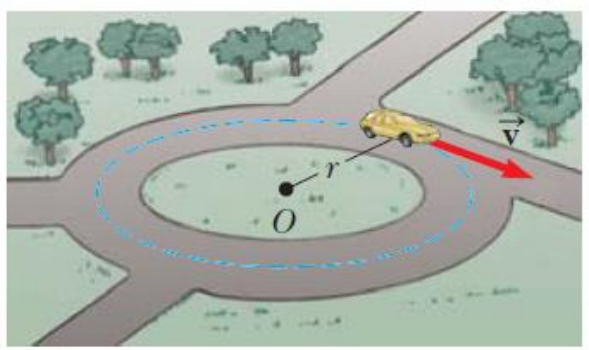
Física I

Cinemática circular

- **Movimiento circular uniforme:**



Analicemos un objeto o una parte de él que se mueve en una trayectoria circular con *velocidad constante v*.

Tal movimiento, llamado **movimiento circular uniforme**, ocurre en muchas situaciones.

Puesto que ocurre con tanta frecuencia, este tipo de movimiento se reconoce como un modelo de análisis llamado **partícula en movimiento circular uniforme.**

Aun cuando un objeto se mueva con velocidad constante en una trayectoria circular, ¿tiene una **aceleración**?

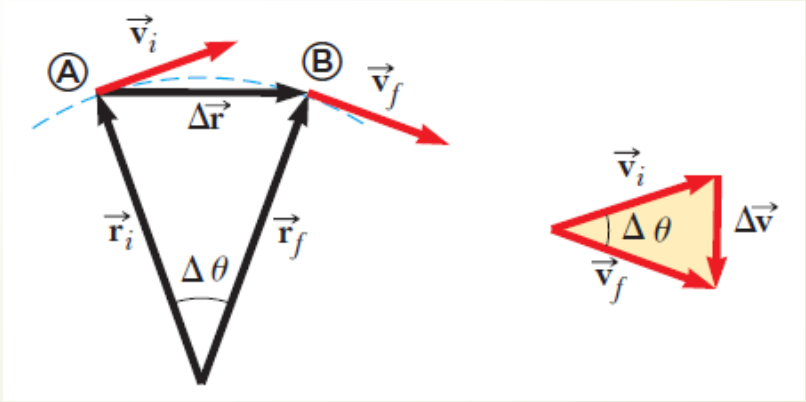
$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

Una aceleración puede presentarse en dos formas:

- ✓ por un cambio en la *magnitud* de la velocidad, y/o
- ✓ **por un cambio en la *dirección* de la velocidad**

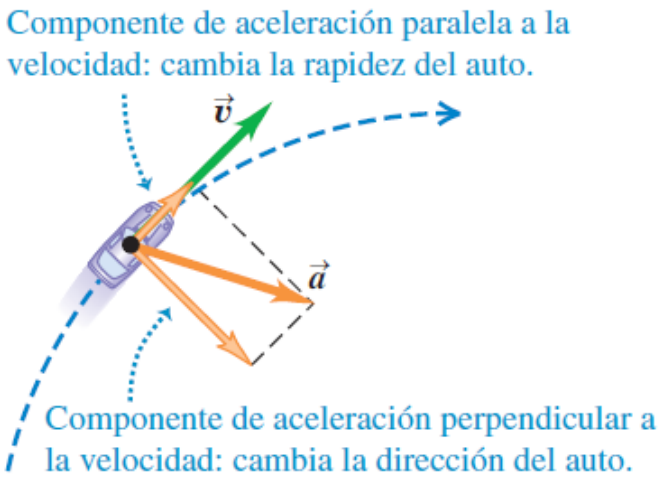
La ultima situación ocurre para un objeto que se mueve con velocidad constante en una trayectoria circular.

El vector **velocidad** siempre es **tangente a la trayectoria** del objeto y **perpendicular al radio** de la **trayectoria circular**.

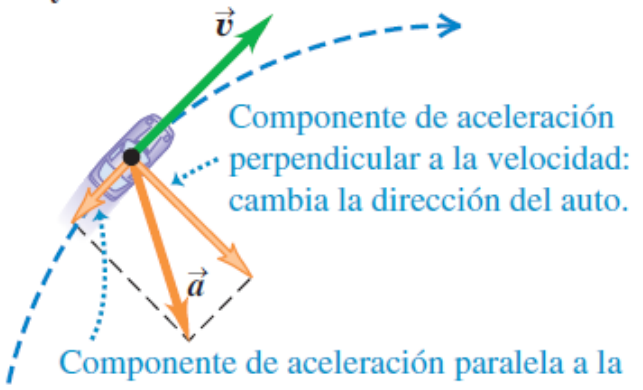


Para el movimiento circular *uniforme*, el vector aceleración solo puede tener una componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del circulo

