



Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas

Universidad Nacional de Rosario

MATEMÁTICA

INGRESO 2026

Área Matemática – Departamento de Matemática y Estadística

ÍNDICE:

UNIDAD N° 1:

Números Reales pág. 1

UNIDAD N° 2:

Ecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita pág. 12

UNIDAD N° 3:

Inecuaciones pág. 22

UNIDAD N° 4:

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas pág. 29

UNIDAD N° 5:

Logaritmo. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales pág.33

UNIDAD N° 6:

Polinomios y expresiones racionales pág. 38

Símbolos Matemáticos pág. 49

Lenguaje Matemático pág. 50

UNIDAD N° 1: NÚMEROS REALES

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Números naturales:

El desarrollo del concepto de número fue un proceso largo y lento, que se produjo en el marco del desarrollo cultural humano tan tempranamente como el uso del fuego. Nuestros antepasados primitivos se han visto en la necesidad de contar y registrar cantidades. Este fue el origen del concepto de número natural. Actualmente lo representamos como un conjunto, es decir, como una colección de elementos y lo notamos de la siguiente manera:

El conjunto de los **números naturales**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

En este conjunto $\mathbb{N}$, se pueden realizar sumas y multiplicaciones cuyos resultados se encuentran en el mismo conjunto, (se dice que la suma y la multiplicación son operaciones cerradas), pero no ocurre lo mismo con la resta.

La aparición del *cero* como número se debe a los hindúes, como símbolo para notar la posición vacía, introduciendo su notación redonda similar a como lo conocemos hoy en día. Sin embargo, se debe a los árabes que su uso fuera popularizado e introducido en occidente durante la Edad Media.

Números enteros:

Por ejemplo ¿qué ocurre si queremos restar $5-9$?, no es posible en este sistema de números. Esta situación se presenta muchas veces, por ejemplo, en las transacciones comerciales cuando se genera una deuda. En el siglo XVII, los matemáticos comenzaron a considerar las deudas como números. De aquí surgen los *números enteros negativos*. Los enteros negativos y enteros positivos, junto con el cero forman el conjunto de los **números enteros** que designaremos $\mathbb{Z}$.

El conjunto de los **números enteros**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$

Podemos asignar, a cada número natural, un entero positivo puesto que, por ejemplo, al número natural 3 podemos anteponer un signo positivo y representarlo como el entero $+3$. En este sentido, decimos que el conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros y notamos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

En este conjunto, la suma, la resta y la multiplicación son cerradas, no así la división.

Números racionales:

Existen situaciones que no encuentran respuesta dentro del conjunto de los enteros. Las primeras civilizaciones egipcias tenían un sistema económico y social de la monarquía faraónica que, por la falta de moneda, implicaba el reparto de los bienes de consumo. En los antiguos papiros es posible encontrar problemas tales como: “dividir 7 panes entre 10 hombres”. Surge así el concepto de **número racional**.

Un número racional es aquél que puede escribirse como el cociente de dos números enteros p y q siendo $q \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$$

Por ejemplo, $\frac{3}{5}$ es un número racional porque 3 y 5 son números enteros. 0 es racional porque puede expresarse como $\frac{0}{1}$ y ambos son enteros

¿Qué significa que dos números racionales son iguales?

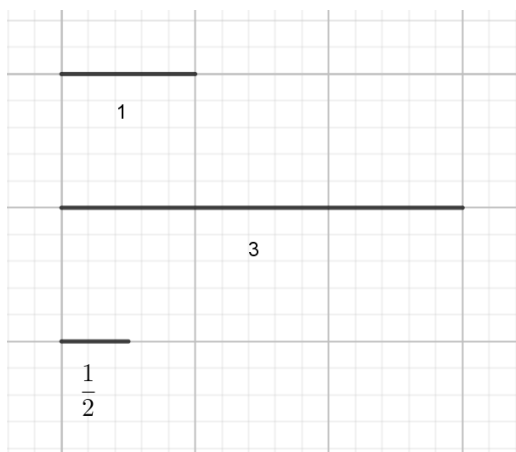
$$\text{Sean } p, p' \in \mathbb{Z}, q, q' \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow p \cdot q' = p' \cdot q$$

Por ejemplo, $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ ya que $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 12$

Notar que a cada número entero puede asignarse un racional. Por ejemplo, $+3 \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3}$

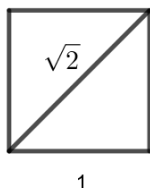
Resulta: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Los números racionales sirven también para medir algunas longitudes. Tomando un segmento como unidad, es posible comparar algunos segmentos y dar su medida. Por ejemplo,



Números irracionales:

Los pitagóricos (comunidad matemática griega del siglo VI a.C.) creían que la esencia de todas las cosas, era explicable en términos de propiedades de los números naturales y de sus razones. Sin embargo, las bases de su fe fueron derrumbadas al demostrar que no es posible medir la diagonal de un cuadrado tomando su lado como unidad. Utilizando el Teorema de Pitágoras resulta que la respuesta es $\sqrt{2}$.



El teorema de Pitágoras nos dice que, si un triángulo es rectángulo, la medida de su hipotenusa (h) al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de la medida de sus catetos (c_1 y c_2):

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

En el cuadrado, los lados miden 1 (catetos del triángulo) y hay que averiguar su diagonal que es la hipotenusa del triángulo:

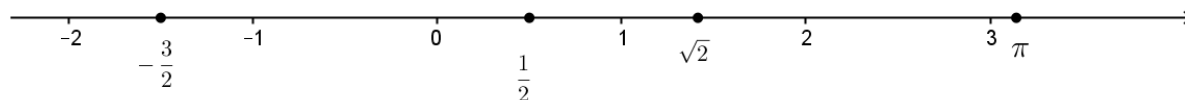
$$h^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow h^2 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

Y este número no es racional, pues no puede expresarse como fracción. ($\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$). Surge un nuevo conjunto de **números**, los **irracionales**. Se definen como aquellos números que no son racionales. Se simboliza $\mathbb{I}$. Los números $-\sqrt{3}$, π , e son irracionales. Notar que el conjunto de los racionales y el conjunto de los irracionales no tienen elementos en común.

Números reales:

Luego, la medida de cualquier segmento será un número racional o un número irracional. Si tomamos una recta horizontal, ubicamos en un punto de la misma el 0 (origen) y a la derecha del 0 ubicamos el 1, podremos asignar a cada punto de la recta un número. Si el número es positivo, estará ubicado a la derecha del cero y si es negativo a la izquierda del 0. Este número se llama coordenada del punto. Según la medida desplazada y el sentido del desplazamiento, establecemos la correspondencia entre punto y número. Llamaremos a estos números, que completan la recta, **números reales** y simbolizaremos con $\mathbb{R}$.

Observar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$



ACTIVIDADES:

Ejercicio 1:

Dada la siguiente tabla:

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{I}$
-5				
8,3				
$\sqrt{5}$				
$-5/3$				
10000				
$\sqrt{-1}$				
π				
$\sqrt{2}$				
0				
355/113				

- Marcar, si es posible, a qué conjunto/s pertenecen los números de la primera columna.
- Escribir los números reales racionales de tres maneras distintas.
- Expresar cada número racional en notación decimal.
- Ordenar todos los números reales en forma creciente.

Ejercicio 2:

- Representar en una misma recta numérica los siguientes números reales:

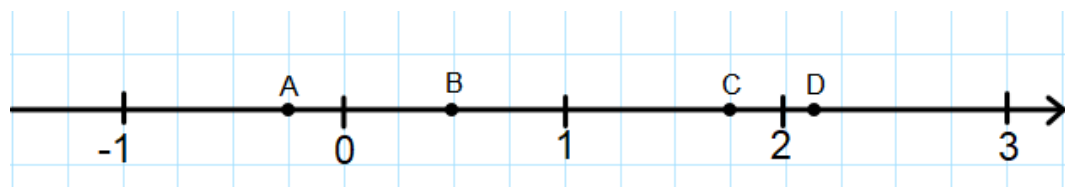
$$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad 1,25 \quad \sqrt{3} \quad 2\frac{1}{2} \quad \frac{12}{3} \quad -\sqrt{2} \quad 2,\hat{9}$$

- Ordenarlos en forma creciente

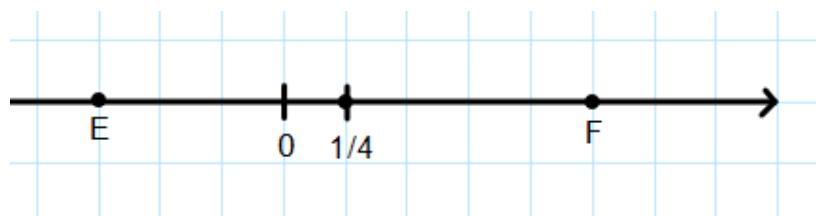
Ejercicio 3:

Indicar qué número real se corresponde con cada punto de la recta:

-



b)



REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES

Se puede usar la **representación decimal** para representar a los números reales.

Los números racionales pueden expresarse con una representación decimal finita o con una expresión decimal periódica.

Por ejemplo: $\frac{3}{2} = 1,5$ $\begin{array}{r} 3 \overline{) 2} \\ 10 \\ 0 \end{array}$ $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\hat{3}$ $\begin{array}{r} 10 \overline{) 3} \\ 10 \\ 1 \end{array}$

En una expresión decimal periódica el grupo de cifras decimales que se repiten se llama período.

¿Se pueden representar todos los números que conocemos mediante una expresión decimal finita o periódica? No, todo número cuya expresión decimal es infinita no periódica constituye un número irracional.

Por ejemplo: $5,13133133313.....$ $0,12345678910111213....$

Nota: El sistema numérico que usamos se llama decimal, o sistema de base 10, porque en este sistema cada entero positivo está representado como una suma de potencias de 10.

Ejemplo: $105 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0$

¿Cómo pasar un número racional representado en forma decimal a fracción?

Ejemplos:

Si es un número decimal periódico:

$$\begin{aligned}a &= 2,\hat{1} & b &= 1,0\hat{9} \\10a &= 21,\hat{1} & 10b &= 10,\hat{9} \\10a - a &= 21,\hat{1} - 2,\hat{1} & 100b &= 109,\hat{9} \\9a &= 19 & 100b - 10b &= 109,\hat{9} - 10,\hat{9} \\a &= \frac{19}{9} & 90b &= 99 \\2,\hat{1} &= \frac{19}{9} & b &= \frac{99}{90} \\ & & 1,0\hat{9} &= \frac{99}{90} = \frac{11}{10}\end{aligned}$$

Si es un número decimal no periódico:

$$\begin{aligned}c &= 2,6 \\10c &= 26 \\c &= \frac{26}{10} = \frac{13}{5}\end{aligned}$$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 4:

Hallar una representación decimal de los siguientes números racionales:

- a) $\frac{1}{4} =$
- b) $1\frac{2}{5} =$
- c) $-\frac{1}{3} =$
- d) $\frac{2}{7} =$
- e) $\frac{1}{10} =$

¿Es cierto que 1,5 y $1,4\hat{9}$ son representaciones decimales de $\frac{3}{2}$? Justificar

Ejercicio 5:

Representar como fracción los siguientes números decimales:

- a) $0,6 =$
- b) $1,\hat{3} =$
- c) $1,4\hat{5} =$
- d) $1,2 =$

e) $3,25 =$

f) $2, \hat{5} =$

¿Es cierto que todo número periódico puro con período 9 es igual a un entero? Justificar.

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Es conveniente que ahora recordemos las propiedades que gozan algunas operaciones. La aplicación correcta de las mismas, ayuda a un manejo fluido de las operaciones con números reales.

SUMA Y PRODUCTO:

Propiedades:

Sean a, b y c números reales cualesquiera. Se cumplen:

PROPIEDAD	SUMA	PRODUCTO
<i>Cierre o clausura</i>	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
<i>Conmutativa</i>	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
<i>Asociativa</i>	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
<i>Existencia del elemento neutro</i>	Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$	Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
<i>Existencia de opuesto (opuesto en la suma, inverso multiplicativo en el producto)</i>	Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe su opuesto, $-a \in \mathbb{R}$ que verifica $a + (-a) = 0$	Para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe su inverso, $1/a$, que verifica $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. El inverso multiplicativo, si existe, es único.

DIFERENCIA Y COCIENTE:

- La existencia de un único opuesto para cada número real justifica la definición de diferencia o resta de números reales de la siguiente manera: $a - b = a + (-b)$ siendo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
- La existencia de un único inverso multiplicativo para cada número real distinto de cero justifica la definición de cociente de números reales de la siguiente manera: $a:b = a \cdot \frac{1}{b}$ siempre que $b \neq 0$

Propiedades:

Sean a, b y c números reales cualesquiera.

