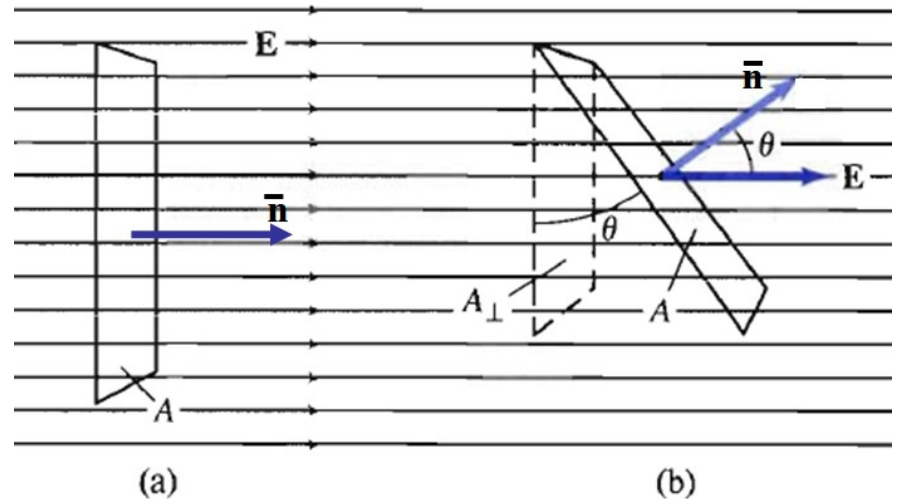
$$Q = \rho V$$



Flujo de un campo vectorial

Superficie plana y campo eléctrico uniforme

Imagine una superficie plana de área A , en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$. La superficie puede ser un rectángulo (como se muestra), un círculo o cualquier otra forma.



Si la dirección del campo eléctrico es perpendicular a la superficie como se ilustra en la figura (a), el flujo eléctrico que pasa a través de la superficie se define como el producto.

$$\Phi = EA$$

Si el área A no es perpendicular a $\mathbf{E}$, y en consecuencia forma un ángulo θ como se indica en la figura (b), entonces una menor cantidad de líneas de campo atravesarán el área. En este caso el flujo eléctrico que pasa por la superficie se define como

$$\Phi_E = EA_{\perp} = EA \cos \theta$$

Ejemplo

Ej1) Flujo de campo eléctrico: Calcule el flujo eléctrico que pasa a través del rectángulo de la figura (a). El rectángulo mide 10 cm x 20 cm y el campo eléctrico uniforme es de 200 N/C.

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

$$\Phi_E = (200 \text{ N/C})(0.10 \text{ m} \times 0.20 \text{ m}) \cos 0^\circ$$

$$\Phi_E = 4.0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Ej1) Ej2) Flujo de campo eléctrico: Calcule el flujo eléctrico que pasa a través del rectángulo de la figura (b) si el ángulo θ es igual a 30° .

$$\Phi_E = (200 \text{ N/C})(0.10 \text{ m} \times 0.20 \text{ m}) \cos 30^\circ$$

$$\Phi_E = 3.5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Pregunta conceptual:

a) ¿para qué valores del ángulo θ el flujo es el máximo?

b) ¿para qué valores del ángulo θ el flujo es el cero?

Flujo de un campo vectorial

Generalización

Supongamos ahora una superficie no plana y un campo eléctrico no uniforme.

Dividimos la superficie en número grande de superficies elementales (muy pequeñas). Cada una de ellas puede ser considerada plana y el campo puede considerarse uniforme en sobre la misma

Si el ángulo entre el campo eléctrico y la normal es θ entonces el flujo sobre esa superficie elemental dA será:

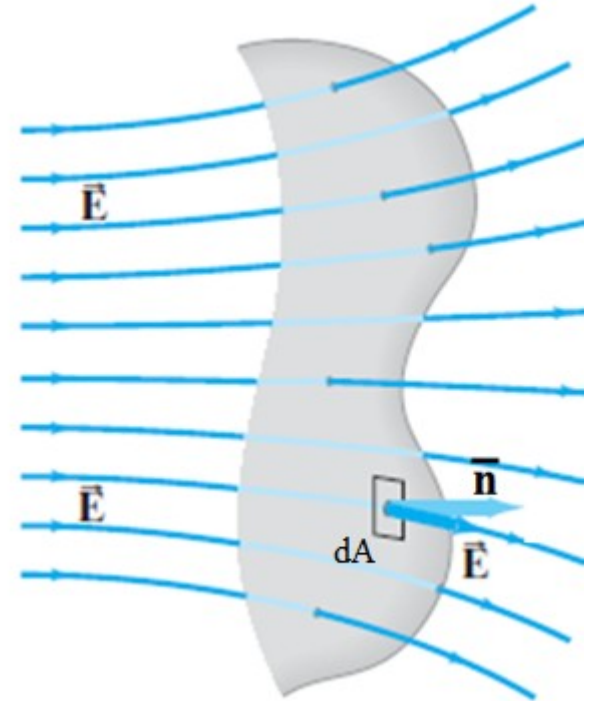
$$d\Phi = E dA \cos \theta$$

En forma vectorial

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

El flujo sobre la superficie será la suma (integral) de todos los flujos sobre cada superficie elemental. El flujo sobre la superficie será la suma (integral) de todos los flujos sobre cada superficie elemental:

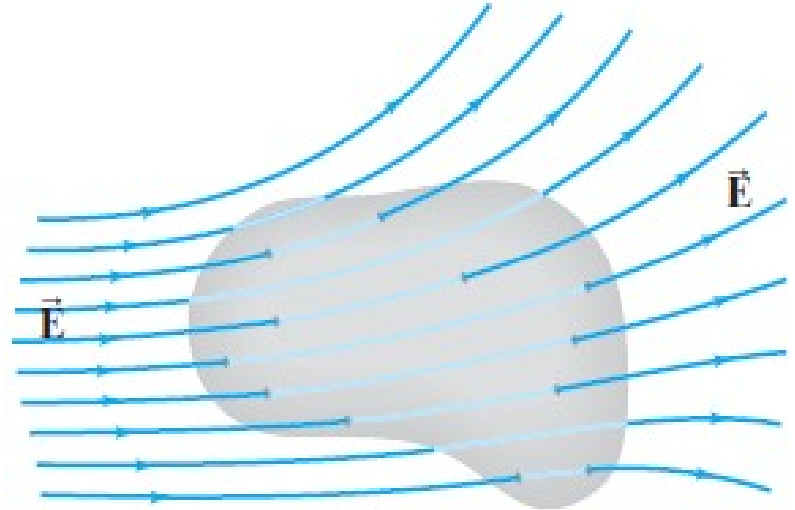
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$



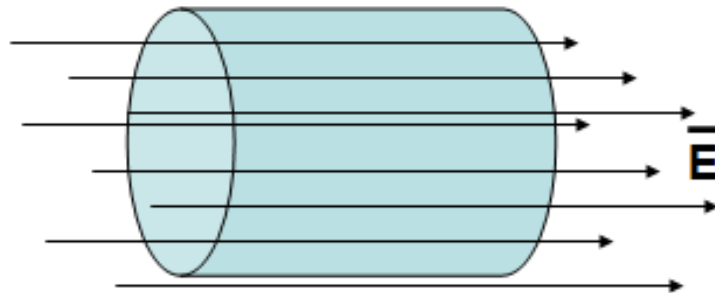
El flujo *total* a través de una superficie *cerrada*, una superficie de cualquier forma que encierra completamente un volumen dado de espacio, como el que se ilustra en la figura.

En este caso, el flujo neto a través de la superficie está dado por:

$$\Phi = \oiint_S d\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$



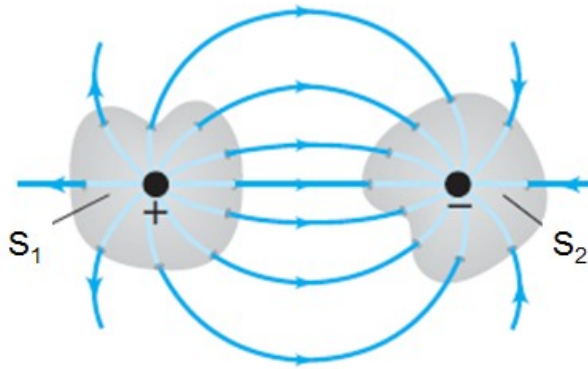
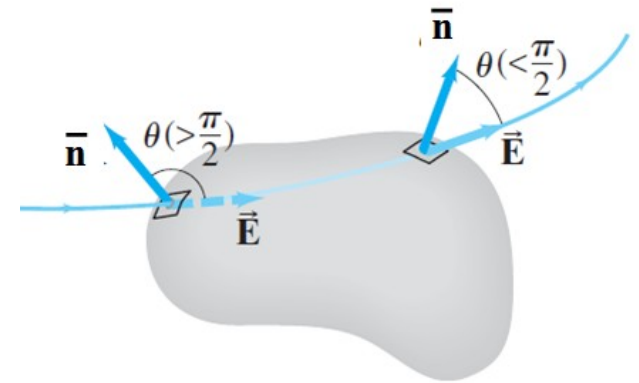
Ej1) Flujo sobre una superficie cerrada: Calcular el flujo la superficie cilíndrica de la figura inmersa en un campo eléctrico uniforme