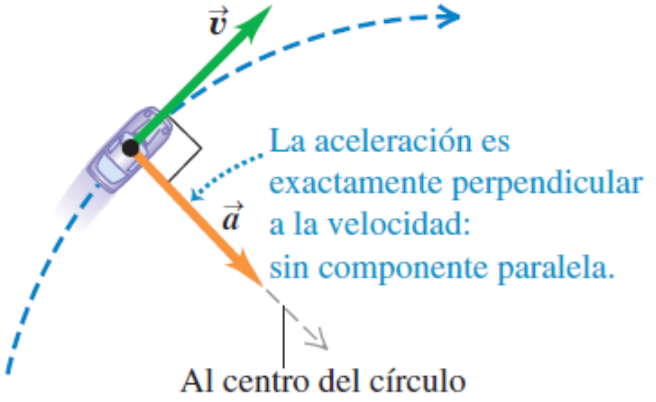
El automóvil aumenta su rapidez en una trayectoria circular



El automóvil disminuye su rapidez en una trayectoria circular



Movimiento circular uniforme: rapidez constante en una trayectoria circular

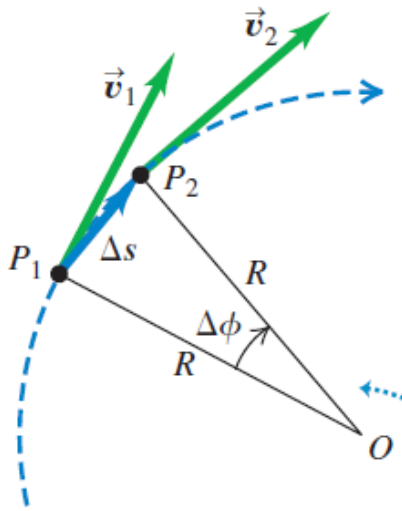


Una aceleración de esta naturaleza se llama **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa *hacia el centro*)

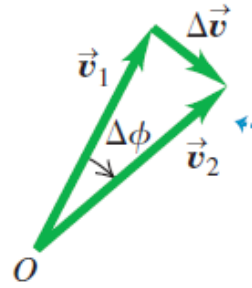
¿Dónde está el observador?

¿Qué significa una "~~aceleración centrífuga~~"?

a) Un punto se mueve una distancia Δs a rapidez constante en una trayectoria circular

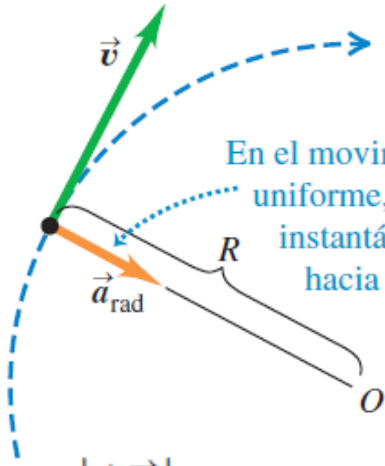


b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



Estos dos triángulos son similares.

c) La aceleración instantánea



En el movimiento circular uniforme, la aceleración instantánea siempre apunta hacia el centro del círculo.

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

$$a_{med} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)}$$

Período:

Es el intervalo de **tiempo** requerido para una **revolución completa** de la partícula. En el intervalo de tiempo T, la partícula se mueve una distancia de $2\pi r$, que es igual al perímetro de la circunferencia de la trayectoria circular de la partícula

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

EJEMPLO **Aceleración centrípeta de la Tierra**

¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol?

radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol $r = 1.496 \times 10^{11}$ m.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11}\ \text{m})}{(1\ \text{año})^2}\left(\frac{1\ \text{año}}{3.156 \times 10^7\ \text{s}}\right)^2 = 5.93 \times 10^{-3}\ \text{m/s}^2$$

Frecuencia:

A menudo al movimiento circular se lo describe en términos de la **frecuencia** *f*, es decir, el número de revoluciones por cada segundo

$$T = \frac{1}{f}$$

$[f] = 1/\text{s} = \text{Hz (Hertz)}$

EJEMPLO **Ultracentrifugadora.** El rotor de una ultracentrifugadora gira a 50,000 rpm (revoluciones por minuto). Una partícula en la parte superior de un tubo de ensayo está a 6.00 cm del eje de rotación. Calcule su aceleración centrípeta en *g*.