PROPIEDAD	RESTA	COCIENTE
Cierre o clausura	$a - b \in \mathbb{R}$	$a : b = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ si $b \neq 0$
Conmutativa	No se cumple. Pues, por ejemplo, sean $a=6$ y $b=7$, resulta $a-b = 6-7 = -1$ y $b-a = 7-6 = 1$.	No se cumple
Asociativa	No se cumple	No se cumple
Existencia del elemento neutro	No tiene	No tiene
Existencia de opuesto	Como no tiene elemento neutro, no se puede analizar la existencia de opuesto	Como no tiene elemento neutro, no se puede analizar la existencia de opuesto

Observaciones: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$$0 \cdot a = 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ó } b = 0)$$

$$\frac{1}{b} = 1 : b = 1 \cdot b^{-1} = b^{-1} \quad b \neq 0$$

$$\frac{0}{b} = 0 : b = 0 \cdot b^{-1} = 0 \quad b \neq 0$$

Propiedad distributiva (del producto con respecto a la suma):

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R}$$

OPERACIONES COMBINADAS

Para resolver una operación combinada, deben seguirse estos pasos:

1. Se separa en términos (multiplicación y división unen, suma y resta separa).
2. Se resuelven los paréntesis.
3. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
4. Luego las sumas y restas, y se simplifica.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) : \frac{1}{9} + \frac{2}{5} = \\ & \left(\frac{15}{20} - \frac{4}{20} \right) : \frac{1}{9} + \frac{2}{5} = \\ & \frac{11}{20} \cdot \frac{9}{1} + \frac{2}{5} = \\ & \frac{99}{20} + \frac{2}{5} = \\ & \frac{99}{20} + \frac{8}{20} = \\ & \frac{107}{20} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 6:

Unir cada expresión con su resultado:

$14 - 4 - 5 + 3 - 2 + 7 - 1 + 4$	18
$14 - (4 - 5) + 3 - (-2 + 7 - 1) + 4$	4
$14 - 4 - [5 + 3 - (-2 + 7) - 1] + 4$	16
$14 - (4 - 5 + 3) - (-2 + 7 - 1 + 4)$	12

Ejercicio 7:

Colocar en cada caso paréntesis donde sea necesario para que obtener el resultado indicado

- a) $6 \cdot 3 + 6 : 2 - 1 = 20$ b) $6 \cdot 3 + 6 : 2 - 1 = 26$ c) $6 \cdot 3 + 6 : 2 - 1 = 11$

Ejercicio 8:

Separar en términos y resolver:

a) $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{15} =$

$$b) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{54}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{9}{4}\right) =$$

$$c) \frac{5}{2} + \frac{10}{6} : \frac{15}{12} - \frac{1}{3} =$$

$$d) 0,2 \cdot \left(3 + \frac{9}{5}\right) - 1,5 \cdot \frac{4}{5} =$$

$$e) \left(\frac{5}{3} + 2,6\right) \cdot \frac{2}{13} - 0,3 + \frac{5}{6} =$$

$$f) 0,04 \cdot \frac{15}{2} + 2,1 \cdot \left(\frac{3}{19} - 1\right) =$$

$$g) 0,83 \cdot \frac{2}{15} \cdot \left(2 + \frac{1}{3} : 1,6 + 1\right) =$$

POTENCIACIÓN DE UN NÚMERO REAL Y EXPONENTE ENTERO

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{(n \text{ veces})}$ el número **a** se llama base y **n** exponente.

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a^{-n} = (1/a)^n \quad \text{si } a \neq 0$$

Propiedades de la potenciación

Sean m, n números enteros y a, b números reales, se cumplen:

Distributiva respecto al producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Distributiva respecto al cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ con } b \neq 0$
Productos de potencia de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ con } a \neq 0$
Potencia de otra potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Nota: Si algún exponente es negativo o cero, deben ser a y b distintos de cero.

La potencia no es distributiva con respecto a la suma ni a la diferencia.

RADICACIÓN

Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $a \in \mathbb{R}$ se llama *raíz n-ésima de a*, a cualquier número real b que verifique $b^n = a$

El número n se denomina índice y a radicando. En símbolos: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Observaciones:

➤ Cuando el índice n es impar el valor de b es único y del mismo signo que el radicando.

Ejemplos: Se quiere calcular $\sqrt[5]{32}$. Se busca un $b \in \mathbb{R} / b^5 = 32$. Se ve que $2^5=32$ y es el único que cumple esta condición. Luego $\sqrt[5]{32}=2$.

Se quiere calcular $\sqrt[5]{-32}$. Se busca un $b \in \mathbb{R} / b^5 = -32$. Se ve que $(-2)^5= -32$ y es el único que cumple esta condición. Luego $\sqrt[5]{-32} = -2$.

➤ Cuando el índice n es par y el valor de a es negativo, no existe la raíz n -ésima de a .

(Se quiere calcular $\sqrt{-9}$. Se busca un $b \in \mathbb{R} / b^2 = -9$. Se ve que no existe tal b .)

Cuando el índice n es par y el valor de a es positivo, existen dos posibles valores de b . Se elige la positiva y recibe el nombre de *raíz aritmética n -ésima de a* .

(Se quiere calcular $\sqrt{25}$. Se busca un $b \in \mathbb{R} / b^2 = 25$. Se ve que hay dos valores de b , el 5 y el -5.

Se usará $\sqrt{25} = 5$)

Nota: $\sqrt[n]{0} = 0$

Propiedades de la radicación: Sean $a, b \in \mathbb{R}$

Distributiva respecto al producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Distributiva respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
Raíz de otra raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Nota: Si a ó b son negativos, estas propiedades valen cuando n es impar.

Combinando la potenciación y la radicación se definen las **potencias de exponentes racionales** m/n con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+ \text{ si } n \text{ es par y } a \in \mathbb{R} \text{ si } n \text{ es impar.}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad \text{con } a \neq 0$$

Valen las propiedades citadas anteriormente.

ACTIVIDADES:

Ejercicio 9:

Resolver las siguientes operaciones combinadas. Recordar separar en términos.

$$a) \sqrt[3]{8 \cdot 27} + \frac{3}{2} - \sqrt{50 + 25 \cdot 2} =$$

$$b) \sqrt[3]{8 \cdot 125} - \sqrt{25} \cdot \frac{1}{5} : 5^3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{25} =$$

$$c) \left(\sqrt[3]{125 \cdot \frac{1}{5}} \right) : \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$$

$$d) \sqrt{\frac{4}{5} - \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{5}} + \left(3 + \frac{1}{4} \cdot 5 \right)^0 - \sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} =$$

Ejercicio 10:

Resolver las siguientes operaciones combinadas. Transformar los números decimales a fracción cuando sea necesario.

$$a) \left[\sqrt{\frac{4}{25}} : \left(2 - \frac{8}{5} \right) \right] + [2, \hat{1} + 1,0\hat{9}] : 28,9 =$$

$$b) \frac{\sqrt{0,0\hat{4} \cdot \frac{10}{8} - 0,01\hat{5}}}{0,2} =$$

$$c) \frac{0,2 + 0,1\hat{6}}{0,6} + \frac{0,4 \cdot 3,5}{0,3} =$$

$$d) \frac{\sqrt[3]{1 - 0,93\hat{6}} - 1}{\sqrt[3]{-1 + 0,784}} + \frac{[(-0,3) \cdot 0,4 + 0,22]^2}{\sqrt{0,9} \sqrt{0,4}} =$$

Recordar:

Dos **radicales** son **semejantes** cuando tienen igual índice y el mismo radicando. Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes. Por ejemplo:

$$3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = (3 + 2 - 1)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

¡Cuidado! Existen ciertos radicales que son semejantes luego de llevarlos a su mínima expresión. Por ejemplo, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{32}$ son radicales semejantes pues:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Ejercicio 11:

Resolver las siguientes sumas y restas con radicales (a y b son números positivos):

$$a) -3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5} =$$

$$b) 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$c) 2\sqrt{b} - 3\sqrt{a} - 2\sqrt{b} - \sqrt{a} =$$

$$d) 5\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{2} - \sqrt{2} =$$

$$e) \sqrt{5} + \sqrt{8} - \sqrt{32} =$$

f) $3\sqrt{7} - 3\sqrt{28} + \sqrt{63} =$

Ejercicio 12:

Simplificar las siguientes expresiones aplicando propiedades de la potenciación cuando corresponda. Eliminar cualquier exponente negativo.

a) $2^2 \cdot 2^3 =$

b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 =$

c) $4^2 \cdot (2^3)^{-2} =$

d) $\frac{(x^{-1}y^2)^2}{(x^3y^{-2})^3} =$

e) $\left(\frac{a^6b^{14}}{a^2}\right)^{24} =$

f) $\left(\frac{y^1}{5x^{-2}}\right)^{-3} =$

g) $\left(\frac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-1} =$

h) $\left(\frac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)^4 =$

Ejercicio 13:

Entre las siguientes expresiones, encontrar las que son equivalentes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 ; -\left(\frac{1}{2}\right)^2 ; 0,5^2 ; -0,5^2 ; \left(-\frac{1}{2}\right)^2 ; -2^{-2} ; 2^{-2}$$

Ejercicio 14:

Completar con “=” o “≠” y justifica tu elección mencionando la propiedad que empleaste para tomar la decisión.

a) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} \dots\dots\dots \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{4}{9}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}} \dots\dots\dots \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4}{9}}$

Ejercicio 15:

Escribir como potencia fraccionaria y simplificar. Suponer que las letras son números reales positivos cualesquiera.

a) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}} =$

b) $\frac{\sqrt[5]{2x^2 \cdot y^3}}{\sqrt[4]{x \cdot y}} =$

c) $\sqrt[5]{2^{15} \cdot x^{40} \cdot y^{30}} =$

d) $\left[\sqrt{x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}}\right]^3 =$

$$e) \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y}} =$$

Recordar:

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina

racionalización del denominador.

Por ejemplo:

$$a) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$b) \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 16:

Racionalizar el denominador:

$$a) \frac{1}{\sqrt{10}} =$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$c) -\frac{5}{\sqrt{3}} =$$

$$d) \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$$

$$e) \frac{1}{3-\sqrt{2}} =$$

$$f) \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} =$$

PORCENTAJE

El símbolo % se lee "*por ciento*" y significa por cada 100 unidades. Un porcentaje indica la proporción de un entero.

Por ejemplo, si queremos calcular el 10% de 250 deberemos dividir 250 en 100 partes iguales y quedarnos con 10 de esas partes. Es decir:

$$10\% \text{ de } 250 = (250 : 100) \cdot 10 = 25$$

En forma general, podemos decir que para calcular $x\%$ de una cantidad, se deben tomar x partes de las 100 en que se divide la cantidad. Por tal razón, los porcentajes pueden representarse mediante fracciones y, por lo tanto, también admiten una representación decimal.

Siguiendo con nuestro ejemplo: 10% puede representarse como $\frac{10}{100}$, o en su representación decimal como 0,10. Luego:

$$10\% \text{ de } 250 = \frac{10}{100} \cdot 250 = 25$$

o también,

$$10\% \text{ de } 250 = 0,10 \cdot 250 = 25$$

¿Por qué decimos que un porcentaje es una proporción de un entero?

Porque un porcentaje es una relación de proporcionalidad directa donde el 100% corresponde al total. Decimos que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre ambas es siempre un mismo valor k (constante de proporcionalidad).

En el ejemplo visto, 250 representa el 100% y, por lo tanto, 25 representa el 10%. Se verifica la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{25}{250} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Es decir, 25 es la décima parte de 250, así como 10 es la décima parte de 100.

Veamos otro ejemplo:

$$25\% \text{ de } 1200 = \frac{25}{100} \cdot 1200 = 0,25 \cdot 1200 = 300$$

Luego, se verifica:

$$\frac{300}{1200} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Es decir, que 300 es la cuarta parte de 1200, así como 25 es la cuarta parte de 100.

Siempre que se tenga una proporcionalidad directa se puede utilizar la regla de tres simple directa.

¿Cómo se utiliza la regla de tres simple directa para el cálculo de porcentajes?

Se colocan en una tabla tres valores:

- la cantidad a la cual se le quiere calcular el porcentaje
- el 100%
- el porcentaje que se quiera averiguar.

Se debe prestar atención a que cada magnitud quede en la columna correspondiente y que la cantidad total esté en la misma fila que 100%.

Ejemplo:

Se quiere calcular el 15% de 300:

Cantidad	Porcentaje
300	100%
x	15%

Luego, planteando la proporcionalidad directa obtenemos que:

$$\frac{x}{300} = \frac{15}{100} \Rightarrow 100 \cdot x = 300 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 15}{100} = 45$$

Este procedimiento es útil cuando queremos calcular, por ejemplo, el porcentaje que representa una parte de una cantidad total o el total sabiendo qué porcentaje representa una parte.

Ejemplo:

Se sabe que el 30% de una cantidad es 150, ¿cuál es dicha cantidad?