Flujo de un campo vectorial

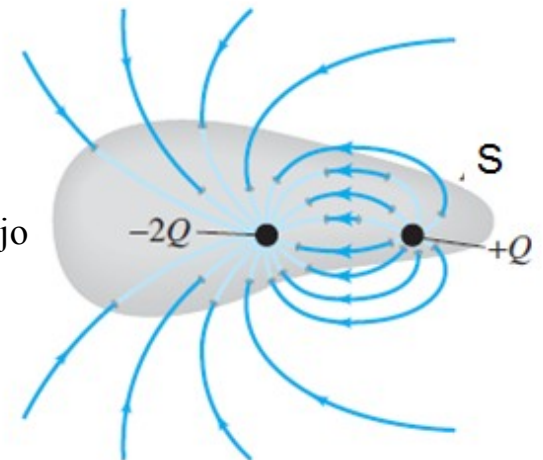
Consideraciones sobre el flujo del campo eléctrico sobre una superficie cerrada

Como se infiere de la figura cuando las líneas entran a la superficie cerrada el flujo es negativo y cuando salen el flujo es positivo



En la figura del dipolo podemos observar que el flujo sobre la superficie S_1 es positivo y el flujo sobre la superficie S_2 es negativo

Problema conceptual: Observa la figura y saca conclusiones sobre el flujo eléctrico sobre la superficie S

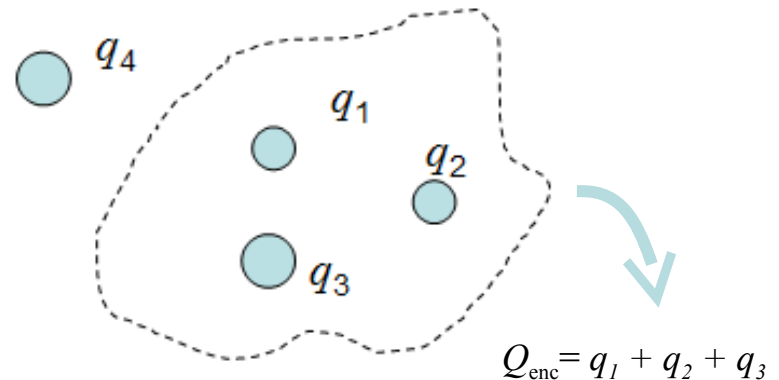


Ley de Gauss

La **ley de GAUSS** establece el valor del flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada.

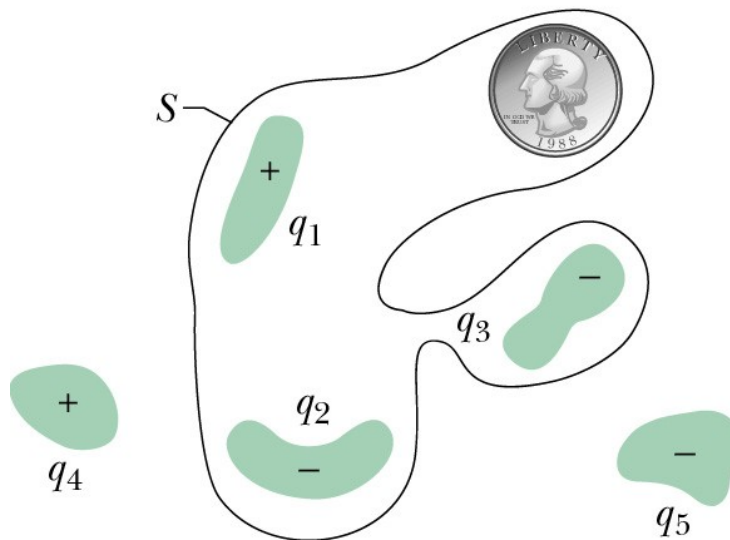
La relación precisa del flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada está dada por la expresión:

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$



La integral del lado izquierdo considera el valor de sobre cualquier superficie cerrada; elegimos esa superficie como mejor nos convenga para una situación dada. La carga Q_{enc} es la carga neta **encerrada** dentro de esa superficie. No importa dónde o cómo esté distribuida la carga dentro de la superficie. No debe incluirse ninguna carga fuera de esa superficie.

