

Física II

Guía de estudio N°4:

Potencial Eléctrico – Energía Potencial Eléctrica

1er. Cuatrimestre 2020

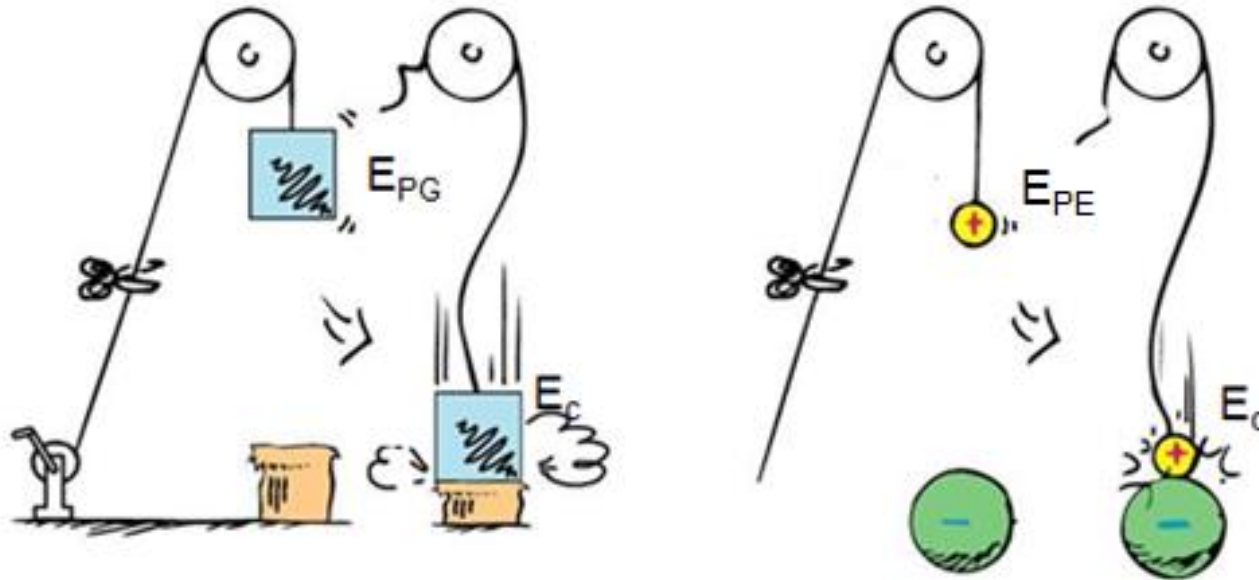
Hasta ahora hemos hablado de la Fuerza Eléctrica y del Campo Eléctrico y la relación entre ellos

Ahora nos preguntamos:

¿Cuál es el trabajo que realiza la fuerza eléctrica?

Análogamente al caso gravitatorio, la fuerza eléctrica es **CONSERVATIVA**, y veremos que ese trabajo se puede expresar en términos de **Energía Potencial** (eléctrica) o podemos definir simplemente la **diferencia de Potencial** (energía potencial por unidad de carga)

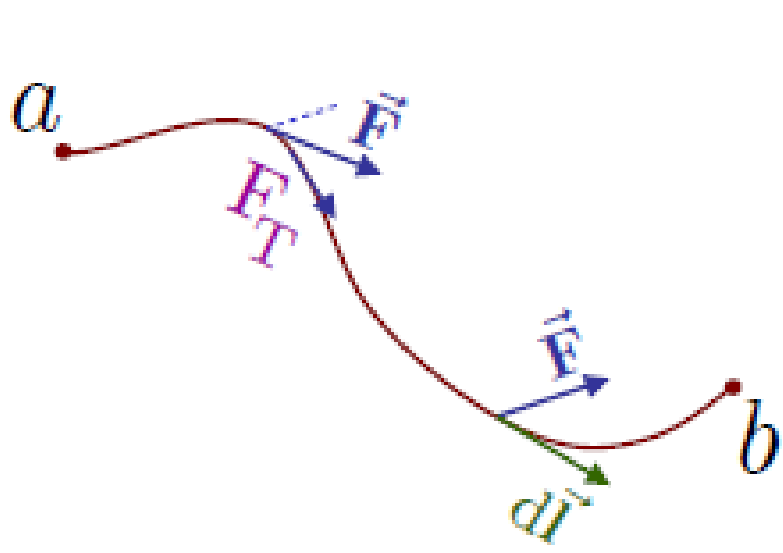
Igual que en el caso gravitatorio, el potencial se define respecto de un nivel de referencia arbitrario, dándose entonces una asimilación de potencial a lo que en realidad son diferencias de potencial entre un punto y el de referencia.