Cantidad	Porcentaje
x	100%
150	30%

Luego, $\frac{150}{x} = \frac{30}{100} \Rightarrow 30 \cdot x = 100 \cdot 150 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 150}{30} = 500$

Por lo tanto, la cantidad total (el 100%) es 500.

Observar que para utilizar la **regla de tres simple directa**, se debe:

- 1°) Ubicar los datos en la tabla,
- 2°) Multiplicar los datos que se encuentran en la diagonal,
- 3°) Dividir el resultado por el dato restante.

ACTIVIDADES:

Ejercicio 17:

- a) En una farmacia hacen el 40% de descuento en los medicamentos por obra social.
 - i) Si un medicamento sale \$2500, ¿cuánto se pagó por el medicamento?
 - ii) Si se aplica un 20% extra de descuento sobre el monto resultante por pago con tarjeta de crédito, ¿cuánto se pagó por el medicamento? ¿se está descontando el 60%?
- b) Para preparar alcohol al 30%, se mezclan 70% de agua con 30% de alcohol puro.
 - i) Si se utiliza 1 litro de agua para preparar la solución, ¿cuántos litros del alcohol puro se necesitan? ¿cuántos litros tiene la solución?
 - ii) Si se quiere preparar 1 litro de dicha solución, ¿cuántos litros de agua se necesitan? ¿cuántos de alcohol puro?
- c) Un yogurt comercial de 145 g tiene 142 mg de sodio.
 - i) ¿Qué porcentaje del yogurt representa?
 - ii) Si se tienen 300 g del mismo yogurt, ¿cuántos mg de sodio contiene?
- d) Un laboratorio está probando un nuevo medicamento. Aunque los efectos secundarios deberían ser nulos, el medicamento será aceptado si produce somnolencia en menor del 0,1% de la población de ratones con los que experimentan. Si lo probaron en 2000 ratones y a 3 les dio sueño, ¿será aceptado o rechazado?
- e) Se tienen 18 litros de leche con un 10% de grasa y se mezclan con 10 litros de otra leche con un 4% de grasa, ¿cuál es el porcentaje de grasa de la nueva solución de leche?

APROXIMACION DE NUMEROS REALES

Cuando se trabaja con números reales, es posible que no interese considerar todas las cifras de un número, bien porque el número sea muy grande, muy pequeño o porque no se pueda trabajar con todas ellas porque el número sea irracional. Cuando esto ocurre, debemos hacer aproximaciones.

Aproximar un número consiste en sustituirlo por otro cercano con un número finito de cifras decimales. Para hacer aproximaciones tenemos dos métodos distintos: el truncamiento y el redondeo.

- **TRUNCAR** un número decimal a un determinado orden consiste en eliminar todas las cifras decimales de los órdenes inferiores a él.

• REDONDEAR un número decimal a un determinado orden consiste en suprimir todas las cifras decimales de orden inferior al orden dado y aplicar el siguiente criterio:

- Si la primera cifra que se suprime es mayor o igual a 5, se suma 1 a la cifra anterior.

- Si la primera cifra que se suprime es menor que 5, la cifra anterior no varía.

Cuando la aproximación es mayor que el número que estamos aproximando, decimos que se ha realizado una aproximación por exceso. Si la aproximación es menor que el número aproximado, se dice que la aproximación es por defecto.

Ejemplo: Aproximar a las milésimas el número 2,456783:

- Por truncamiento: se suprimen todas las cifras decimales posteriores a las milésimas. $A = 2,456$ Es una aproximación por defecto.

- Por redondeo: se suprimen todas las cifras decimales posteriores a las milésimas y se analiza la cifra de las diezmilésimas, 7. En este caso como es mayor que 5 se le suma 1 a la cifra de la milésima $6 + 1$ y la aproximación es: $A = 2,457$ Es una aproximación por exceso.

¿Cómo se les llama a los números detrás de la coma?

Parte entera	Décimos	Centésimos	Milésimos	Diezmilésimos	Cienmilésimos
3,	0	2	4	5	9

ACTIVIDADES:

Ejercicio 18:

Trunca y redondea los siguientes números a las centésimas y a las milésimas e indica si la aproximación es por defecto o por exceso.

a) 1,234564668

b) 3,222464

c) 1,143643625

d) 1,6467538

e) 2,222

f) 1,123

Ejercicio 19:

Si redondeamos 8.247.406 a la decena de mil más próxima se obtiene:

a) 8.000.000 b) 8.250.000 c) 8.300.000 d) 8.500.000

Ejercicio 20:

Proponer 5 números que puedan ser valores exactos en cada uno de las siguientes aproximaciones decimales

- a) 6,03 es una aproximación a centésimas por exceso
- b) 573,3 es una aproximación a décimas por defecto

Ejercicio 21:

Señalar cuáles de las siguientes aproximaciones propuestas son las mejores para los siguientes números:

- | | | | |
|-----------------|------|-----|-----|
| a) Para 5/6 | 0,8 | 0,9 | 0,7 |
| b) Para 8/9 | 0,8 | 0,9 | 0,7 |
| c) Para 24/25 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| d) Para 22/24 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| e) Para 122/124 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| f) Para 222/224 | 0,99 | 0,9 | 1 |

CONJUNTOS

Tratar de definir lo que es un conjunto no es sencillo dado que con frecuencia utilizamos un uso circular de sinónimos tales como colección, grupo o clase. Partiremos de cierta noción intuitiva en el sentido en que un conjunto debe ser una colección bien definida de objetos. Estos objetos se llaman elementos del conjunto.

Utilizaremos letras mayúsculas, como A, B, C, ..., para representar los conjuntos y letras minúsculas para representar los elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A y $x \notin A$ si x no es un elemento de A. Por ejemplo, $5 \in \mathbb{Z}$ y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Se define **conjunto vacío** al conjunto que no tiene elementos y se nota $\emptyset$.

Algunos conjuntos pueden representarse entre llaves, listando sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales menores que 6 puede expresarse como:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

También, puede escribirse A en notación constructiva de conjuntos como:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$$


 “tal que”

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

Para A y B conjuntos se define:

- La **UNIÓN** de A y B: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$ Nota: El símbolo $\vee$ se lee “ó”
La unión de conjuntos está conformada por los elementos que están en A, en B o en ambos.

Ejemplos: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

- La **INTERSECCIÓN** de A y B: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$ Nota: El símbolo $\wedge$ se lee “y”

La intersección de conjuntos está conformada por los elementos comunes entre A y B.

Ejemplos: $A = \{2,4,6,8,10\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$ entonces $A \cap B = \{2,4\}$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

- La **DIFERENCIA** entre A y B: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

La diferencia entre conjuntos está conformada por los elementos que están en A y no en B. Notar que no siempre es igual $A - B$ que $B - A$.

Ejemplo: $A = \{2,4,6,8,10\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$ entonces $A - B = \{6,8,10\}$ y $B - A = \{1,3\}$

$$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$$

SUBCONJUNTOS

Diremos que A es un **subconjunto** de B si todo elemento de A está en B y notamos

$$A \subseteq B$$

Si, además, existe un elemento de B que no está en A (es decir, $A \neq B$) diremos que A es un **subconjunto propio** de B y notamos $A \subset B$.

ACTIVIDAD:

Ejercicio 22:

Hallar los conjuntos indicados siendo $A = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$,

$$C = \{0,1,2,3,4,5\}$$

a) $A \cup B$

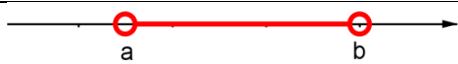
b) $C - A$

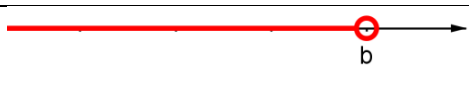
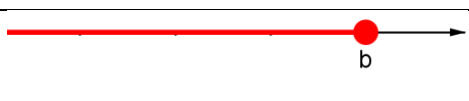
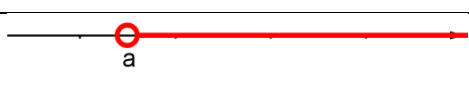
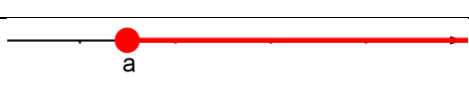
c) $A \cap B \cap C$

d) $(A - B) \cap C$

INTERVALOS REALES

Existen conjuntos que utilizaremos con frecuencia: los intervalos. Estos conjuntos son aquellos que geoméricamente se corresponden con segmentos o semirrectas:

Notación constructiva de conjuntos	Notación de intervalos	Gráfica
$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$[a, b)$	

$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	

Nota: para representar intervalos en la recta numérica también puede utilizarse un paréntesis en vez de un punto “vacío” y un corchete en vez de un punto “lleno”.

ACTIVIDADES:

Ejercicio 23:

Representar gráficamente (para repasar los operadores lógicos):

1) $1 < x < 6$

2) $0 \leq y \leq 3$

3) $-7 \leq y \leq -3$

4) $x < -1 \vee x > 2$

5) $t \leq -10 \vee t \geq -5$

6) $x < -2 \vee x > 0$

7) $x \geq 2 \wedge x > 5$

8) $x \geq 4 \vee x > 1$

Ejercicio 24:

Representar sobre un eje coordenado los conjuntos A ; B ; $A \cap B$ y $A \cup B$ para:

a) $A = [2 ; 4)$; $B = [4 ; 7]$

b) $A = [2 ; 6]$; $B = [3 ; 4]$

c) $A = (2 ; 4)$; $B = (1 ; 5)$

d) $A = (-3 ; -1)$; $B = (-2 ; 0)$

UNIDAD N° 2: ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS EN UNA INCÓGNITA

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones que contienen uno o más valores desconocidos (incógnita).

Una **solución** es un valor de la(s) incógnita(s) para los cuales la igualdad se verifica.

El **conjunto solución** de la ecuación es el conjunto de todas las soluciones.

Resolver una ecuación significa encontrar todas las soluciones. Es decir, hallar el conjunto solución.

Una **identidad** es una ecuación que se verifica para todos los valores posibles de la(s) incógnita(s).

Una **expresión es algebraica** si en ella aparecen variables y números, llamados coeficientes, relacionados por operaciones suma, producto, división, potenciación y radicación. Una **ecuación** se dice **algebraica** si es una igualdad de expresiones algebraicas.

Ejemplos:

- a) $x + 5 = 0$ c) $x + y = 8$ e) $\log y = 6$ g) $2a - 4b + 10c = 9$
b) $a^2 + a - 4 = 0$ d) $e^x = 20$ f) $\sin(p) = 0.45$

Las ecuaciones a), b), c) y g) son ecuaciones algebraicas, mientras que las ecuaciones d), e) y f) no lo son.

Dos ecuaciones se dicen **equivalentes** cuando todas las soluciones de la primera ecuación son también soluciones de la segunda, y, viceversa, todas las soluciones de la segunda ecuación son también soluciones de la primera.

Ejemplos:

- a) Las ecuaciones $x + 1 = 2$ y $2x + 2 = 4$ son equivalentes.

Pues $x=1$ es la única solución de ambas ecuaciones.

- b) Las ecuaciones $x - 3 = 0$ y $x^2 - 3 = 0$ no son equivalentes.

Pues $x=3$ es solución de ambas, pero la segunda tiene una solución, $x=-3$, que no es solución de la primera

Las ecuaciones pueden clasificarse, teniendo en cuenta el conjunto solución, en:

Compatible Determinada: cuando tienen un número finito de soluciones.

Compatible Indeterminada: cuando tienen infinitas soluciones.

Incompatible: cuando no existe ninguna solución.

Ejemplos:

- a) $x + 1 = 0$ tiene una solución $x = -1$
- b) $x = x$ tiene infinitas soluciones (es una identidad)
- c) $x^2 = -1$ no tiene ninguna solución real.

Teniendo en cuenta el número de incógnitas, una ecuación puede clasificarse en: ecuación de una incógnita, ecuación de dos incógnitas, etc.

METODOLOGÍA PARA RESOLVER ECUACIONES

Como dos ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones, cuando se quiere resolver una ecuación se puede resolver cualquiera que sea equivalente a ella, de ahí la idea de buscar ecuaciones equivalentes más simples.

El procedimiento es transformar una ecuación en otra equivalente pero más simple, y así sucesivamente hasta llegar a una ecuación equivalente a la dada, de la cual se encuentra con facilidad su conjunto solución.

Las transformaciones que se pueden hacer sobre una ecuación para obtener una equivalente son:

- 1- Intercambiar los dos miembros de la ecuación.

Ejemplo: $3 = x - 4 \Rightarrow x - 4 = 3$

- 2- Simplificar los miembros de la ecuación reduciendo a términos semejantes, eliminando los paréntesis, etc.