SOLUCIÓN El tubo de ensayo completa 5.00×10^4 revoluciones cada minuto, o bien, al dividir entre 60 s/min, 833 rev/s. El tiempo para completar una revolución, el periodo *T*, es

$$T = \frac{1}{(833\ \text{rev/s})} = 1.20 \times 10^{-3}\ \text{s/rev}.$$

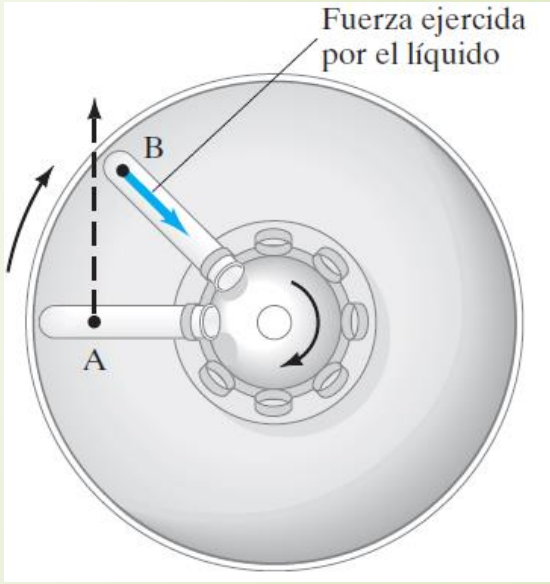
En la parte superior del tubo, una partícula gira en un círculo de circunferencia $2\pi r = (2\pi)(0.0600\ \text{m}) = 0.377\ \text{m}$ por revolución. La rapidez de la partícula es, entonces,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{0.377\ \text{m/rev}}{1.20 \times 10^{-3}\ \text{s/rev}}\right) = 3.14 \times 10^2\ \text{m/s}.$$

La aceleración centrípeta es

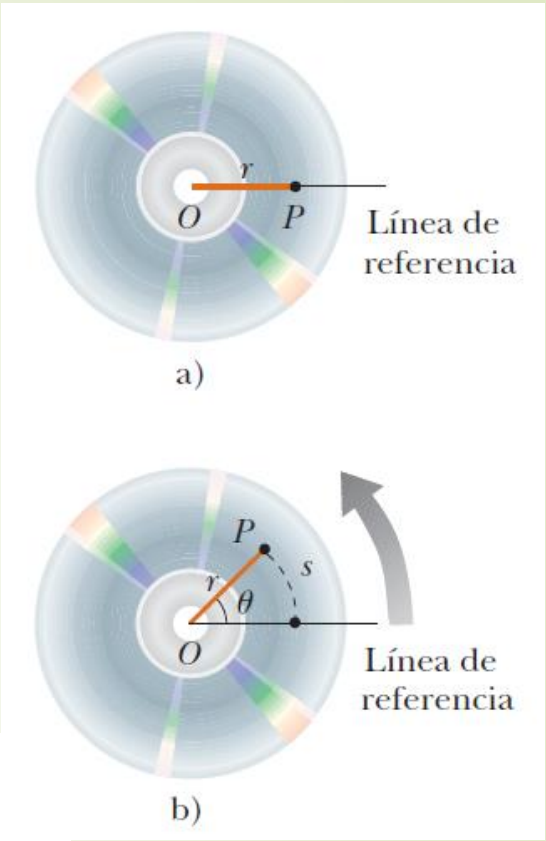
$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.14 \times 10^2\ \text{m/s})^2}{0.0600\ \text{m}} = 1.64 \times 10^6\ \text{m/s}^2,$$

que, al dividir entre $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, es $1.67 \times 10^5\ g = 167{,}000\ \text{g}$.



- **Posición angular y velocidad angular:**

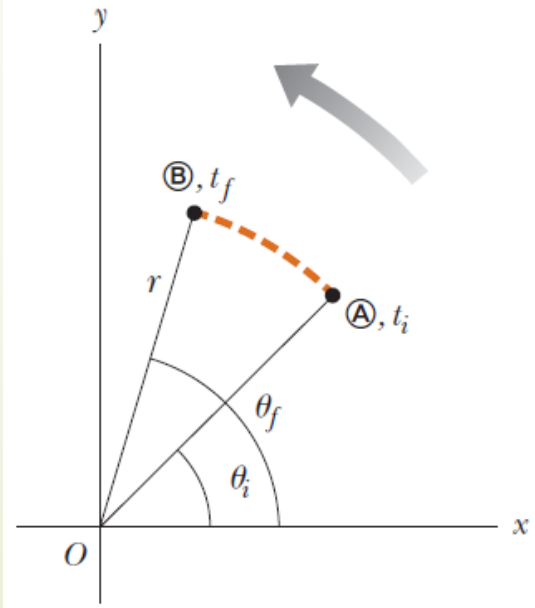
A medida que la partícula se mueve a lo largo del circulo desde la línea de referencia, que está a un ángulo $\theta = 0$, se mueve a través de una longitud de arco s



$$s = r\theta$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ}\,\theta(\text{grados})$$