De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la pérdida de energía potencial es igual a la ganancia de energía cinética ($E_P + E_C = 0$)

Si se deja caer el objeto, la energía potencia se convierte en energía cinética

Trabajo realizado por una fuerza cualquiera para llevar a la partícula desde a hasta b.

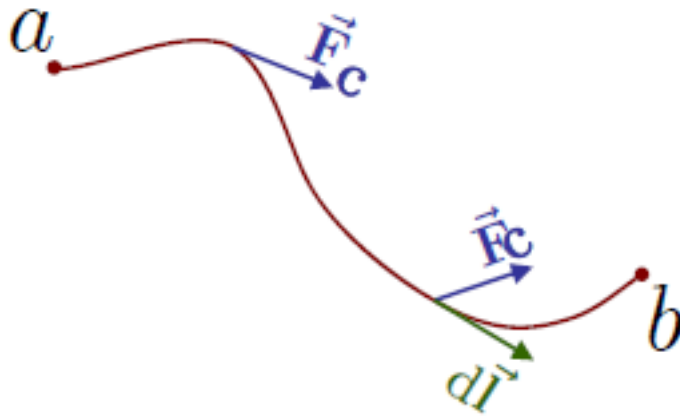


$$\begin{aligned}
 W_{a \rightarrow b} &= \int_a^b \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{l}}_{\text{producto escalar}} = \\
 &= E_{k,b} - E_{k,a}
 \end{aligned}$$

fuerza
 elemento de longitud tangente al camino

El trabajo que realiza una fuerza cualquiera es el incremento de energía cinética

Cuál es el trabajo realizado por una fuerza conservativa para llevar a la partícula desde a hasta b?



Si la fuerza es conservativa, la energía total se conserva en cada punto de la trayectoria:

$$E_{\text{Total}} = (E_P + E_C)_A = (E_P + E_C)_B$$

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F}_C \cdot d\vec{L} = - \int_a^b dE_P = E_{P,A} - E_{P,B}$$

Este signo es necesario para obtener este orden

El trabajo que realiza una fuerza conservativa (además de ser el incremento de Energía Cinética) es igual al menos incremento de Energía Potencial

En general, cuando una fuerza conservativa $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\mathbf{l}$, la variación de la función energía potencial dU viene definida por:

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Cuando una carga de prueba q_0 se coloca en un campo eléctrico $\mathbf{E}$ creado por alguna distribución de carga fuente, la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga de prueba es:

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$$

La fuerza $q_0 \mathbf{E}$ es conservativa debido a que la fuerza entre dos cargas, descrita por la ley de Coulomb, es conservativa.

Cuando la carga de prueba se mueve dentro de un campo eléctrico debido a la acción de un agente externo, el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga es igual al negativo del trabajo realizado por el agente externo que provoca el desplazamiento.

Esto es análogo con la situación de levantar un objeto con masa dentro de un campo gravitacional: el trabajo realizado por el agente externo es mgh y el trabajo realizado por la fuerza gravitacional es $-mgh$.

Cuando se analizan campos eléctricos y magnéticos es una práctica común el utilizar la notación $d\mathbf{l}$ para representar un vector de desplazamiento infinitesimal que se orienta tangentemente respecto de una trayectoria a través del espacio. Esta trayectoria puede ser recta o curvada, y una integral que se evalúa a lo largo de esta trayectoria se conoce como *integral de trayectoria* o *integral de línea*.

Energía Potencial Eléctrica

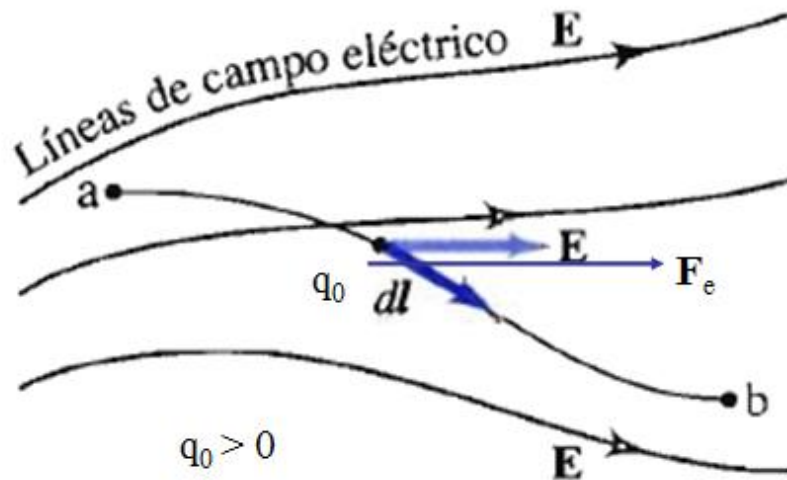
Cuando la carga de prueba experimenta un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{l}$ en un campo eléctrico $\mathbf{E}$, el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga es:

$$W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

y como el trabajo realizado por una fuerza conservativa disminuye la energía potencial, entonces la energía potencial del sistema carga-campo cambia como:

$$dU = - q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - W$$

Para un desplazamiento finito de la carga desde el punto a hasta el punto b , el cambio o variación de energía potencia electrostática en el sistema es:



$$\Delta U = U_B - U_A =$$

$$U_B - U_A = \int_A^B dU$$

$$\Delta U = - \int_A^B q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

La integración se lleva a cabo a lo largo de la trayectoria que q_0 sigue conforme se mueve de a hacia b . Pero como la fuerza eléctrica ($\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$) es conservativa, **esta integral NO depende de la trayectoria de a hacia b .**

Diferencia de Potencial

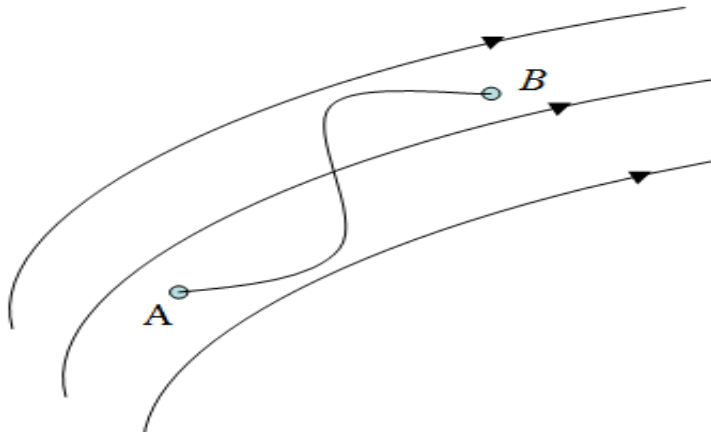
Dividiendo la energía potencial entre la carga de prueba se obtiene una cantidad física que depende únicamente del campo eléctrico.

La diferencia de energía potencia por unidad de carga o trabajo por unidad de carga $\Delta U/q_0$ es independiente del valor de q_0

Esta cantidad $\Delta U/q_0$ se conoce como diferencia de **potencial eléctrico**. Entonces la diferencia de potencial eléctrico entre 2 puntos de un campo eléctrico es:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

A partir de lo anterior la **diferencia de potencial** entre dos puntos A y B dentro de un campo eléctrico se define como:



$$\Delta V = V_B - V_A =$$

$$- \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Debido a que el potencial eléctrico es una medida de la energía potencial por unidad de carga, la unidad SI para la diferencia de potencial es el voltio:

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Diferencia de Potencial en un $\mathbf{E}$ uniforme

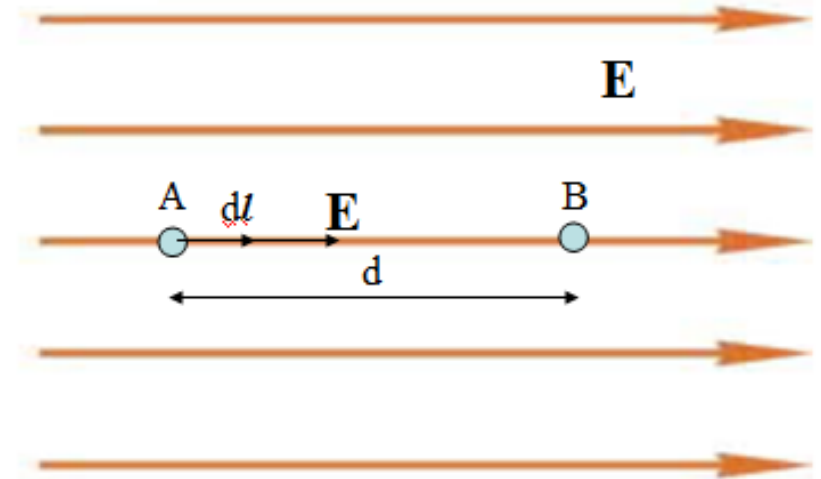
Consideremos un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del x positivo.