Ejemplo: $2 \cdot (x - 1) = 5 \Rightarrow 2x - 2 = 5$

- 3- Sumar o restar la misma expresión a ambos miembros de la ecuación (ver nota a)

Ejemplo: $x - 1 = 3 \Rightarrow x - 1 + 1 = 3 + 1 \Rightarrow x = 4$

- 4- Multiplicar o dividir ambos miembros por una misma expresión distinta de cero. (ver nota b)

Ejemplo: $\frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 3 \Rightarrow 1 \cdot x = 6 \Rightarrow x = 6$

- 5- Si un miembro de la ecuación es 0 y el otro puede ser factorizado, entonces se puede usar la ley del producto e igualar cada factor a cero.

Ejemplo: $x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

Notas:

- a) Si la expresión que se suma no se puede calcular para cada valor de la incógnita entonces puede ocurrir que las dos ecuaciones no sean equivalentes.

Ejemplo: $x = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. La nueva ecuación no está definida para $x = 0$ aunque es la solución de la primar ecuación.

- b) Si la expresión que se multiplica no es distinta de cero entonces puede ocurrir que las dos ecuaciones no sean equivalentes.

Ejemplo: $x = 2$, si multiplico por 0 en ambos miembros obtengo $0 = 0$ y no es equivalente a la ecuación original.

ECUACIÓN LINEAL EN UNA INCÓGNITA

Una ecuación es lineal en la incógnita x si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la siguiente expresión:

$a \cdot x + b = 0 \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
--

Ejemplos:

1) $5x - 4 = 3x - 2$

$$5x - 4 = 3x - 2$$

$$5x - 4 - 3x = 3x - 2 - 3x \quad \text{se suma a cada miembro el opuesto de } (-3x)$$

$$2x - 4 = -2 \quad \text{se opera}$$

$$2x - 4 + 4 = -2 + 4 \quad \text{se suma a cada miembro el opuesto de } -4 (+4)$$

$$2x = 2 \quad \text{se opera}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \quad \text{se divide a cada miembro por 2}$$

$$x = 1$$

Luego el conjunto solución es $S = \{1\}$

2) $2(t - 1) + 3 = 1 + 2t$

$$2t - 2 + 3 = 1 + 2t$$

$$2t + 1 = 1 + 2t$$

$$2t + 1 - 1 = 1 + 2t - 1$$

$$2t + (1 - 1) = 2t + (1 - 1)$$

$$2t + 0 = 2t + 0$$

$$2t = 2t$$

$$\frac{1}{2}(2t) = \frac{1}{2}(2t)$$

Cualquiera sea el valor que demos a “ t ”, la igualdad se verifica, por lo tanto, esta ecuación es satisfecha por todos los reales, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. Se trata de una identidad.

$$S = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{1}{2}, 2\right)t = \left(\frac{1}{2}, 2\right)t$$

$$1. t = 1. t$$

$$t = t$$

$$3) 2(t - 1) + 3 = 2t$$

$$2t - 2.1 + 3 = 2t$$

$$2t + 1 = 2t$$

$$2t + 1 - 1 = 2t - 1$$

$$2t + (1 - 1) = 2t - 1$$

$$2t + 0 = 2t - 1$$

$$2t = 2t - 1$$

$$2t - 2t = 2t - 1 - 2t$$

$$(2 - 2)t = 0 - 1$$

$$0t = -1$$

No existe valor de “t” que verifique esa igualdad pues,

$$0. t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$S = \emptyset$$

Analizando la ecuación $a.x + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se la puede clasificar (teniendo en cuenta sus soluciones) en:

a) **compatible a solución única:** cuando $a \neq 0$, en este caso, la solución queda $x = -b/a$

b) **indeterminada:** cuando $a = 0$ y $b = 0$ queda $0.x = 0$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$

c) **incompatible:** cuando $a = 0$ y $b \neq 0$ queda $0.x = b$ no se verifica para ningún $x \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$a) 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$b) 3x - 3x = 0 \Rightarrow 0.x = 0, \text{ se verifica para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$c) 3x - 3x = 5 \Rightarrow 0.x = 5, \text{ NO se verifica para ningún } x \in \mathbb{R}$$

ACTIVIDAD

Ejercicio 1:

Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

$$i) \left(\frac{7}{2}x - 5\right) \cdot 4 - 9x = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - 5$$

$$ii) 3x + \frac{2+45x}{6} = \frac{15x-2}{3} + 4x + \frac{3x+2}{2}$$

$$\text{iii)} \frac{10x-5}{4} = \left(\frac{15}{2}x - 3\right) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Una **ecuación** se dice **no lineal** si no es lineal.

Ejemplos:

$$2x + 1 = 3 \quad \text{lineal}$$

$$3x - 2x + 4 = 0 \quad \text{lineal}$$

$$y + y^2 - y^3 = 4 \quad \text{no lineal}$$

$$2x^2 + 1 = 3 \quad \text{no lineal}$$

$$2x^2 - 2 \log(x) + 4 = 0 \quad \text{no lineal}$$

$$z + \sin(z) - z = 4 \quad \text{no lineal}$$

$$x \cdot \sqrt{x} + x^2 = 6 \quad \text{no lineal}$$

Ejercicio 2:

Resolver las siguientes ecuaciones y expresar su conjunto solución.

$$1) y + 11 = 8$$

$$13) 0 \cdot x = 0$$

$$2) x - 18 = 22$$

$$14) 4x = 0$$

$$3) x + 9 = -6$$

$$15) 0 \cdot x = 5$$

$$4) -13y = 117$$

$$16) 7y = 7y$$

$$5) \frac{1}{5}y = 8$$

$$17) 7w = -7w$$

$$6) -4x - 7 = -35$$

$$18) 4x - 2x - 2 = 2x$$

$$7) 7y - 1 = 23 - 5y$$

$$19) 2x + 4 + x = 4 + 3x$$

$$8) 8 - 5x = x - 16$$

$$20) t - 1 = 1 - t$$

$$9) 5 - 4a = a - 13$$

$$21) 5y - 3 = 3y + 1 + 2y$$

$$10) -\frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = -2$$

$$22) 80 = 10(3t + 2)$$

$$11) y - \frac{1}{3}y - 15 = 0$$

$$23) 5y = (2y - 10) \cdot 25$$

$$12) \frac{3}{2}x + \frac{5}{3}x - \frac{13}{6}x - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$24) a + (a - 3) = (a + 2) - (a - 1)$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UNA INCÓGNITA

Una ecuación es de segundo grado en la incógnita x , o simplemente ecuación cuadrática, si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la siguiente expresión:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Ejemplos:

1) $2x^2 + 4 = 0$ es una ecuación cuadrática, siendo $a = 2, b = 0$ y $c = 4$.

2) $(x - 1) \cdot (x + 4) = 0$ es una ecuación cuadrática dado que, si aplicamos la propiedad distributiva podemos obtener una ecuación equivalente de la forma:

$$(x - 1) \cdot (x + 4) = 0 \Rightarrow x^2 - x + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ siendo } a = 1, b = 3 \text{ y } c = -4$$

3) $\sqrt{5}x + \frac{1}{2}x^2 = 0$ es una ecuación cuadrática, siendo $a = \frac{1}{2}, b = \sqrt{5}$ y $c = 0$

4) $(x - 3)^2 = 0$ es una ecuación cuadrática ya que, si aplicamos la propiedad del binomio al cuadrado, podemos expresar la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 &= (x + (-3))^2 = 0 \Rightarrow \\ x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2 &= 0 \Rightarrow \\ x^2 - 6x + 9 &= 0, \\ \text{donde } a &= 1, b = -6 \text{ y } c = 9\end{aligned}$$

Binomio al cuadrado:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2$$

¿Cómo resolver una ecuación cuadrática?

- Si $b = 0$ la ecuación cuadrática puede expresarse de la forma $ax^2 + c = 0$. En este caso es posible despejar “x” a partir de transformaciones equivalentes:

Ejemplo:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

- Si $c = 0$ la ecuación cuadrática puede expresarse de la forma $ax^2 + bx = 0$. En este caso es posible sacar factor común “x” y luego igualar cada factor a 0:

Ejemplo:

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x + 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -3$$

La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$

- Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, no es posible resolver la ecuación con los mismos procedimientos utilizados en los casos anteriores. Para resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se utiliza la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

Esta fórmula se obtiene de realizar ciertas transformaciones algebraicas en el primer miembro de la ecuación (como “completar cuadrados”) para poder despejar la incógnita “x”. No se verá en este curso tal desarrollo teórico.

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación.

Se simboliza: $\Delta = b^2 - 4ac$

Analizando la resolvente de la ecuación de segundo grado, se puede concluir que la cantidad de soluciones de la misma depende del discriminante, de la siguiente manera:

- a) si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
 b) si $\Delta = 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales. (una solución doble)
 c) si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene ninguna solución real.

En los casos a y b la ecuación resulta compatible y en el caso c resulta incompatible.

Ejemplos:

a) $x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$
 $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

$$c) x^2 + x + 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Propiedad:

Si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación de segundo grado en la incógnita x , entonces se puede factorizar la expresión ax^2+bx+c de la siguiente manera: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si tenemos una ecuación cuadrática dada de la siguiente manera $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ es sencillo observar y verificar que x_1 y x_2 son sus soluciones.

Ejemplo:

$$2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación serán aquellos valores que anulen cada factor. Esto es:

$$x - 1 = 0 \vee x + \frac{3}{2} = 0$$

$$x = 1 \vee x = -3/2$$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 3:

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas deduciendo previamente la cantidad de soluciones de acuerdo al discriminante:

i) $4x^2 + 4x + 3 = 5x^2 + 3x - 3$

ii) $(x - 2)(2x + 2) = (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$

iii) $5x^2 - 3x + 1 = 4x^2 - 7x - 3$

Ejercicio 4:

Hallar el/los valor/es de m tal que las siguientes ecuaciones cuadráticas tengan:

i) $3mx^2 + 2x - 3 = 0$ tenga 2 raíces reales distintas

ii) $x^2 - mx + 4 = 0$ tenga 1 raíz real doble (o dos raíces reales iguales)

iii) $-2x^2 + 3x - m = 0$ carezca de raíces reales

Ejercicio 5:

Resolver las siguientes ecuaciones, estableciendo las restricciones de la variable cuando sea necesario:

1) $(x + 2)(x - 5) = 0$

8) $\frac{x-4}{8-x} = 0$

2) $(t - 3)(t - 7) = 0$

9) $\frac{x(3-x)}{2x-1} = 0$

3) $(3y - 4)(4y - 1) = 0$

10) $\frac{3x-6}{x} = 0$

4) $m(m - 8) = 0$

11) $x \cdot x = x$

5) $(2x - 3)(3x - 2) = 0$

12) $x(x - 1) = x$

6) $x(x - 1)(x - 2) = 0$

13) $x(x - 1) = x(x + 1)$

7) $\frac{1}{7}(a - 3)(7a + 4) = 0$

Ejercicio 6:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $p^2 - 5p = -1$

c) $y^2 - 3y + 2 = 4y - 2y^2$

d) $5c^2 + 9c - 1 = -7c^2 + 12c - 8$

e) $x^2 - x = 0$

f) $x^2 - 64 = 0$

g) $-5x^2 - 20 = -10x$

h) $(3x - 2)^2 + (2x + 3)^2 = 26$

i) $6x - 18 - (x + 1)^2 = x^2 - (x + 2)^2$

Ejercicio 7:

Escribir una ecuación cuadrática que tenga por raíces los siguientes números:

a) 3; 5 b) 2; 1/3 c) 1 d) 0; 1

Ejercicio 8:

Escribir una ecuación que tenga como soluciones los números 7 y -8.

Ejercicio 9:

Entre las siguientes expresiones, encontrar las que son equivalentes:

$(x - 1)^2$; $x^2 - 1$; $x^2 - 2x + 1$; $(x - 1) \cdot (x - 1)$; $(x - 1) \cdot (x + 1)$

Ejercicio 10:

a) María quiere fabricar un armario de madera de manera tal que el ancho mida la mitad que el alto. Quiere que entren 30 libros en cada estante, cada uno de 4,5 cm de espesor. Si la madera que quiere utilizar tiene 1,8 cm de espesor, ¿cuáles son las dimensiones del armario?

b) Gabriel recorre el país haciendo cobranzas. Salió de Buenos Aires a las 8 de la mañana y recorrió la mitad del trayecto total en 2 horas. Luego, recorrió en una hora más $\frac{1}{3}$ del trayecto restante, quedándole para la última etapa 35 km. Esta última etapa la hizo en $\frac{3}{4}$ de hora.

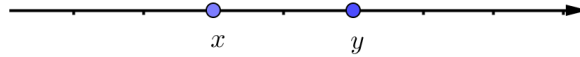
¿Cuántos kilómetros recorrió en total? ¿Cuánto tiempo tardó en hacerlo?