Ej1) Calculo del flujo eléctrico aplicando la ley de Gauss: Calcular el flujo neto del campo eléctrico sobre la superficie S. La moneda está descargada



Datos:

$$q_1 = q_4 = +3.1 \text{ nC}$$

$$q_2 = q_5 = -5.9 \text{ nC}$$

$$q_3 = -3.1 \text{ nC}$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$

Solución

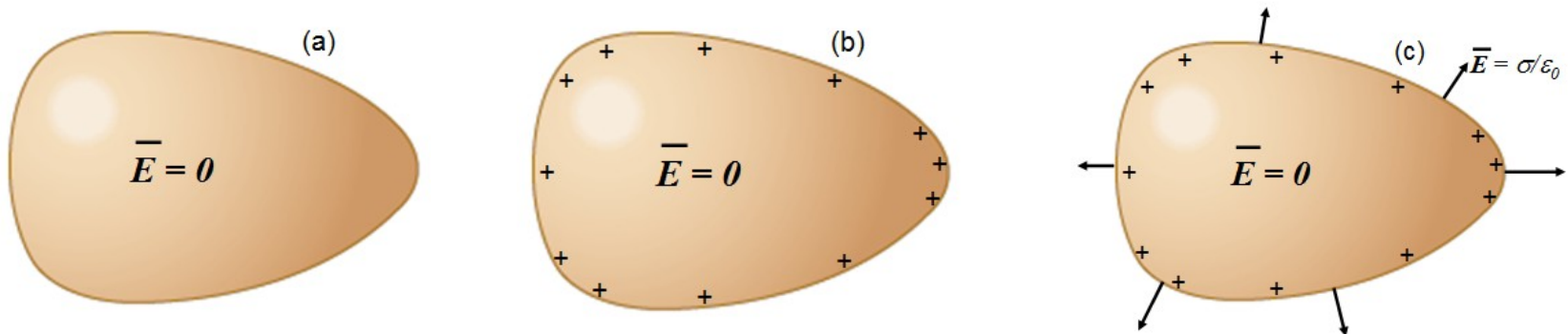
$$\Phi = \frac{(+3.1 \text{ nC}) + (-5.9 \text{ nC}) + (-3.1 \text{ nC})}{8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}}$$

$$\Phi = -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}$$

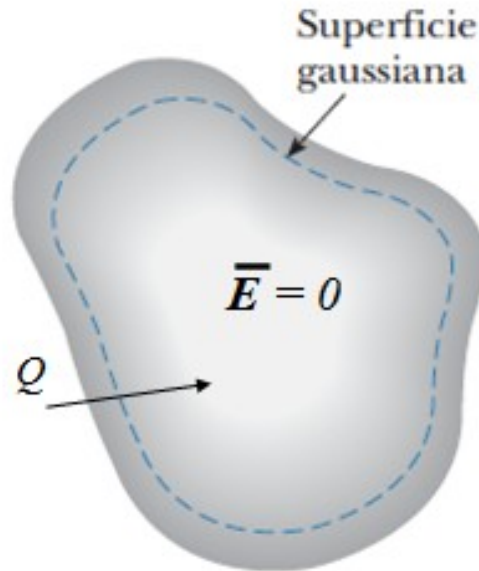
Conductor en equilibrio electrostático:

Se dice que un conductor cargado está en equilibrio electrostático cuando sus cargas no se mueven. En un conductor cargado en equilibrio electrostático se cumplen estas **tres propiedades**:

- a) En su interior el campo eléctrico es nulo.**
- b) La carga eléctrica está sobre la superficie del mismo.**
- c) el campo eléctrico en el exterior y junto a la superficie del conductor es perpendicular a ésta y tiene por valor: σ / ϵ_0 .**



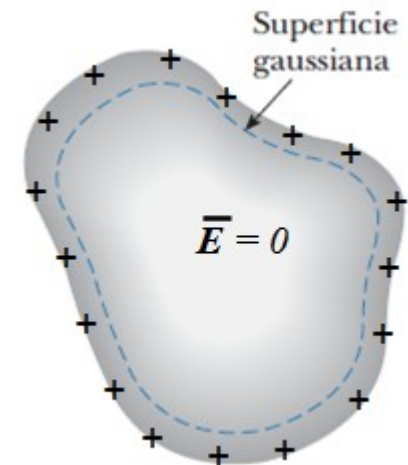
NOTA: En un conductor con forma irregular, la carga se acumula en los puntos agudos, donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño. De manera que σ no es igual uniforme sobre el conductor.