$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

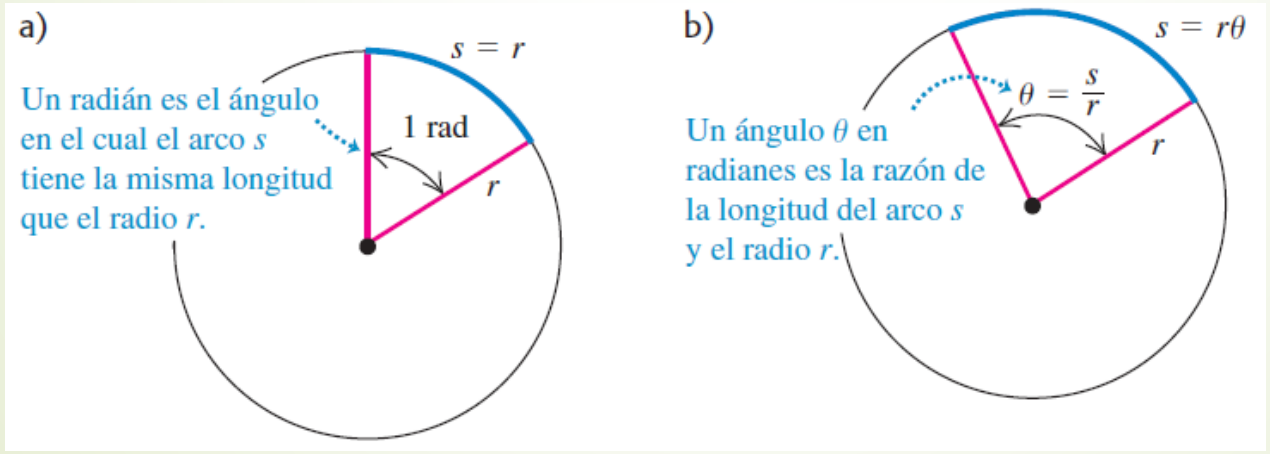
$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

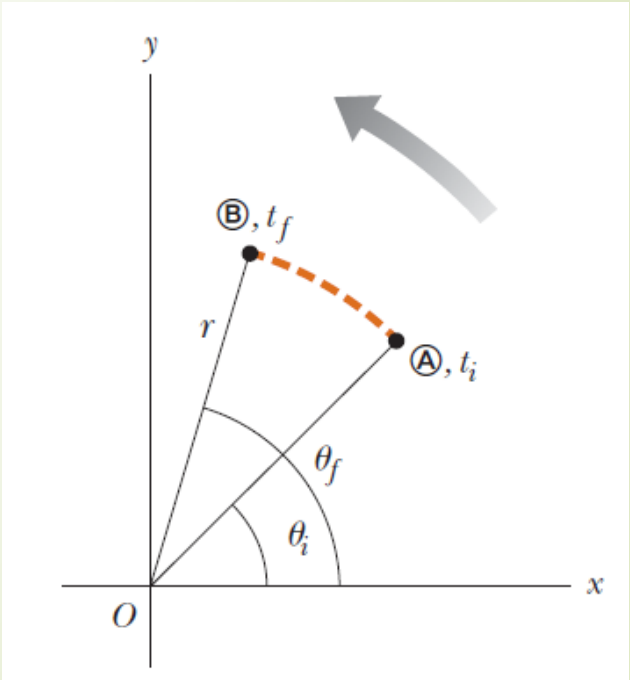
La **velocidad angular promedio** ω_{prom} se define como la relación del desplazamiento angular de un objeto rígido respecto al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta dicho desplazamiento

La **velocidad angular instantánea** ω se define como el límite de la velocidad angular promedio conforme Δt tiende a cero

La velocidad angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que se pueden escribir como s^{-1} porque el radian es adimensional

ω se considera positiva cuando θ aumenta (sentido anti horario) y negativa cuando θ disminuye (sentido horario)





- **Aceleración angular:**

Si la velocidad angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt, el objeto tiene una aceleración angular

La **aceleración angular promedio** α_{prom} de un objeto en rotación se define como la relación de cambio en la velocidad angular respecto al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el cambio en la velocidad angular