UNIDAD N° 3: INECUACIONES

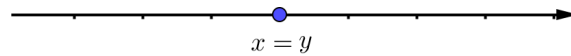
RELACIÓN DE ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Si x e y son números reales, se da una y sólo una de las tres situaciones:

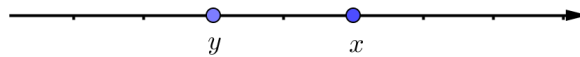
- $x < y$ (“ x es menor que y ”). En la recta real mostrada a continuación, x se encuentra a la izquierda de y :



- $x = y$ (“ x es igual a y ”). En la recta real mostrada a continuación, x está en el mismo lugar que y :



- $x > y$ (“ x es mayor que y ”). En la recta real mostrada a continuación, x se encuentra a la derecha de y :



En forma general, definiremos la relación “menor” entre dos números reales a y b de la siguiente manera:

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$$

Además,

$$a \leq b \text{ ("a menor o igual a b")} \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

$$a \geq b \text{ ("a mayor o igual a b")} \Leftrightarrow a > b \vee a = b$$

Propiedades: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$ (vale para $>, \leq, \geq$)

Ejemplo: Si $x = 2, y = 6, z = -2$ resulta $2 < 6 \Rightarrow 2 + (-2) < 6 + (-2) \Rightarrow 0 < 4$

b) Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $x \cdot z < y \cdot z$ (vale para $\leq$)

Ejemplo: si $x = -1, y = 4, z = 2$ resulta: $-1 < 4 \wedge 2 > 0 \Rightarrow -1 \cdot 2 < 4 \cdot 2 \Rightarrow -2 < 8$

c) Si $x < y$ y $z < 0$ entonces $x \cdot z > y \cdot z$ (vale para $\leq$)

Ejemplo: si $x = -1, y = \frac{1}{2}, z = -2$ resulta $-1 < \frac{1}{2} \wedge -2 < 0 \Rightarrow -1 \cdot (-2) > \frac{1}{2} \cdot (-2) \Rightarrow 2 > -1$

ACTIVIDAD:

Ejercicio 1:

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

En todos los casos a, b y c son números reales.

$$1) b > c \Rightarrow b \neq c$$

$$2) c \neq a \Rightarrow a < c$$

$$3) -b < -a \Rightarrow a < b$$

$$4) a < c \wedge c < b \Rightarrow a < b$$

$$5) -a < c \wedge -c > b \Rightarrow a < b$$

$$6) a < c \wedge b < c \Rightarrow a < b$$

INECUACIONES

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones que contienen uno o más valores desconocidos (incógnita).

Ejemplo:

$$x + 5 < 2 \cdot \left(x - \frac{4}{9}\right)$$

$$x + y \geq 1$$

Una **solución** es un valor de la(s) incógnita(s) para los cuales la desigualdad se verifica.

¿Cómo se puede averiguar si un número es solución de una inecuación?

.

Ejemplo: ¿ $x = 5$ es solución de la inecuación $x^2 + 3 < 5 - x$? ; ¿ $x = -1$ es solución?

Reemplazamos la incógnita x por el valor 5.

$x^2 + 3$	$<$	$5 - x$
$5^2 + 3$		$5 - 5$
$25 + 3$		0
28		$0 \quad \times \quad (28 > 0)$

Luego: $x = 5$ **no** es solución de la inecuación.

$$x = -1 \rightarrow$$

$x^2 + 3$	$<$	$5 - x$
$(-1)^2 + 3$		$5 - (-1)$
$1 + 3$		$5 + 1$

Luego, $x = -1$ **sí** es solución de la ecuación.

¿Habrá otras soluciones? ¿Cómo se pueden encontrar? Lo importante aquí es que para decidir si un número dado es o no solución, no hace falta resolver la inecuación.

ACTIVIDAD:

Ejercicio 2:

Determinar si el número indicado es solución de la inecuación:

- | | | | |
|----------------------------|---------|------------------------------|----------|
| a) $2y - 5 > -10$ | $y = 3$ | b) $6 - y < 9$ | $y = -3$ |
| c) $x(x + 5) \geq 8$ | $x = 1$ | d) $(t - 3)(3 + t) \leq 0$ | $t = 3$ |
| e) $(t - 3)(3 + t) \geq 0$ | $t = 3$ | f) $\frac{x - 2}{x + 3} < 1$ | $x = 0$ |
| g) $-4x > x^2 - 3x + 5$ | $x = 2$ | h) $\frac{2 + x}{x - 1} > 0$ | $x = 2$ |

El **conjunto solución** de una inecuación es el conjunto de todas las soluciones. **Resolver** una inecuación significa encontrar todas las soluciones, o sea hallar el conjunto solución.

Existen distintos métodos para resolver inecuaciones. Se usará el método algebraico. Según el caso hay uno o más métodos que resultan apropiados, más simple o más fácil de reconocer las soluciones o más conocido.

Ejemplos:

1) Encuentra el conjunto solución de $3x - 2 > 0$, exprésalo como intervalo y represéntalo sobre la recta real.

$$3x - 2 > 0$$

$$3x - 2 + 2 > 0 + 2 \quad \text{sumamos el opuesto de -2, propiedad a}$$

$$3x > 2 \quad \text{operamos}$$

$$\frac{1}{3}(3x) > \frac{1}{3} \cdot 2 \quad \text{multiplicamos por el inverso de 3, propiedad b}$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)x > \frac{2}{3} \quad \text{asociamos y operamos}$$

$$1x > \frac{2}{3}$$

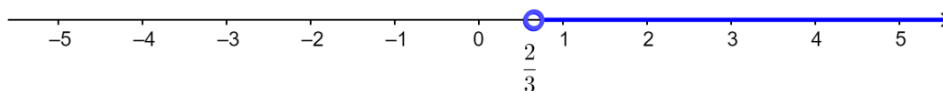
operamos

$$x > \frac{2}{3}$$

operamos

Resulta entonces el conjunto solución

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x > \frac{2}{3}\} = \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

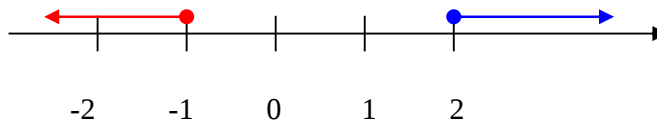


2) Encuentra el conjunto solución de $(x - 2)(x + 1) \leq 0$, exprésalo como intervalo y represéntalo sobre la recta real.

Para que el producto de los dos factores $(x - 2)$ y $(x + 1)$ sea menor o igual que cero, tenemos dos posibilidades:

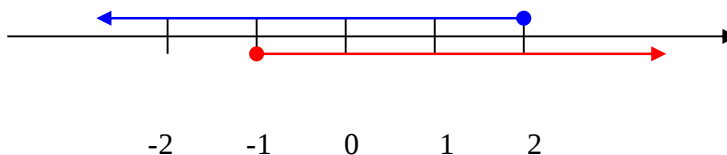
$$\begin{array}{c} \text{(I)} \quad \underbrace{x - 2 \geq 0 \wedge x + 1 \leq 0}_{S(I)} \quad \vee \quad \underbrace{x - 2 \leq 0 \wedge x + 1 \geq 0}_{S(II)} \\ \cup \\ S \end{array}$$

$$\text{(I)} \rightarrow x \geq 2 \wedge x \leq -1$$



resulta $S(I) = \emptyset$

$$\text{(II)} \rightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -1$$



resulta $S(\text{II}) = [-1, 2]$

$$S = S(\text{I}) \cup S(\text{II}) = \emptyset \cup [-1, 2] = [-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 2\}$$

ACTIVIDAD:

Ejercicio 3:

Resuelve las siguientes inecuaciones, si es posible con distintos métodos, expresa el conjunto solución como intervalo y represéntalo en la recta real:

a) $3x + 4 \leq 5x - 2$

i) $(x - 5)(x + 2) < 0$

b) $4 - 2x < 5$

j) $(x - 5)^2(x + 2) < 0$

c) $7 - 5x > 8 - 5x$

k) $(x - 5)^3(x + 2) < 0$

d) $2x - 1 \leq -3 + 6x$

l) $(x + 2)(x - 4)(x - 6) \leq 0$

e) $(x - 1)(x - 2) < 0$

m) $\frac{x-1}{x-2} < 0$

f) $(x - 1)(x + 1) > 0$

n) $\frac{2x-4}{x+2} \geq 0$

g) $x(x + 1) \geq 0$

h) $x^2(x + 1) \geq 0$

VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto de una número** x , denotado por $|x|$, es la distancia de x al 0.

El valor absoluto de x es *igual a* x , si x es positivo ó cero y, es *el opuesto de* x , si x es negativo.

En símbolos:

$$|x| = d(x, 0) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

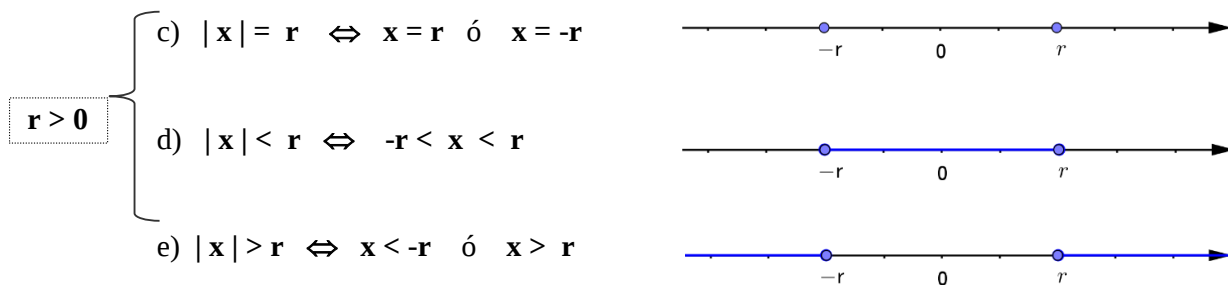
$$|3| = 3 \quad \begin{array}{l} \nearrow \boxed{\pi - 1 > 0} \\ | \pi - 1 | = \pi - 1 \end{array}$$

$$|(-3)| = -(-3) = 3 \quad \begin{array}{l} \nearrow \boxed{1 - \pi < 0} \\ |1 - \pi| = -(1 - \pi) = \pi - 1 \end{array}$$

Propiedades:

a) $|x| \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} .$

b) $|x| = |-x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} .$

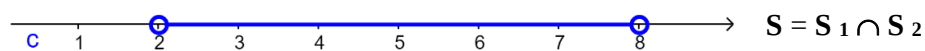
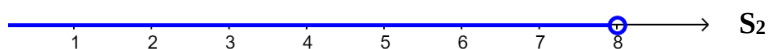
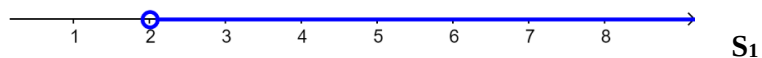


Ejemplos:

1) $|x-5| < 3 \xLeftrightarrow[\text{valor ab.}]{\text{prop.(d)}} -3 < x-5 < 3 \xLeftrightarrow[\text{desig.}]{\text{prop.(a)}} 5-3 < x < 5+3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

$2 < x < 8 \Rightarrow \underbrace{2 < x}_{S_1} \overset{y}{\text{}} \underbrace{x < 8}_{S_2} \quad ("y" \Rightarrow S_1 \cap S_2)$

$S_1 \cap S_2 = \{ x \in \mathbb{R} / 2 < x \} \cap \{ x \in \mathbb{R} / x < 8 \} = (2; 8)$



Rta: $S = \{ x \in \mathbb{R} / 2 < x < 8 \} \Rightarrow S = (2; 8)$

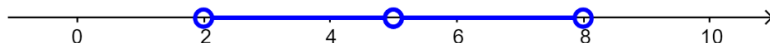
2) $|x-5| > 3 \xLeftrightarrow[\text{valor ab.}]{\text{prop.(e)}} x-5 < -3 \text{ ó } x-5 > 3 \Leftrightarrow \underbrace{x < 2}_{S_1} \overset{0}{\text{}} \underbrace{x > 8}_{S_2} \quad ("ó" \Rightarrow S_1 \cup S_2)$

Rta: $S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x > 8\}$
 $= (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$



3) $0 < |x - 5| < 3 \Leftrightarrow \underbrace{0 < |x - 5|}_{S_1} \cdot \underbrace{|x - 5| < 3}_{S_2} \quad (\text{conjunto solución} \rightarrow S_1 \cap S_2)$

Rta: $S = S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 5\} \cap (2; 8) = (2; 8) - \{5\}$



ACTIVIDAD:

Ejercicio 4:

Resolver y unir cada inecuación en la primer columna con su conjunto solución en la segunda columna. Graficar el conjunto solución.