Calculemos la diferencia de potencial entre dos puntos A y B separados por una distancia d

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

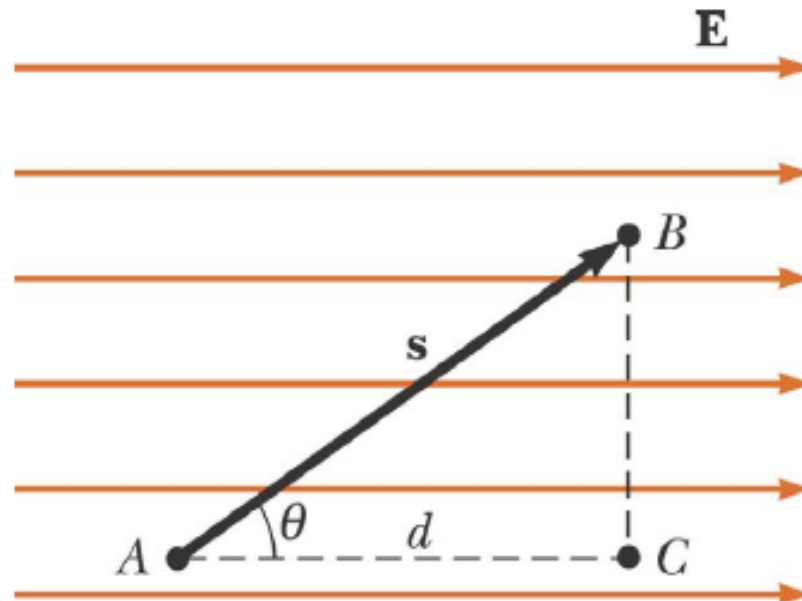
Se puede ver que $d\mathbf{l}$ es paralelo a las líneas del campo eléctrico, entonces:

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B (E \cos 0^\circ) dl = - \int_A^B E dl = -E \int_A^B dl = -Ed$$



Diferencia de Potencial en un **E** uniforme

Ahora, consideren un caso más general: una partícula cargada se mueve entre los puntos *A* y *B* dentro de un campo eléctrico uniforme, de tal manera que el vector $d\mathbf{l}$ no es paralelo a las líneas de campo eléctrico.



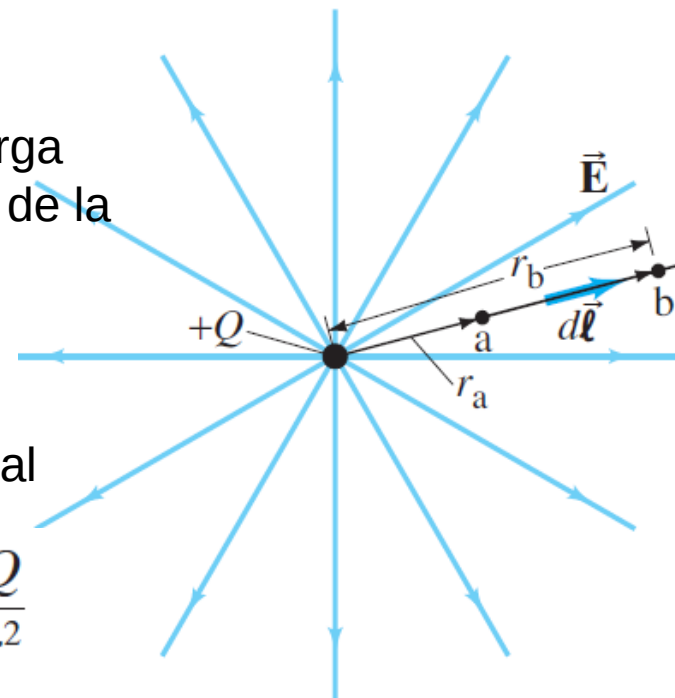
Potencial eléctrico debido a una carga puntual.

El potencial eléctrico a una distancia r de una carga puntual sencilla Q puede derivarse directamente de la ecuación

$$V_b - V_a = - \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual tiene una magnitud

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{o} \quad E = k \frac{Q}{r^2}$$



Tomamos la integral a lo largo de una línea de campo recta desde un punto a , a una distancia r_a de Q , hasta un punto b , a una distancia r_b de Q . Entonces $d\vec{\ell}$ será paralelo a $\vec{E}$ y $d\ell = dr$. De ahí que:

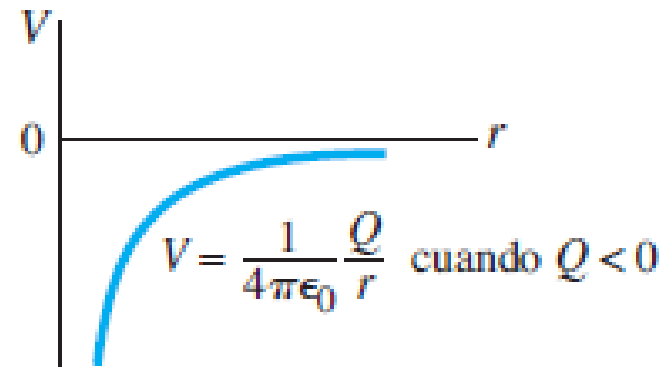
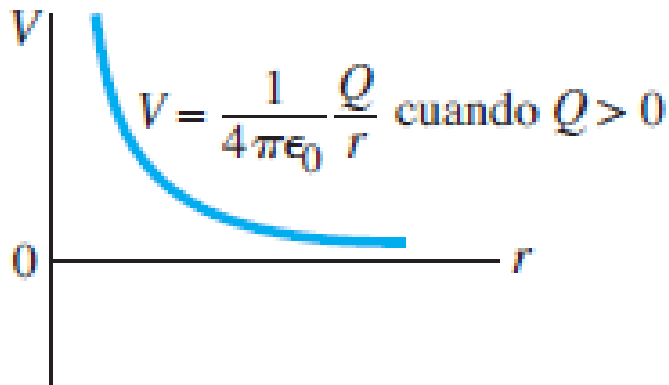
$$V_b - V_a = - \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_b} - \frac{Q}{r_a} \right).$$

Como se ve sólo tienen significado físico las diferencias de potencial. Pero por comodidad, tenemos la libertad de elegir el valor del potencial en el punto que mejor nos convenga (punto de referencia).

Es común elegir el potencial como cero en el infinito ($V_b = 0$ en $r_b = \infty$).

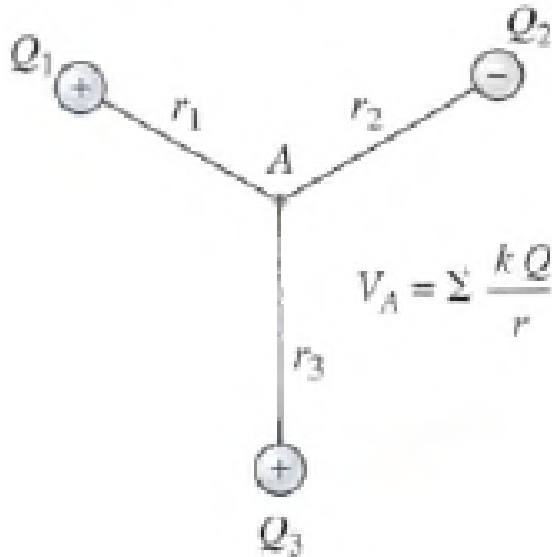
Entonces, el potencial eléctrico V a una distancia r desde una carga puntual es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



Potencial eléctrico debido a varias cargas puntuales.

El potencial eléctrico en la vecindad de cierto número de cargas es igual a la suma algebraica de los potenciales eléctricos que corresponden a cada carga.



$$\begin{aligned} V_A &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots \\ &= \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \frac{kQ_3}{r_3} + \dots \end{aligned}$$

Superficies y línea equipotenciales

Una superficie sobre la cual todos los puntos están al mismo potencial se llama **superficie equipotencial**.

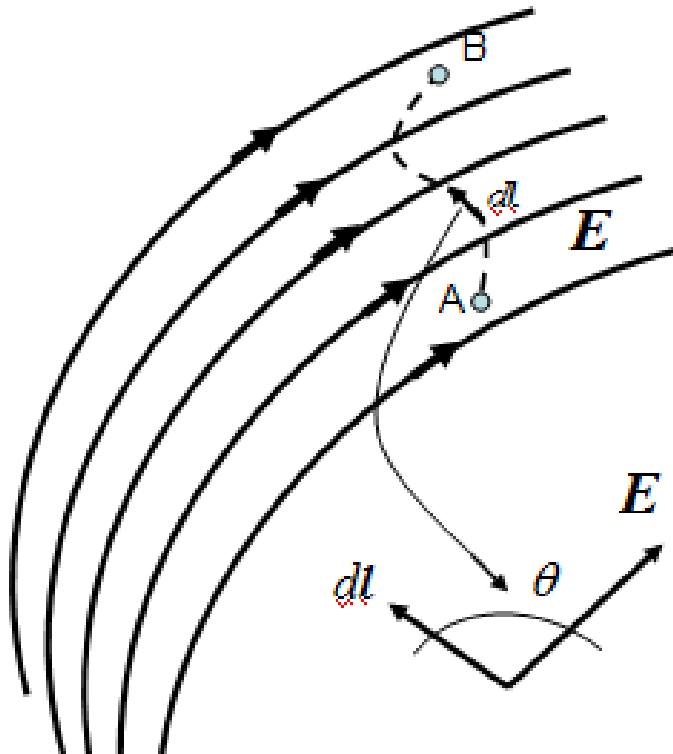
La intersección de una superficie equipotencial con un plano es una línea equipotencial

La diferencia de potencial entre dos puntos cualquiera sobre una superficie equipotencial es cero.