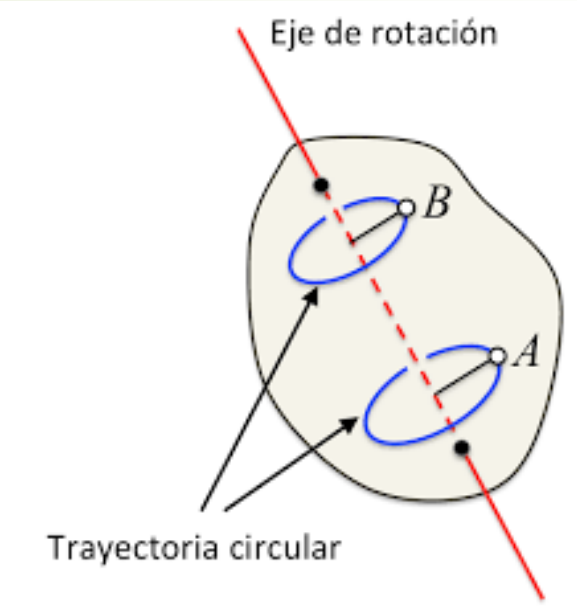
$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

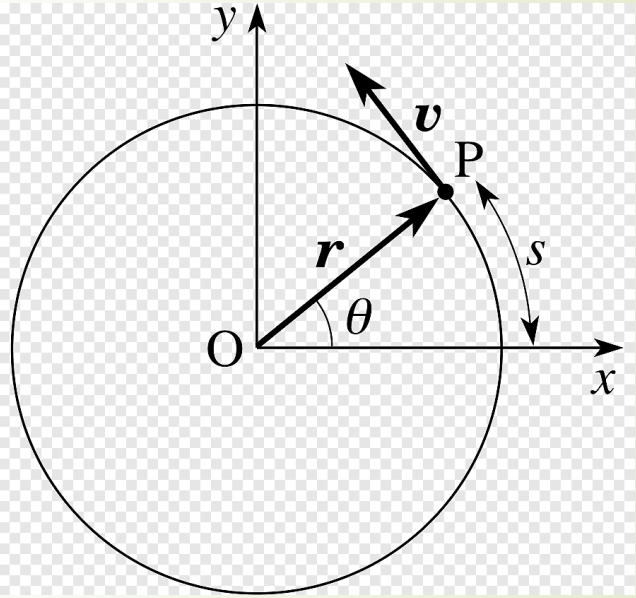
En analogía con la aceleración lineal, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme Δt tiende a cero

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

La aceleración angular tiene unidades de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2), o simplemente s^{-2}. Note que α es positivo cuando un objeto que gira en sentido anti horario aumenta su velocidad o cuando un objeto que gira en sentido horario disminuye su velocidad durante cierto intervalo de tiempo

Cuando consideramos un objeto rígido en rotación respecto a un eje *fijo*, **cada partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo determinado y tiene la misma velocidad angular y la misma aceleración angular**





- **Aceleración angular constante:**

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

$$\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad \text{(para } \alpha \text{ constante)}$$

Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional bajo aceleración constante

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

EJEMPLO Rueda en rotación

Una rueda da vueltas con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2.

A) Si la velocidad angular de la rueda es 2.00 rad/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento angular da vueltas la rueda en 2.00 s?

B) ¿Cuántas revoluciones dio la rueda durante este intervalo de tiempo?

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Delta\theta = (2.00 \text{ rad/s})(2.00 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})^2$$

$$= 11.0 \text{ rad} = (11.0 \text{ rad})(57.3^\circ/\text{rad}) = 630^\circ$$

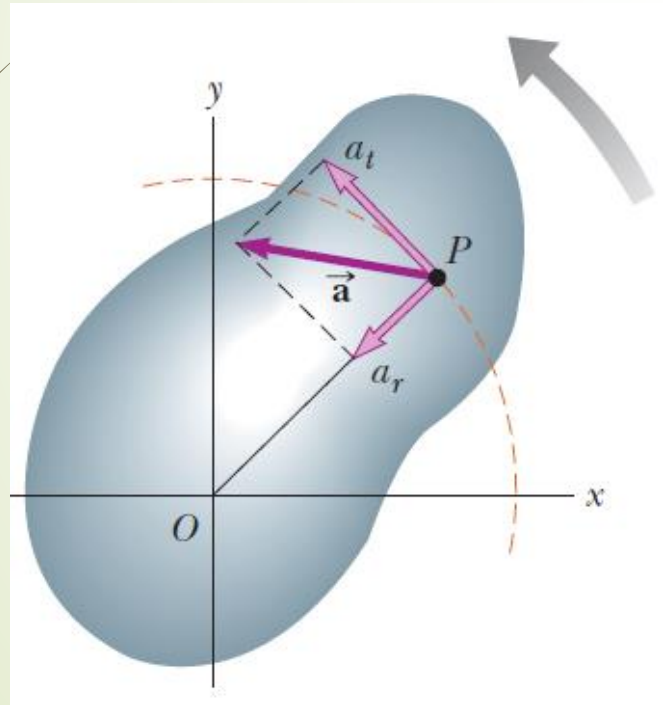
$$\Delta\theta = 630^\circ\left(\frac{1 \text{ rev}}{360^\circ}\right) = 1.75 \text{ rev}$$