a) $|x - 5| < 3$

b) $|5 - x| < 0$

c) $|x - 7| < 2$

d) $|x - 7| \geq 2$

e) $2 < |4 - 2x| < 6$

f) $0 < |4 - 2x| < 6$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} / 5 < x < 9\}$

$S_2 = (-1; 1) \cup (3; 5)$

$S_3 = (-1; 5) - \{2\}$

$S_4 = \emptyset$

$S_5 = \mathbb{R} - \{0\}$

$S_6 = \mathbb{R}$

$S_7 = \{0\}$

$S_8 = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x \geq 9\}$

$S_9 = \{x \in \mathbb{R} / x > 2,5\}$

$S_{10} = [1,5; +\infty)$

$S_{11} = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 2\}$

$S_{12} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$

Ejercicio 5:

Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones, y representarlo en el eje real:

a) $|2 - 3x| > 3$

b) $|x + 3| > 0$

c) $|2 - 5x| \geq 0$

d) $|4x - 1| \geq 2$

e) $|2x - 2| \leq 5$

f) $|2 - 5x| < 3$

g) $|x + 4| \leq 7$

h) $|2x - 3| \leq 3$

i) $|x + 4| < 2$

j) $|x + 2| < 0$

k) $|2 - 3x| \leq 0$

UNIDAD N° 4: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

ECUACIÓN LINEAL EN DOS INCÓGNITAS

Se llama **ecuación lineal en las incógnitas x e y** si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la siguiente expresión:

$$ax + by + c = 0 \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

Analizando la ecuación $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, se puede concluir que la clasificación según las soluciones de la misma es la siguiente manera:

- a) nunca es compatible determinada ya que no es posible encontrar única solución.
- b) incompatible: cuando $a = 0, b = 0$ y $c \neq 0$
 $0 \cdot x + 0 \cdot y = -c$ no se verifica para ningún par de valores $x, y \in \mathbb{R}$
- c) indeterminada: el resto de los casos

Ejemplos:

a) $3x + 2y = 1 \Rightarrow x = \frac{1-2y}{3}, y \in \mathbb{R}$

Dando distintos valores a y , podemos encontrar valores de x para los cuales el par (x, y) es solución de la ecuación. Por ejemplo, si $y = 0$ resulta $x = \frac{1-2 \cdot 0}{3} = \frac{1}{3}$. La solución $(\frac{1}{3}, 0)$ es solución de la ecuación $3x + 2y = 1$ pues se verifica que $3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 = 1$. De esta manera podemos encontrar infinitas soluciones de la ecuación.

- b) $0x + 0y = 0$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \mathbb{R}$
- c) $0x - 0y = 5$ no se verifica para ningún $x \in \mathbb{R}$

Generalizando, se dice que una **ecuación es lineal** en las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la siguiente expresión:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + b = 0 \quad \text{con } a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** en las incógnitas x e y a la siguiente expresión:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}, \text{ con } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

Se llama ***solución de un sistema de ecuaciones*** a los valores que, atribuidos a las incógnitas, verifican todas las ecuaciones del sistema.

Resolver el sistema es hallar, si existen, la o las soluciones comunes a todas las ecuaciones del mismo. Es decir, hallar el ***conjunto solución*** del sistema (S)

Son tres las situaciones que se pueden presentar:

- a) Que el sistema tenga solución única. Se llama sistema compatible determinado.
- b) Que el sistema tenga infinitas soluciones. Se llama sistema compatible indeterminado.
- c) Que el sistema no tenga solución. Se llama sistema incompatible

Ejemplos:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

Para resolver este sistema por ***el método de sustitución***, hay que:

- despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones
- reemplazarla en la otra ecuación
- resulta una ecuación en una sola incógnita, se resuelve
- encontrar el valor de la otra incógnita

Despejamos y de la primera ecuación: $y = -2 - x$ y lo reemplazamos en la segunda:

$$2x + (-2 - x) = -1 \Rightarrow 2x - x = -1 + 2 \Rightarrow x = 1$$

Luego: $y = -2 - 1 = -3$

La solución del sistema es: $x = 1, y = -3$

$$S = \{(1, -3)\}$$

Este sistema es compatible determinado.

¿Hay otros métodos para resolver este tipo de sistemas? ¿Cuáles son?

b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

Despejamos x de la primera ecuación: $x = 3 + y$ y lo reemplazamos en la segunda:

$$2 \cdot (3 + y) - 2y = 6 \Rightarrow 6 + 2y - 2y = 6 \Rightarrow 2y - 2y = 6 - 6 \Rightarrow 0y = 0$$

Vemos que cualquier $y \in \mathbb{R}$ verifica esta ecuación, luego el sistema tiene infinitas soluciones, que pueden escribirse como: $x = 3 + y, y \in \mathbb{R}$

$$S = \{(3 + y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

Este sistema es compatible indeterminado.

$$c) \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación: $y = 2 - 2x$ y lo reemplazamos en la segunda:

$$x + \frac{1}{2}(2 - 2x) = 3$$

$$x + 1 - x = 3$$

$$x - x = 3 - 1$$

$$0x = 2$$

Vemos que no existe $x \in \mathbb{R}$ que verifique esta ecuación, luego el sistema no tiene solución.

Este sistema es incompatible.

ACTIVIDADES:

Ejercicio 1:

Analizar si alguno de los pares siguientes $(-1,1)$; $(2, 0)$; $(0,0)$; $(1, 1)$ es solución del sistema:

$$\begin{cases} y + x - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2:

Dado el sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$

Analizar si alguno de los pares siguientes es solución del sistema: $(4,-1)$; $(3,2)$; $(1/2, 1/2)$, $(-9,-6)$

¿Puedes decir cuántas soluciones tiene este sistema, sin resolverlo? ¿Por qué?

Ejercicio 3:

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Clasificarlos de acuerdo a su conjunto solución.

a) $\begin{cases} y - 2x = -1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x - 6y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 4y - 4x = -20 \end{cases}$

$$c) \begin{cases} x + 5y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 7x + 11y = 22 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Ejercicio 4:

Para el sistema $\begin{cases} \alpha x - y = -1 \\ x + \alpha y = 2 \end{cases}$, encontrar, si existe, el valor del número real α tal que el $(0,1)$ sea solución.

Ejercicio 5:

En un monedero hay billetes de \$10 y de \$50, en total hay 20 billetes. En total hay \$360.

¿Cuántos billetes de cada valor hay?

Alguno de los siguientes sistemas de ecuaciones permite resolver este problema.

Encuentra cuál es, indica que representan “x” e “y” y resuelve el mismo.

$$a) \begin{cases} x + y = 360 \\ 10x + 50y = 20 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 50y = 360 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 10x = 20 \\ 50y = 360 \end{cases}$$

UNIDAD N° 5: LOGARITMO. ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

LOGARITMO

Dados a y b , números reales positivos con b distinto de 1, al número x que verifique la siguiente ecuación:

$$b^x = a$$

se lo llama **logaritmo de a en base b** .

Lo simbolizaremos: $x = \log_b a$

Lo simbolizaremos:

$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

Ejemplos:

a) $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$

b) $\log_3(1/9) = -2$ porque $3^{-2} = 1/9$

c) $2^x = 32 \Leftrightarrow x = \log_2 32 \Rightarrow x = 5$

d) $\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 \Rightarrow x = 8$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 1:

Calcula los siguientes logaritmos, cuando sea posible. Verifica los resultados aplicando la definición.

a) $\log_4 64 =$ b) $\log_2 (-4) =$ c) $\log_2 (4) =$

d) $\log_2 8 =$ e) $\log_6 1 =$ f) $\log_4 0,5 =$

g) $\log_{10} 0,01 =$ h) $\log_7 7 =$ i) $\log_{25} 1 =$

j) $\log_{0,5} 0,125 =$ k) $\log_{0,5} 4 =$ l) $\log_b b^3 =$

Ejercicio 2:

Completar las siguientes expresiones teniendo en cuenta que b es un número real positivo distinto de uno.

a) $\log_b b =$ c) $\log_b 1/b =$

b) $\log_b 1 =$ d) $\log_b b^2 =$

Ejercicio 3:

Unir con flechas según corresponda

$$\log_2 a < 0$$

$$a > 1$$

$$\log_2 a = 0$$

$$0 < a < 1$$

$$\log_2 a > 0$$

$$a = 2$$

$$\log_2 a = 1$$

$$a = 1$$

Si la base del logaritmo es 10, se llama **logaritmo decimal** y se suele escribir *log*, sin indicar la base. Si la base es el número *e* ($e = 2,718 \dots$), se denomina **logaritmo natural** o logaritmo neperiano, y se escribe *ln*.

Tanto los logaritmos naturales como los decimales aparecen en las calculadoras científicas.

Ejercicio 4:

Utilizar las teclas log y ln de la calculadora científica para obtener los siguientes logaritmos (redondear con tres decimales):

- | | |
|------------------|-----------------|
| a) $\log 9,8 =$ | e) $\ln 2,5 =$ |
| b) $\log 98 =$ | f) $\ln 25 =$ |
| c) $\log 980 =$ | g) $\ln 250 =$ |
| d) $\log 9800 =$ | h) $\ln 2500 =$ |

Propiedades de los logaritmos:

Sean a y b números reales positivos.

Los logaritmos verifican las siguientes propiedades:

$$1) \log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$$

$$2) \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$$

$$3) \log_c(a^b) = b \log_c(a)$$

$$4) \log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$$

Esta propiedad, llamada propiedad de cambio de base, permite transformar un logaritmo dado en cierta base en otro logaritmo en base que convenga, por ejemplo, aquellas que aparecen en las calculadoras científicas.

ACTIVIDADES:

Ejercicio 5:

Resolver aplicando las propiedades de los logaritmos sin usar calculadora:

$$a) \log_2(8.32) = \quad b) \log_3\left(\frac{27 \cdot 9}{81}\right) = \quad c) \log_4(64^6) =$$

Ejercicio 6:

Realizar un cambio de base conveniente para obtener los siguientes logaritmos con la calculadora. Redondear a milésimos.

$$a) \log_2(18) = \quad b) \log_3(100) = \quad c) \log_{0,1}(25) =$$

Ejercicio 7:

Usando convenientemente la propiedad de cambio de base calcular $\log_2(x)$ y $\log_4(x)$ sabiendo que $\log_8(x) = 1,2436$

Ejercicio 8:

Escribir como el logaritmo de una única expresión:

a) $3 \cdot \log_a(x \cdot y^2) - \log_a(5 \cdot x^2) + \log_a(x + 3y) + \log_a(5x - 3y) =$

b) $1 + \log_4\left(\frac{2 \cdot x^2}{x^2 - 1}\right) - \log_4\left(\frac{x^3}{x^4 - 1}\right) + \frac{1}{2} \log_4(x) =$

Ejercicio 9:

Sabiendo que $m=2$, calcular $\log\left[\frac{m \cdot m^{0,5}}{m^{\left(\frac{3}{4}\right)}}\right]$

Ejercicio 10:

Calcular aplicando adecuadamente las propiedades de los logaritmos

a) $\log_4(3 \cdot 4^2) + \log_4\left(\frac{4}{3}\right) - \log_4(64) =$ c) $\log_5(100) + \log_5\left(\frac{5}{4}\right) + 2 =$

b) $\log_3\left(\frac{4}{3}\right) - \log_3\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \log_3\left(\frac{3}{2}\right) =$ d) $\log_a\left(\frac{b}{a^2}\right) - \log_a\left(\frac{1}{a \cdot b}\right) =$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Se llaman ecuaciones logarítmicas a las ecuaciones que contienen expresiones de la forma

$$\log_a x \quad , \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Para resolverlas se utilizan las propiedades de logaritmos.

Ejemplos:

1) $\log_3(4x - 7) = 2$ Pasando a la forma exponencial

$$4x - 7 = 3^2$$

$$4x - 7 = 9$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

2) $2 \log_7(x) = \log_7(9)$

$$\log_7(x^2) = \log_7(9)$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Como el logaritmo es un número negativo no está definido, $x = -3$ es una raíz extraña y se descarta.

Observación: Es importante tener cuidado al resolver ecuaciones logarítmicas, asegurándose de verificar cada presunta solución en la ecuación original y descartar las raíces que sean extrañas.

ACTIVIDAD:

Ejercicio 11:

Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_4(x - 4) = 2$

h) $2 \log(x) - \log(x^2 - 6) = 1$

b) $\log_3 x = 3 - 2 \cdot \log_3 x$

i) $\log(5x + 4) - \log 2 = \frac{1}{2} \log(x + 4)$

c) $\log_8(x + 2) + \log_8 x = 1$

j) $\log(2x - 1) - \log x = \log(2x + 2)$

d) $\log_{10}(x + 1) = 1 - \log_{10}(x - 2)$

k) $9 \log^2 x + 1 = 10 \log x$

e) $\log_3(9x^2) - \log_3 x = 0$

l) $\log^2 x - 4 = 0$

f) $\log_4(16x^2) + \log_4 x - 1 = 0$

g) $\log(x + 6) = \log(2x - 1)$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones que contienen términos de la forma a^x con a positivo y distinto de uno se conocen como ecuaciones exponenciales.