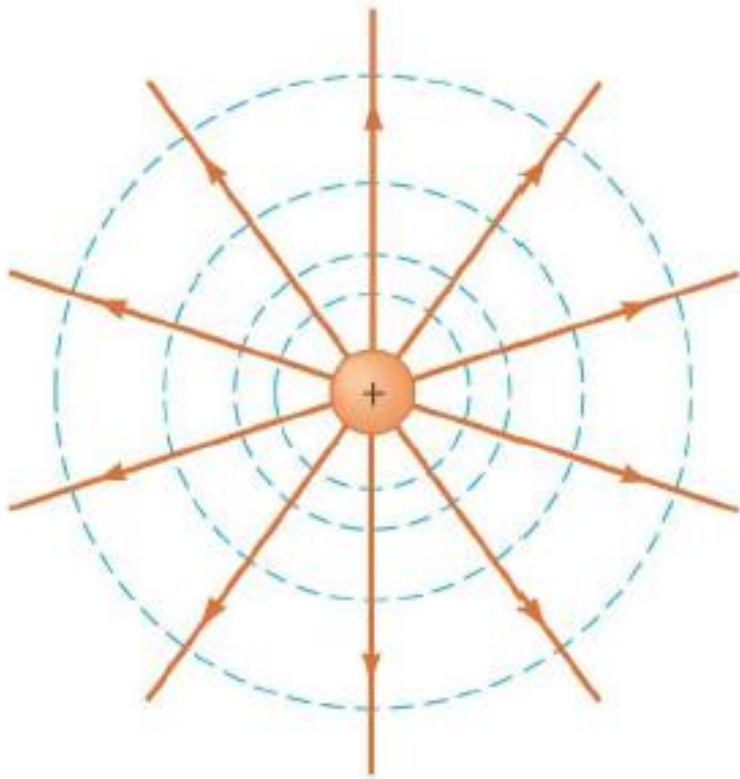
$$V_b - V_a = - \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Así que se debe cumplir que $E = 0$; A y B el mismo punto o $\cos \theta = 0$

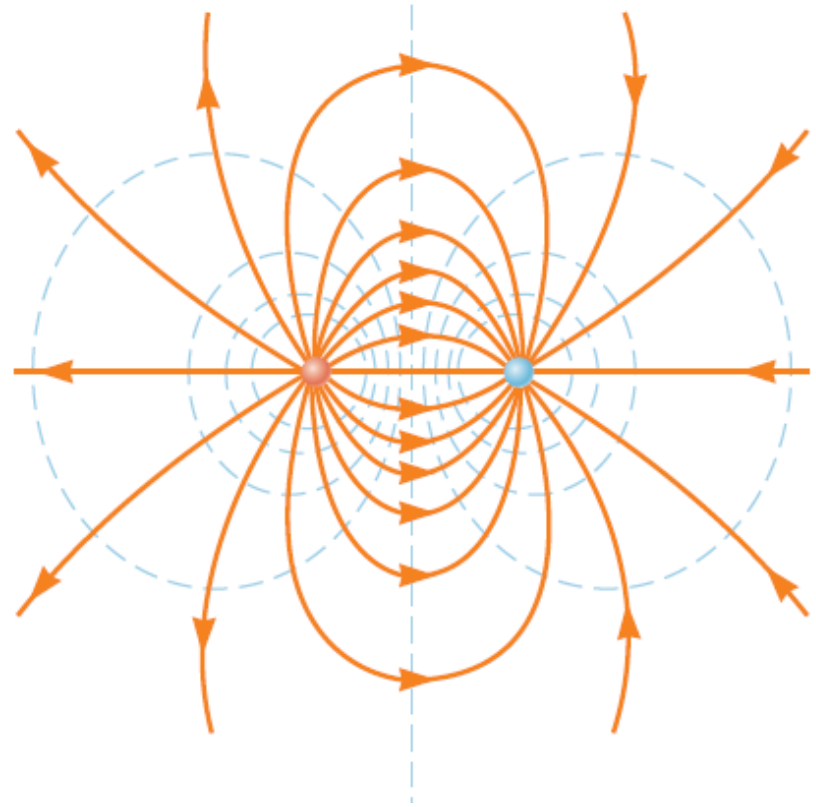
En consecuencia, en una región donde E no es cero, la trayectoria a lo largo de una superficie equipotencial debe tener $\cos \theta = 0$, es decir, $\theta = 90^\circ$, por lo que E es perpendicular a la superficie equipotencial.