- **Cantidades angulares y traslacionales:**

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

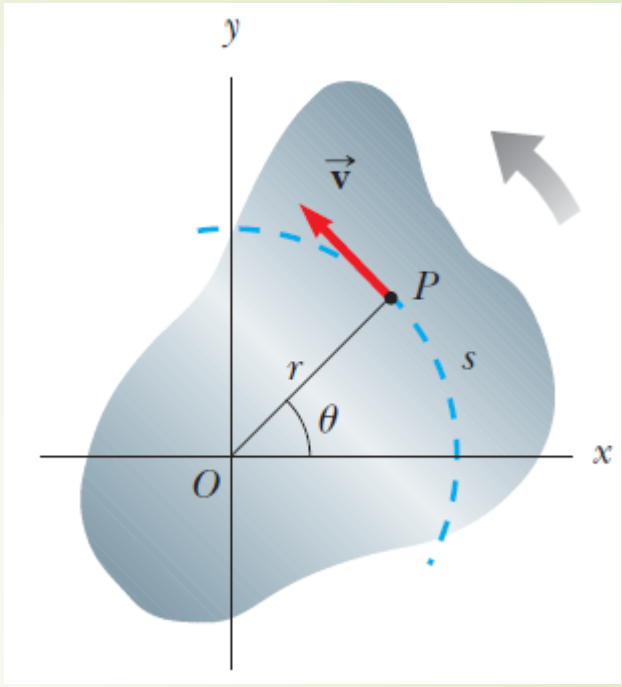
$$\boxed{v = r\omega}$$



$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2}$$

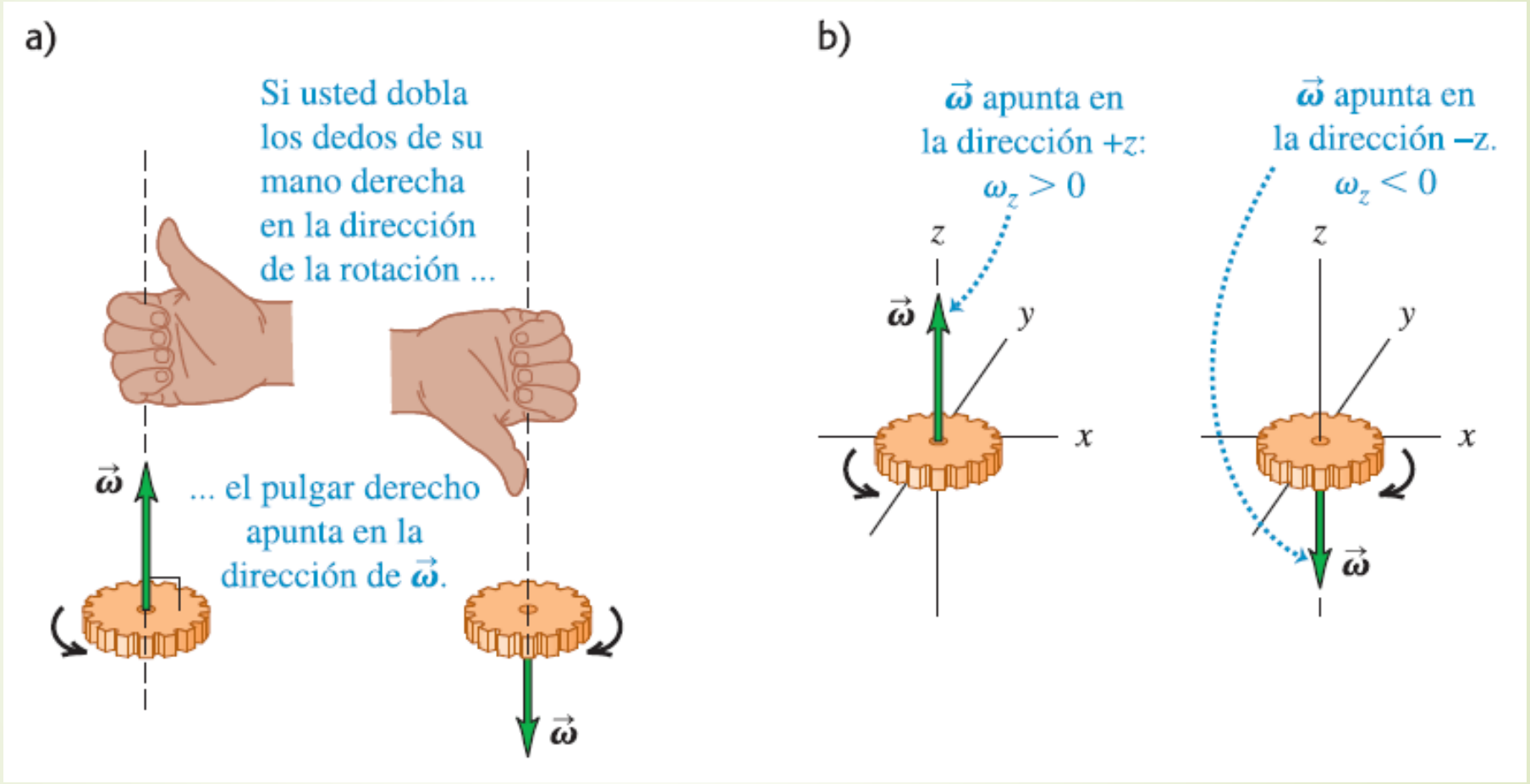


$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} =$$

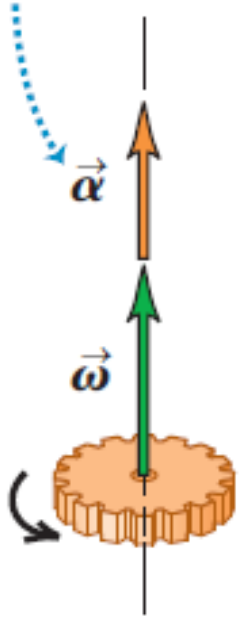
$$\sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

- **Velocidad angular como un vector:**

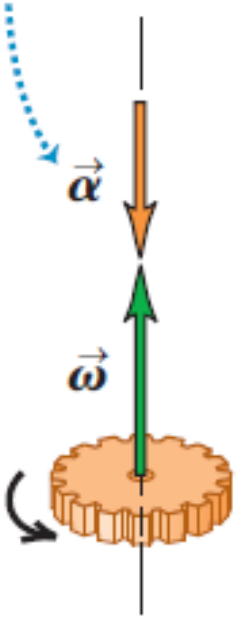


- **Aceleración angular como un vector:**