Pueden resolverse aplicando en forma adecuada las propiedades de la potenciación y de los logaritmos.

Ejemplos:

1) $2^{x+1} = 64 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^6 \Rightarrow x + 1 = 6 \Rightarrow x = 5$

2) $e^{-x^2} = (e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$

$$e^{-x^2} = e^{2x} \cdot e^{-3}$$

$$e^{-x^2} = e^{2x-3}$$

$$-x^2 = 2x - 3$$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$$

Las soluciones son $x_1 = -3 \vee x_2 = 1$

ACTIVIDAD:

Ejercicio 12:

Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{5-x} = 125$

b) $2^{x^2} = 4^x$

c) $81 = 3^{x+1}$

d) $9^{4x+1} = 1$

e) $\frac{1}{16} - 2^{x+1} = 0$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-1} = 1$

g) $4^{2x+1} = (0,5)^{3x+5}$

h) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

i) $e^x - 5 \cdot e^{-x} + 4 \cdot e^{-3x} = 0$

UNIDAD N° 6: POLINOMIOS Y EXPRESIONES RACIONALES

POLINOMIOS

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ números reales, x una variable. Llamaremos expresión polinomial o polinomio en una variable con coeficientes reales, a toda expresión del tipo

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

Utilizando el símbolo de sumatoria, puede escribirse de la siguiente manera:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} \cdot x^{n-i}$$

El número a_i , $i = 1 \dots n$ se llama *coeficiente de grado i*, el número $a_n \neq 0$ se llama *coeficiente principal* y al número a_0 se lo llama *término independiente*.

Ejemplos:

- a) $p(x) = 3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 - 2,4 \cdot x^1$
- b) $q(x) = 5$
- c) $r(x) = 0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 2 \cdot x^4$
- d) $s(x) = 0 + 0 \cdot x^1 - 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 - 2 \cdot x^4 + 1 \cdot x^5$

En general no se escriben los términos con coeficientes nulos, tampoco el coeficiente igual a

1. Los polinomios de los ejemplos se escriben:

- a) $p(x) = 3 + x^3 - 2,4 \cdot x$
- b) $q(x) = 5$
- c) $r(x) = 2 \cdot x^4$
- d) $s(x) = -2 \cdot x^2 - 2 \cdot x^4 + 1 \cdot x^5$

Un polinomio está **ordenado** si se escriben los términos ordenados según las potencias decrecientes de la variable x , y está **completo** cuando se escriben todas las potencias de x .

El polinomio p del ejemplo está incompleto, para completarlo se agregan las potencias de x faltantes con coeficientes ceros, obteniendo $p(x) = x^3 + 0x^2 - 2,4 \cdot x + 0$

En lo anterior se usó la letra x para simbolizar la variable, también se pueden usar otras letras, teniendo cuidado de indicar cuál es. Dar ejemplos.

Se llama polinomio nulo al polinomio que tiene todos los coeficientes nulos, se escribe

$$p(x) = 0$$

Un **monomio** es un polinomio de un solo término. Un **binomio** es un polinomio de dos términos, un **trinomio** es un polinomio de tres términos, y uno de cuatro términos es un **cuatrinomio**.

Se llama **grado de un polinomio** en una sola variable al mayor exponente de los términos de coeficientes no nulos. El polinomio nulo carece de grado.

Si el polinomio se reduce a un número, $p(x) = a_0$, con $a_0 \neq 0$, se llama polinomio constante y tiene grado cero.

Si el polinomio tiene grado 1 se denomina polinomio lineal o de primer grado.

Si el polinomio tiene grado 2 se denomina polinomio cuadrático o de segundo grado.

Si el polinomio tiene grado 3 se denomina polinomio cúbico o de tercer grado.

Dos **polinomios** son **iguales** si y sólo tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales. En símbolos: Sean $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, y

$$q(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x + b_0 \quad \text{entonces}$$

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow m = n \text{ y } a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_n = b_m$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Dados los polinomios $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ y

$q(x) = b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_1 \cdot x^1 + b_0$, definiremos algunas de las operaciones entre polinomios.

Suma:

Se puede suponer que ambos polinomios tienen el mismo grado, pues de no ser así, basta con completar con coeficientes cero los términos faltantes. En ese caso, la suma de polinomios se define:

$p(x) + q(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x^1 + (a_0 + b_0)$

El grado del polinomio suma es igual o menor al mayor de los grados de los polinomios sumandos, o bien carece de grado.

Ejercicio: Enunciar las propiedades de la suma de polinomios

Para cada polinomio existe un opuesto (inverso aditivo). *Dos polinomios son opuestos* cuando siendo del mismo grado, los coeficientes de los monomios semejantes son opuestos entre sí.

Resta:

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$$

Producto

Ejemplo:

Dados los polinomios $p(x) = 2x^3 - x + 2$ y $q(x) = 3x + 1$, el producto entre ellos es:

$$p(x).q(x) = (2x^3 - x + 2).(3x + 1), \text{ aplicando la propiedad distributiva}$$

$$p(x).q(x) = 2x^3(3x + 1) - x(3x + 1) + 2.(3x + 1), \text{ aplicando la propiedad distributiva}$$

$$p(x).q(x) = 2x^3.3x + 2x^3.1 - x.3x + x.1 + 2.3x + 2.1$$

$$\text{Operando: } p(x).q(x) = 2.3 x^3.x + 2.1 x^3 - 3 x.x + 1.x + 2.3 x + 2.1$$

$$p(x).q(x) = 6 x^4 + 2 x^3 - 3 x^2 + 1.x + 6 x + 2$$

$$\text{Resulta: } p(x).q(x) = 6 x^4 + 2 x^3 - 3 x^2 + 7.x + 2$$

Se define, entonces, el **producto de polinomios** de la siguiente manera: Dados los polinomios

$$p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \dots + a_1.x + a_0, \text{ y}$$

$$q(x) = b_m.x^m + b_{m-1}.x^{m-1} + \dots + b_1.x + b_0,$$

El polinomio que se indica $p(x).q(x)$ es el polinomio producto siguiente:

$p(x).q(x) = a_n.b_m.x^{n+m} + \dots + (a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0)x^2 + (a_1.b_0 + a_0.b_1)x + (a_0.b_0)$

El producto de dos polinomios es otro polinomio cuyo grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores. Se indica: **$gr(p.q) = gr(p) + gr(q)$** .

Ejercicio: Enunciar las propiedades de la multiplicación de polinomios.

CASOS ESPECIALES DE PRODUCTOS DE POLINOMIOS: Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$(x - a).(x + a) = x^2 - a^2 \quad \text{Este polinomio se llama } \textit{diferencia de cuadrados}$$

$$(x + a)^2 = (x + a).(x + a) = x^2 + 2ax + a^2 \quad \text{Este polinomio se llama } \textit{trinomio cuadrado perfecto}$$

División:

En este curso sólo veremos el caso de la división entre dos polinomios p y q , siendo $gr(p) \geq 1$ y $q(x) = x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

Sean $p(x) = x^3 + x^2 - 3$ y $q(x) = x - 2$

Para realizar la división $p(x):q(x)$ utilizaremos un procedimiento denominado “Regla de Ruffini”. Primero deberemos escribir al polinomio p, ordenado y completo. Luego, listamos sus coeficientes y escribimos el valor de α una fila más abajo, a la izquierda de los coeficientes, de la siguiente manera:

$$p(x) = x^3 + x^2 + 0x - 3$$

$$\alpha = 2$$

	1	1	0	-3
2				

Bajamos el primer coeficiente debajo de la línea y multiplicamos este valor por α . Luego escribimos el resultado debajo del segundo coeficiente:

	1	1	0	-3
2		2		
	1			

Sumamos el segundo coeficiente con este valor y colocamos el resultado debajo de la línea.

Volvemos a repetir el procedimiento anterior:

	1	1	0	-3
2		+2		
	1	3		

	1	1	0	-3
2		+2	+6	
	1	3	6	9

Los números de la última fila serán los coeficientes del polinomio cociente (que tendrá un grado menos que el polinomio p) y el resto de la división:

$$c(x) = x^2 + 3x + 6$$

$$r(x) = 9$$

Observación: Verificar con el ejemplo anterior la siguiente propiedad:

$$p(x) = q(x).c(x) + r(x)$$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 1:

Realizar las siguientes operaciones:

- a) $(x + 3) \cdot (x + 4)$
- b) $(2x - 4) \cdot (2x + 4)$
- c) $(2x - 3) \cdot (4x + 6)$
- d) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}x + \frac{12}{6}\right)$
- e) $(x + 0.6) \cdot (x + 0.3)$

Ejercicio 2:

Realizar las siguientes operaciones sin usar la propiedad distributiva:

- | | |
|------------------------------|-----------------|
| a) $(x + 4) \cdot (x + 4)$ | e) $(x + 4)^2$ |
| b) $(x - 4) \cdot (x - 4)$ | f) $(x - 4)^2$ |
| c) $(x - 4) \cdot (x + 4)$ | g) $(-x + 4)^2$ |
| d) $(-x - 4) \cdot (-x + 4)$ | h) $(-x - 4)^2$ |

Ejercicio 3:

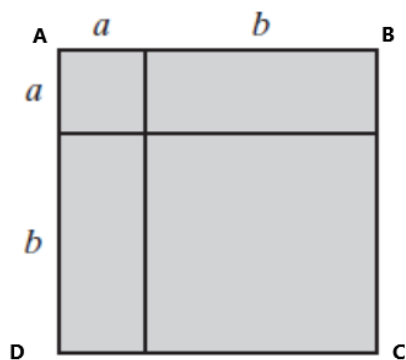
i) Completar de modo que se trate de un trinomio cuadrado perfecto y luego escribir las expresiones como un binomio al cuadrado:

- a) $x^2 + 2 \cdot x + \dots$ b) $\dots - 4x + 1$ c) $2x^2 - \dots + 2$

ii) Escribir las diferencias como un producto de la forma $(a + b) \cdot (a - b)$:

- a) $x^2 - 9$ b) $16 - x^2$ c) $x^4 - 25$ d) $25 - 4x^2$ e) $9x^2 - \frac{1}{4}$

Ejercicio 4: Considerar el cuadrado ABCD dado en la siguiente figura. Sean a y b números reales positivos



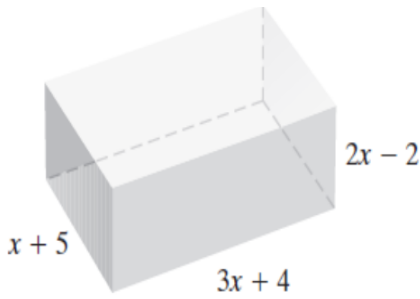
a) Escribir una expresión para la longitud de cada lado de la figura.

b) Expresar el área de este cuadrado como el cuadrado de un binomio.

c) Determinar el área del cuadrado con la suma de las áreas de los cuatro rectángulos en que está dividido el cuadrado ABCD

Ejercicio 5:

En la figura se observa una caja con forma de paralelepípedo y las longitudes de sus lados.



Ejercicio 6:

Realizar la división entre p y q:

a) $p(x) = x^3 - 1$, $q(x) = x - 1$

b) $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5$, $q(x) = x + 1$

c) $p(x) = 4x^2 + 2x$, $q(x) = x + 2$

Diremos que p es divisible por q, si el resto de la división entre p y q es el polinomio nulo.

Decidir, en cada caso, si p es divisible por q. Verificar la propiedad: $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$

a) Escribir un polinomio que permita calcular el área de la base de la caja conocido el valor de x

b) El volumen de la caja se encuentra con la multiplicación del área de la base por la altura. Escribir un polinomio que represente el volumen de dicha caja.

c) Calcular el volumen de la caja si x es igual a 4 cm. Dar las dimensiones de la misma

d) Calcular el volumen de la caja si x es igual a 1 cm. Dar las dimensiones de la misma

RAICES DE UN POLINOMIO

Se dice que un número α es una raíz, o un cero del polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$

Encontrar una raíz de un polinomio es encontrar un valor de la variable x tal que $p(x) = 0$

La expresión $p(x) = 0$ se llama **ecuación algebraica**. Los valores de la variable que satisfacen esta ecuación se llaman soluciones de la ecuación. Luego encontrar las raíces de un polinomio $p(x)$ es encontrar las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$

A continuación, se analizan algunas cuestiones acerca de las raíces de un polinomio, a saber, ¿todos los polinomios las tienen? ¿Cuántas? ¿Cómo calcularlas? Algunos resultados con respecto a estas preguntas:

- Todo polinomio de grado mayor o igual a uno con coeficientes reales tiene al menos una raíz, que puede ser real o compleja (Teorema Fundamental del Álgebra). Diremos que una raíz α es compleja cuando no es solución real de $p(x) = 0$, por ser una raíz de índice par y radicando negativo. Por ejemplo, $x^2 = -4$ no tiene solución real dado que al despejar x, obtenemos $x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
- Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces (reales o complejas, iguales o distintas).