Ejemplos de Superficies y línea equipotenciales



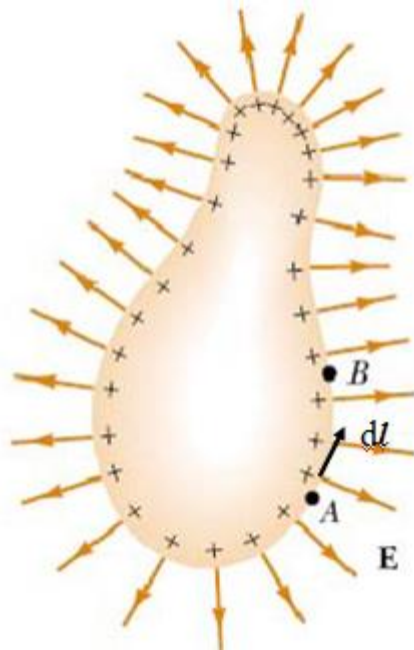
Carga puntual



Dipolo

Potencial en un conductor cargado

Cuando un conductor sólido está cargado y en equilibrio electrostático, la carga reside en su superficie externa, el campo eléctrico justo fuera del conductor es perpendicular a la superficie y el campo eléctrico dentro del conductor es cero

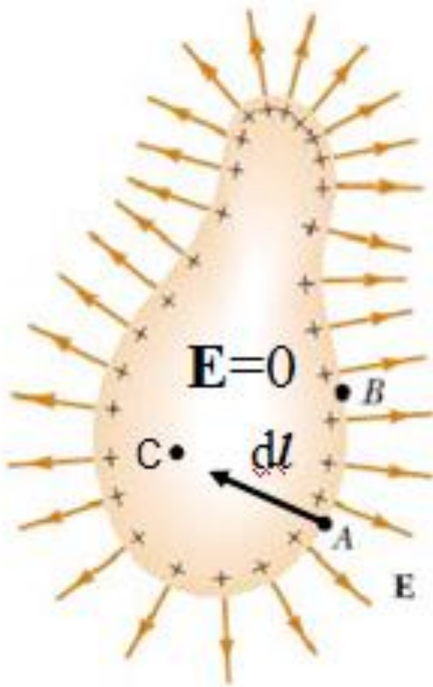


Consideremos dos puntos *A* y *B* sobre la superficie. A lo largo de una trayectoria superficial que conecte dichos puntos, **E** siempre es perpendicular al desplazamiento *dl*; entonces, **E** · *dl* = 0; y la diferencia de potencial eléctrico entre *A* y *B* es necesariamente cero.

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Este resultado aplica a cualesquiera dos puntos sobre la superficie. Por lo tanto, el potencial eléctrico V es constante en cualquier punto sobre la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático.

La superficie de cualquier conductor cargado en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial



Consideremos ahora un punto C dentro de conductor y calculemos la diferencia de potencial $V_C - V_A$

Debido a que el campo eléctrico es cero dentro del conductor, se puede concluir que el potencial eléctrico es constante en cualquier punto dentro del conductor e igual a su valor sobre la superficie.

Entonces, todo el conductor se encuentra al mismo potencial

Potencial de un dipolo eléctrico

El potencial eléctrico en un punto arbitrario P, debido a un dipolo, es la suma de los potenciales debidos a cada una de las dos cargas.

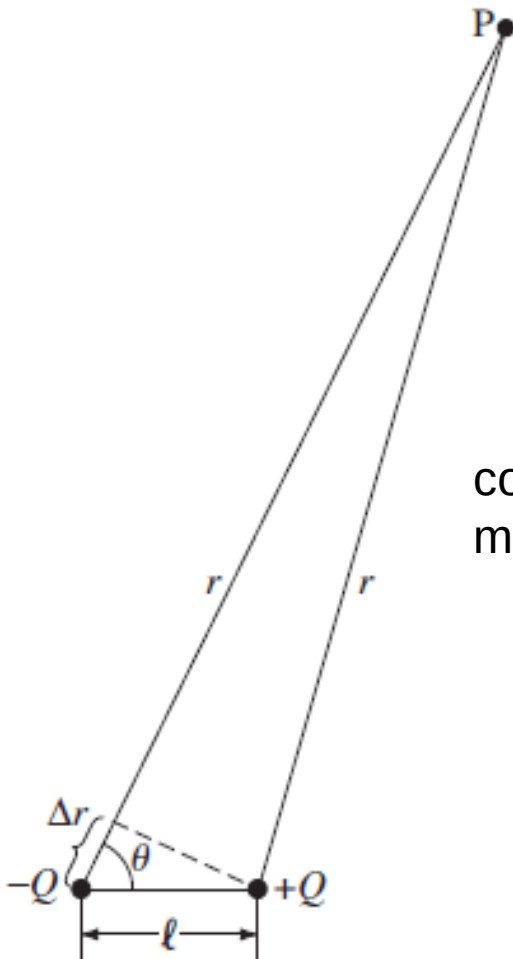
$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)}{(r + \Delta r)} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta r}{r(r + \Delta r)}
 \end{aligned}$$

consideramos puntos P cuya distancia hasta el dipolo es mucho mayor que la separación entre las dos cargas