Es posible utilizar la ley de Gauss para verificar la segunda propiedad de un conductor en equilibrio electrostático. La figura muestra un conductor de forma arbitraria. Se ha dibujado una superficie gaussiana (SG) en el interior del conductor, que puede acercarse a la superficie del conductor tanto como se desee. Como el campo eléctrico es igual a cero en todo el conductor el flujo sobre la SG es cero.

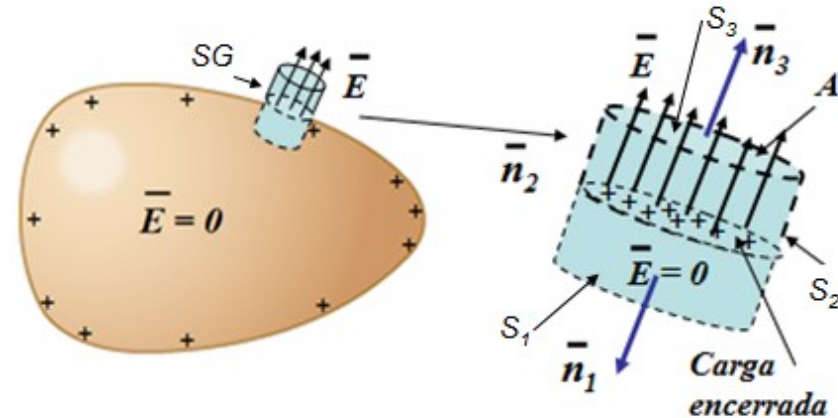
$$\Phi = \oiint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{enc} = 0$$

Entonces la carga en exceso está situada fuera de la SG y sobre la superficie del conductor.



También es posible utilizar la ley de Gauss para verificar la tercera propiedad.

Para determinar la magnitud del campo eléctrico se dibujará una superficie gaussiana en forma de un pequeño cilindro cuyas caras extremas queden paralelas al conductor. Parte del cilindro queda justo fuera del conductor y parte está en el interior.



$$\Phi_{SG} = \oiint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dA + \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dA + \oiint_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dA$$

$$\Phi_{SG} = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3}$$

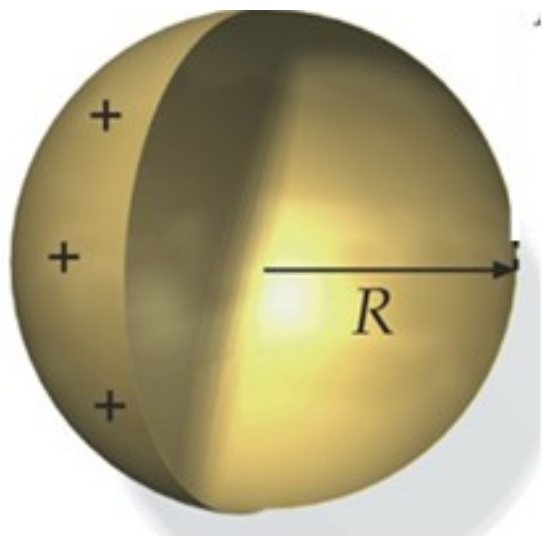
Como $\vec{E} = 0$ dentro del conductor $\Phi_{S_1} = 0$ y como $\vec{E} \perp \hat{n}_2$, $\Phi_{S_2} = 0$ entonces:

$$\Phi_{SG} = \Phi_{S_1} = \oiint_{SG} E dA \cos 0^\circ = E \oiint_{SG} dA = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Siendo $Q_{enc} = \sigma A$ resulta

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ej3) Campo eléctrico sobre la superficie de un conductor esférico: *Calcular el módulo del campo eléctrico sobre la superficie de un conductor esférico de radio $R = 1 \text{ m}$ cargado con una carga $Q = 3 \mu\text{C}$.*



Distribución SUPERFICIAL de carga:

Sobre la superficie

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$A_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{A_{\text{esfera}}} = \frac{3 \times 10^{-6} \text{ C}}{4\pi (1)^2} = 2.39 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2.39 \times 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}}{8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}} = 27005 \text{ N/C}$$

Otra aplicación de la ley de Gauss

Campo eléctrico en todo el espacio generado por un conductor esférico de radio a y carga Q

Para encontrar el campo en todo el espacio consideramos 2 regiones: dentro y fuera de la esfera.

i) Dentro de la esfera: $r < a \rightarrow \vec{E} = 0$

ii) Fuera de la esfera $a < r < \infty$ El flujo sobre la esfera gaussiana es:

$$\Phi = \oiint_{SG} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \oiint_{SG} E dA \cos 0^\circ = E \oiint_{SG} dA$$

$$\Phi = EA_{SG} = E4\pi r^2$$

$$Q_{enc} = Q \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