- Los polinomios $p(x)$ y $q(x) = k \cdot p(x)$ con $k \neq 0$ tienen las mismas raíces
- $p(x) \cdot q(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) \equiv 0 \vee q(x) \equiv 0$
- El polinomio nulo es múltiplo de cualquier polinomio, porque $0 = p(x) \cdot 0$
- Todo polinomio es múltiplo de sí mismo $p(x) = 1 \cdot p(x)$
- Todo polinomio es divisible por un polinomio de grado cero.

FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

Teorema de la descomposición factorial

Todo polinomio $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$ ($n > 0$) admite una única descomposición en factores de la forma $p(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m}$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ son m raíces distintas del polinomio (reales o complejas), $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ son sus respectivas multiplicidades y $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Ejemplos:

1) El polinomio $p(x) = x^3 - 4x$ puede factorizarse sacando primero factor común " x " y luego aplicando la propiedad diferencia de cuadrados:

$$p(x) = x(x^2 - 4) \Rightarrow q(x) = x(x - 2)(x + 2)$$

Luego, las raíces de p son $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = -2$

2) El polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto por lo que su forma factorizada es $p(x) = (x + 1)^2$.

Luego, las raíces de p es $\alpha = 1$, con multiplicidad 2.

Nota:

Hay que tener cuidado de no confundir la factorización de un polinomio con el empleo de la factorización como método para resolver una ecuación.

Por ejemplo, si nos piden factorizar $x^2 - 3x + 2$, procedemos de la siguiente forma.

Encontramos las raíces, 1 y 2 y escribimos la factorización: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

Pero si tenemos que resolver la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, planteamos

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

Escribimos $S = \{1, 2\}$

Teorema:

α es raíz del polinomio $p(x)$, si p es divisible por $(x - \alpha)$.

Ejemplo:

Si $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ podemos probar que es divisible por $x - 2$. En efecto:

	1	-2	3	-6
2		2	0	6
	1	0	3	0

Resulta $c(x) = x^2 + 0x + 3$ y $r(x) = 0$. Como el resto es el polinomio nulo resulta p divisible por $x - 2$. Entonces $\alpha = 2$ es una raíz de p y puede comprobarse que $p(2) = 0$

Luego, $p(x) = (x^2 + 3)(x - 2)$

Si quisiéramos seguir factorizando p , deberíamos encontrar las raíces al polinomio $c(x)$ pero en este caso, no encontramos raíces reales dado que:

$$x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

Dejamos el polinomio expresado como $p(x) = (x^2 + 3)(x - 2)$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 7:

a) Indicar en cada caso el grado del polinomio y las raíces con su multiplicidad:

i) $x^3(x - 1)^2(x + 1)^3$ ii) $(2x + 1)^3(x - \sqrt{3})^2$ iii) $2(y + 2)^2(\frac{3}{2} - y)(1 + y)$

b) Dar el coeficiente principal y el término independiente de cada uno de los polinomios del ítem a)

Ejercicio 8:

Dado el polinomio $P(x) = 2x^2 + 7x + 3$, encontrar pares de binomios $A(x)$ y $B(x)$ que verifiquen la siguiente igualdad. $P(x) = A(x) \cdot B(x)$

¿cuántas pares diferentes de binomios se podrán encontrar?

Ejercicio 9:

Calcular las raíces reales, si existen, de los siguientes polinomios y factorizar los mismos

a) $p(x) = 2x^2 + 8x + 8$

e) $p(x) = x^3 - 1$

b) $p(x) = 2x^3 + 8x^2 + 8x$

f) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

c) $p(x) = 3x^2 - 9x - 12$

g) $p(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x$

d) $p(x) = x^4 - 2x^2$

h) $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

EXPRESIONES RACIONALES

Una **expresión racional** es una expresión de la forma p/q donde p y q son polinomios y $p \neq 0$

Son expresiones racionales: $\frac{3}{7}$, $\frac{x+5}{5}$, $\frac{x^2-3x}{x+1}$, $\frac{a}{4+a^2}$,

En una expresión racional, el denominador debe ser distinto de cero.

Por ejemplo, en la expresión $\frac{x+5}{x}$ el valor de x no puede ser 0. Diremos que la expresión racional está definida para los números reales diferentes a 0

En la expresión $\frac{x^2+5}{x-4}$ el valor de x no puede ser 4, ya que el denominador asumiría el valor cero.

En la expresión $\frac{x+5}{x^2-4}$, ¿cuáles son los valores de x para los cuales la expresión racional no está definida?

Observación:

Cuando una expresión racional tiene una variable en el denominador, diremos que está definida para el conjunto de números reales que no hacen cero el denominador.

Una manera de encontrar el valor o los valores de la variable que se excluyen consiste en igualar el denominador a cero y después despejar a la variable de la ecuación resultante.

Ejemplo:

Encontrar el o los valores de la variable para los que está definida la siguiente expresión

racional: $\frac{x+1}{2x+5}$

$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \quad \text{Luego, la expresión dada está definida } \forall x \neq -\frac{5}{2}$$

ACTIVIDAD:

Ejercicio 10:

Encontrar el o los valores de la variable para los que está definida cada una de las siguientes expresiones racionales:

a) $\frac{1}{x+5}$

b) $\frac{x+3}{x^2-5}$

c) $\frac{x+2}{(x+1)^2}$

d) $\frac{x}{(x+1)^2-5}$

$$e) \frac{x-3}{x^2+5}$$

$$f) \frac{x+6}{x+15}$$

$$g) \frac{3}{x^2+4x-5}$$

$$h) \frac{x-7}{x}$$

Una expresión racional está **simplificada** o **reducida a su mínima expresión** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1.

Ejemplo:

$$a) \frac{x \cdot (x-1)}{x} = x - 1, \text{ la igualdad es válida para todo } x \neq 0$$

$$b) \frac{x^2-4x+2}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}, \text{ la igualdad es válida para todo } x \neq 2 \text{ y } x \neq -2.$$

ACTIVIDADES:

Ejercicio 11:

En una evaluación se pidió llevar a la mínima las expresiones dadas. Las siguientes son las respuestas de cuatro estudiantes:

Valentín: $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{2}{2} = \frac{x}{2} + 1$

Catalina: $\frac{x+2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$

Harry: $\frac{x+2}{2} = \frac{x+1}{1} = x + 1$

Lautaro: $\frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$

Analiza si los procedimientos realizados por cada uno de ellos son correctos

Ejercicio 12:

Encontrar el o los valores de la variable para los cuales cada una de las expresiones está definida y simplificar. La expresión simplificada, ¿es equivalente a la original para todo valor de la variable?

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$\frac{x^2-16}{x-4}$$

$$\frac{x^2+3x+28}{3x^2-10x-8}$$

$$\frac{3x-5}{5-3x}$$

Ejercicio 13:

Realizar las siguientes operaciones

a) $(x-3) \cdot \frac{5}{(x^2-3x)}$

b) $\frac{(x-2)^2}{3x^2} \cdot \frac{6x}{(x^2-4)}$

c) $\frac{(2x-1)}{(3x-2)} \cdot \frac{(3x+2)}{(4-8x)}$

d) $\frac{(x^2-y^2)}{(x+y)} \cdot \frac{(x+2x)}{(2x^2-xy-y^2)}$

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Conjunto de los números naturales	$\mathbb{N}$
Conjunto de los números naturales incluido el cero	$\mathbb{N}_0$
Conjunto de los números enteros	$\mathbb{Z}$
Conjunto de los números racionales	$\mathbb{Q}$
Conjunto de los números irracionales	$\mathbb{I}$
Conjunto de los números reales	$\mathbb{R}$
Conjunto vacío	$\emptyset$
Unión	$\cup$
Intersección	$\cap$
Subconjunto de (incluido en)	$\subseteq$
Subconjunto propio de	$\subset$
Pertenece	$\in$
No pertenece	$\notin$
Y	$\wedge$
O	$\vee$
Existe	$\exists$
No existe	$\nexists$
Para todo	$\forall$
Menor	$<$
Mayor	$>$
Menor o igual	$\leq$
Mayor o igual	$\geq$
Distinto	$\neq$
Entonces (implica)	$\Rightarrow$
Sí y sólo sí	$\Leftrightarrow$
Por lo tanto	$\therefore$

LENGUAJE MATEMÁTICO

Cuando hablamos de lenguaje matemático nos referimos, por un lado, a la simbología y, por otro, a la estructura y presentación de los contenidos matemáticos. A continuación, se presenta un breve recorrido sobre algunos términos que necesitaremos para comprender textos académicos de matemática, como los que utilizaremos a lo largo de este curso y en las asignaturas Matemática I y Matemática II, comunes a todas las carreras de la Facultad.

Lenguaje coloquial y lenguaje simbólico:

El lenguaje coloquial se utiliza para expresar ideas y conceptos en forma escrita u oral usando el lenguaje ordinario. El lenguaje simbólico se utiliza para expresar con símbolos en forma precisa los conceptos dados en lenguaje coloquial. Este lenguaje es de utilidad para expresar generalizaciones, fórmulas o propiedades; simplificar o acortar expresiones, etc. Muchos problemas se pueden resolver traduciendo los enunciados dados en forma coloquial al lenguaje simbólico.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
Un número	x
El doble de un número	$2x$
El anterior de un número	$x - 1$
Cualquier número mayor que 4	$x > 4$

Proposición:

Oración declarativa que es verdadera o falsa (pero no ambas).

Ejemplos de proposiciones:

- 25 es un número par.
- Hoy es un día soleado.
- 21 es un múltiplo de 3 y de 7.
- 5 es un número primo.

Ejemplos de oraciones que no son proposiciones:

- ¡Qué linda tarde!
- Hace los ejercicios.
- ¿A qué hora te dormiste anoche?

Una proposición abierta es una frase declarativa que:

- i) contiene una o más variables (representadas con letras)
- ii) no es una proposición, pero se convierte en una proposición cuando se reemplazan las variables que aparecen en ella por ciertas opciones permisibles.

Ejemplos de proposiciones abiertas:

- El número $y + 2$ es impar.
Esta proposición es verdadera si, por ejemplo, se reemplaza $y = 1$ pues $1 + 2 = 3$ es un número impar. Sin embargo, es falsa si se reemplaza $y = 2$ pues $2 + 2 = 4$ es un número par.
- $x \geq 0$
Esta proposición es verdadera si se reemplaza el valor de x por cualquier número que sea positivo o cero y es falsa si se sustituye x por un número negativo.

Muchas proposiciones matemáticas se componen de un cuantificador

($\exists$: *existe*, $\forall$: *para todo*) seguido de una proposición abierta. Por ejemplo:

$$\exists x \in \mathbb{Z} / x > 3$$

En lenguaje coloquial se lee: existe un número entero que es mayor a 3.

$$x \geq 1, \forall x \in \mathbb{N}$$

En lenguaje coloquial se lee: todo número natural es mayor o igual que 1.

Definición:

Enunciado por medio del cual se exponen, de manera clara y precisa, las características distintivas de un objeto matemático.

Ejemplo: “Un triángulo es un polígono de tres lados”

Sin embargo, en matemática hay ciertos conceptos, llamados conceptos primitivos, que no tienen una definición y se acepta la idea que tenemos sobre ellos (por ejemplo: punto, recta, conjunto).

Teorema:

Un teorema es una proposición verdadera que debe demostrarse. Partiendo de algunos supuestos (hipótesis), se afirma una conclusión (tesis) no evidente por sí misma.

Ejemplo:

Teorema: La suma de dos números pares es par.

Hipótesis: se parte de la existencia de dos números pares cualesquiera, para lo cual se puede recurrir al lenguaje simbólico y denominarlos con las letras a y b .

H: a y b son dos números pares ($a = 2n, b = 2m$ siendo n y m números naturales)

Tesis: la conclusión a la que se llega es que la suma de estos números es par. En símbolos:

T: $a + b$ es par ($a + b = 2k$, siendo k un número natural)

Demostración:

$a + b = 2n + 2m = 2(\underbrace{n + m}) = 2k$ siendo $k = n + m$ un número natural.

Corolario:

Un **corolario** es un resultado que se deduce con facilidad de un teorema. Formalmente, es un teorema en sí mismo.

Axioma:

Los axiomas son proposiciones siempre verdaderas que admitimos sin demostración. Se suelen utilizar como principios sobre los que se construye una teoría y de los cuales se deducen los teoremas.

Ejemplos:

- Todo número natural tiene un sucesor.
- Dados dos puntos, se puede trazar una recta que los une.
- Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.