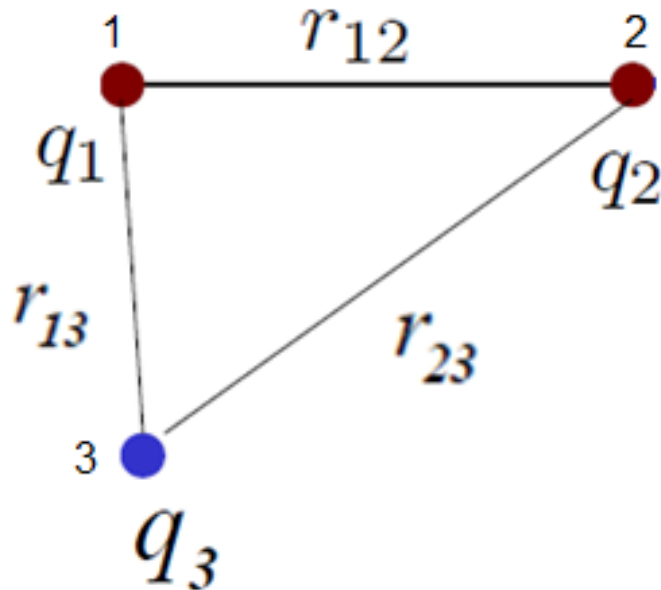
$$r \gg \ell \Rightarrow \Delta r \approx \ell \cos \theta \quad \text{y} \quad r \gg \Delta r$$

$$\text{Entonces: } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\ell \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Donde p es el momento dipolar eléctrico



Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales



La energía potencial eléctrica del sistema del sistema de cargas de la figura se puede obtener sumando el trabajo necesario para armarlo. Esto es, traer primeramente la carga 1 desde el infinito, luego traer la carga 2 desde infinito al punto 2 y traer la carga 3 desde infinito al punto 3.

Nota: el potencial en infinito se toma igual a cero

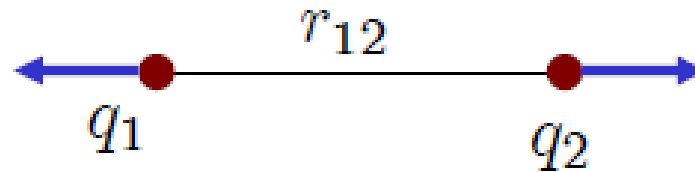
Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales

Para traer la primera carga desde el infinito, no hay que hacer ningún trabajo (aún no hay campo ni fuerza que vencer)


 q_1

$$W_1 = 0$$

Para traer la segunda, hay que vencer la fuerza que aparece entre ellas:



El trabajo necesario para trasladar una segunda carga puntual q_2 desde el infinito hasta una distancia r_{12} es:

$$W_2 = q_2 V_{2,1} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Energía potencial eléctrica de un sistema de cargas puntuales

Ahora, para transportar una tercera carga, debe realizarse trabajo contra el campo eléctrico producido por sendas cargas q_1 y q_2 .

El trabajo necesario para transportar la tercera carga q_3 a la posición 3 es:

$$W_3 = q_3 V_{3,1} + q_3 V_{3,2} = k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

El trabajo total para reunir las tres cargas es, por tanto:

$$W = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

Este trabajo W es la **energía potencial electrostática** del sistema formado por las tres cargas puntuales.

Electrón volt

Un joule es una unidad muy grande cuando se trata de la energía de electrones, átomos o moléculas, por tal razón, se utiliza la unidad de energía llamada **electrón volt** (eV)..

Un *electrón volt* se define como la energía que adquiere una partícula con una carga cuya magnitud es igual a la carga del electrón ($q = e$) cuando se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 V

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Ejercicio: Un electrón se acelera a través de una diferencia de potencial de 1000 V a) ¿cuál es su energía en eV y J? y b) ¿cuál es la velocidad del electrón?

Cálculo del campo a partir del potencial

Igual que el potencial se puede determinar a partir del campo eléctrico, a la inversa, también se puede determinar el campo, conocido el potencial

La variación del potencial eléctrico, o bien, la diferencia de potencial dV entre dos puntos separados por una distancia dl , se puede expresar como:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_l dl$$

donde E_l es el componente de $\mathbf{E}$ paralelo al desplazamiento (si $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{l}$ son paralelos, entonces $\theta = 0^\circ$ y $\cos\theta = 1$)

Si el campo eléctrico $\mathbf{E}$ sólo tiene una componente

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E_x dx$$