$\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ en la **misma** dirección: La rotación se acelera.



$\vec{\alpha}$ y $\vec{\omega}$ en la dirección **contraria**: La rotación se frena.



- **Relación entre cinemática angular uniforme y cinemática lineal:**

  Consideramos la trayectoria como la superposición de dos movimientos: uno en la coordenada x, y otro en la coordenada y

$$x(t) = r.\ cos(\theta(t)) = r.\ cos(\omega.t)$$
$$y(t) = r.\ sen(\theta(t)) = r.\ sen(\omega.t)$$

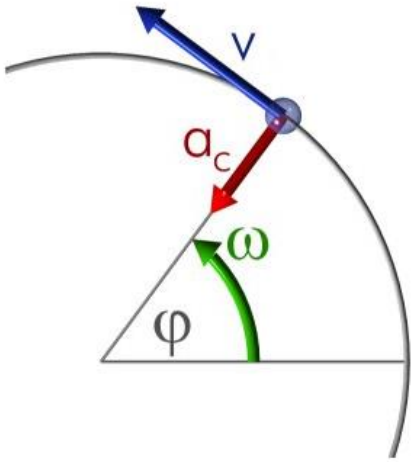
$$v_x(t) = -\ r\ \omega.\ sen(\omega.t)$$
$$v_y(t) = r\ \omega.\ cos(\omega.t)$$

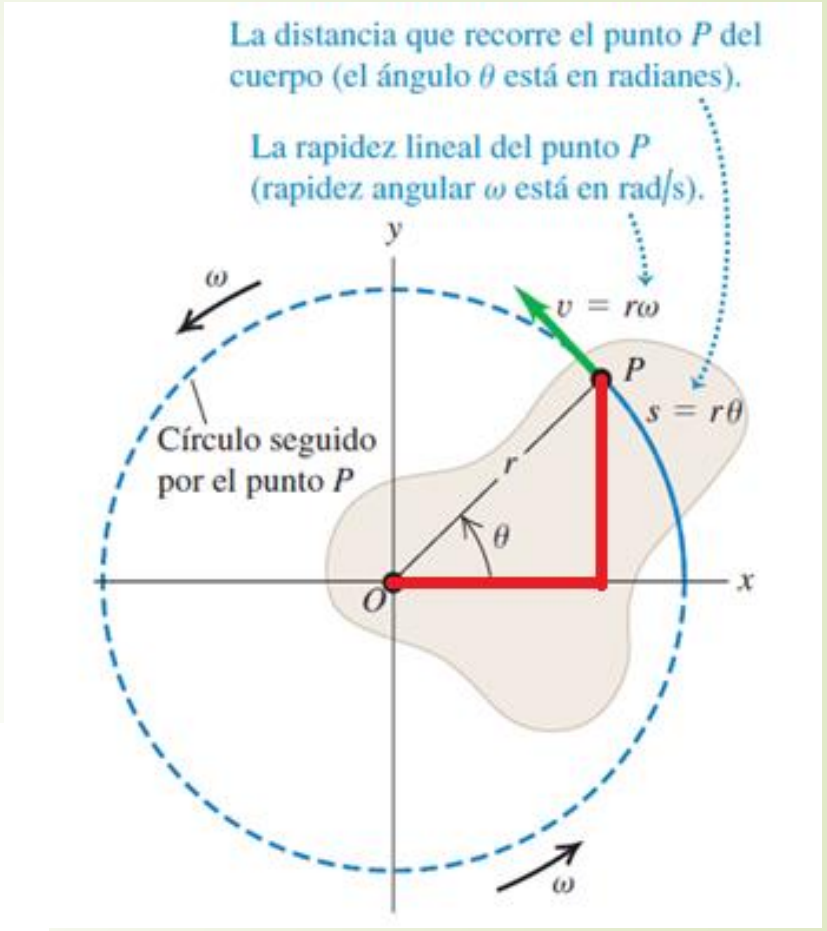
$$a_x(t) = -\ r\ \omega^2.\ cos(\omega.t)$$
$$a_y(t) = -\ r\ \omega^2.\ sen(\omega.t)$$

v *perpendicular a* ***r***

a *perpendicular a* ***v***

a *antiparalelo a* ***r***





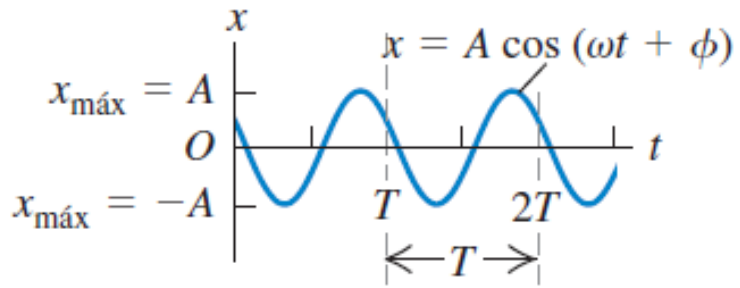
Además:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

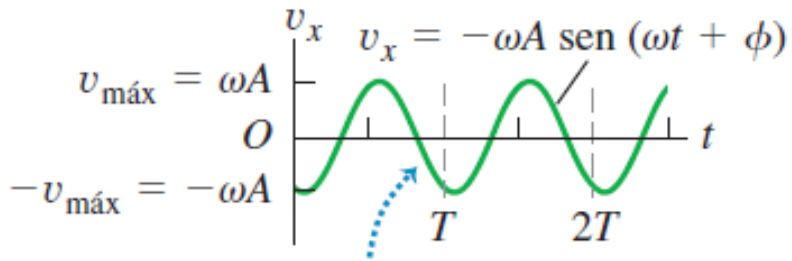
$$v_x^2 + v_y^2 = (\omega r)^2$$

$$a_x^2 + a_y^2 = (\omega^2 r)^2 = a_c^2$$

a) Desplazamiento x en función del tiempo t

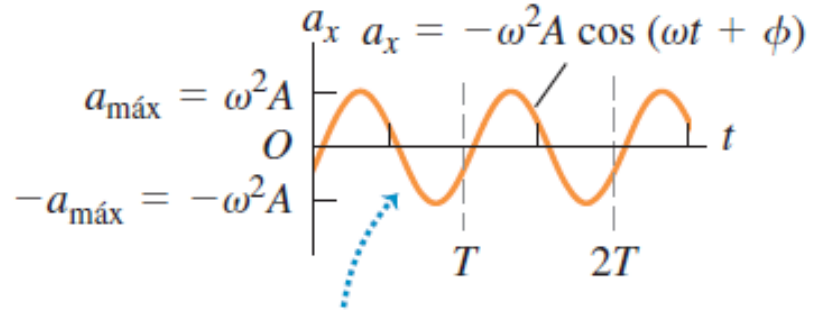


b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica v_x-t se desplaza un cuarto de ciclo con respecto a la gráfica.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza un cuarto de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y medio ciclo con respecto a la gráfica x-t.