

# Física I

Dinámica del movimiento rotacional

Energía cinética rotacional

Momento de inercia

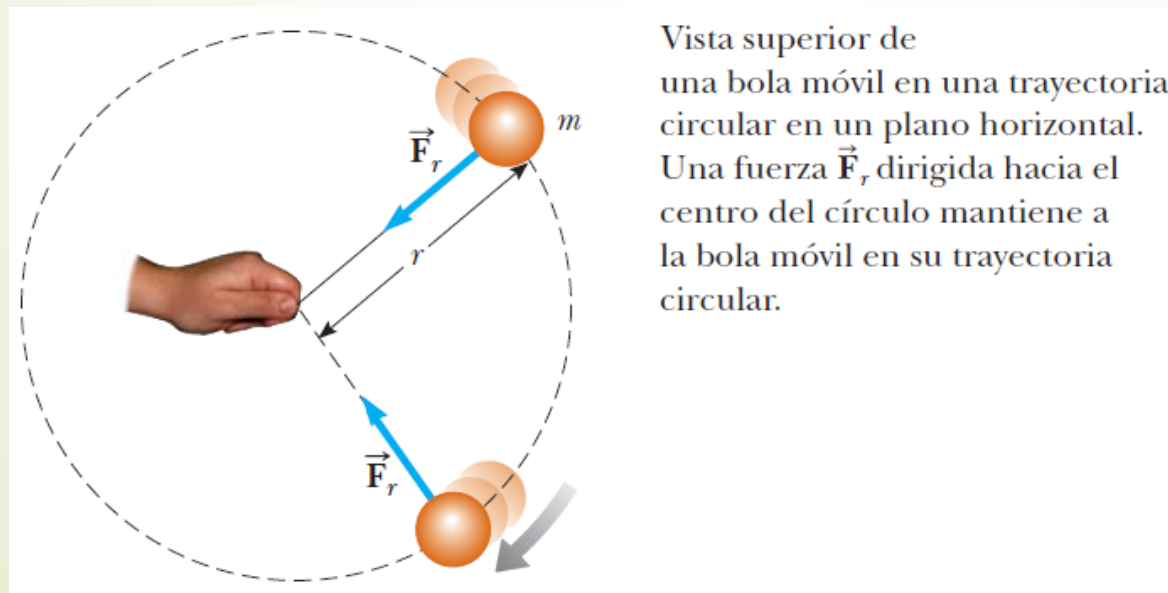
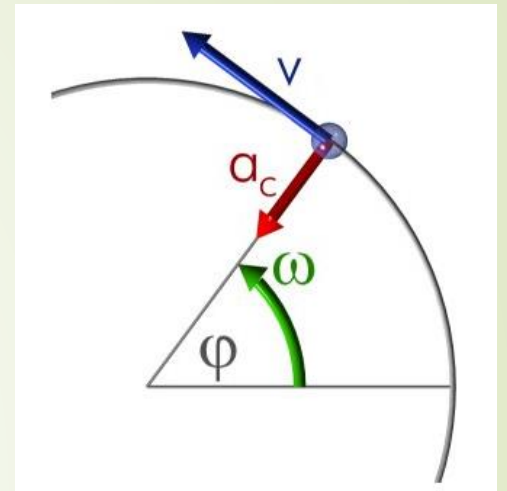
➤ **Segunda Ley de Newton para una partícula en movimiento circular uniforme:**

Vimos para el movimiento circular uniforme que:

$a_c$  se dirige hacia el centro del círculo (trayectoria circular)

$a_c$  es siempre perpendicular a  $v$  (velocidad tangencial)

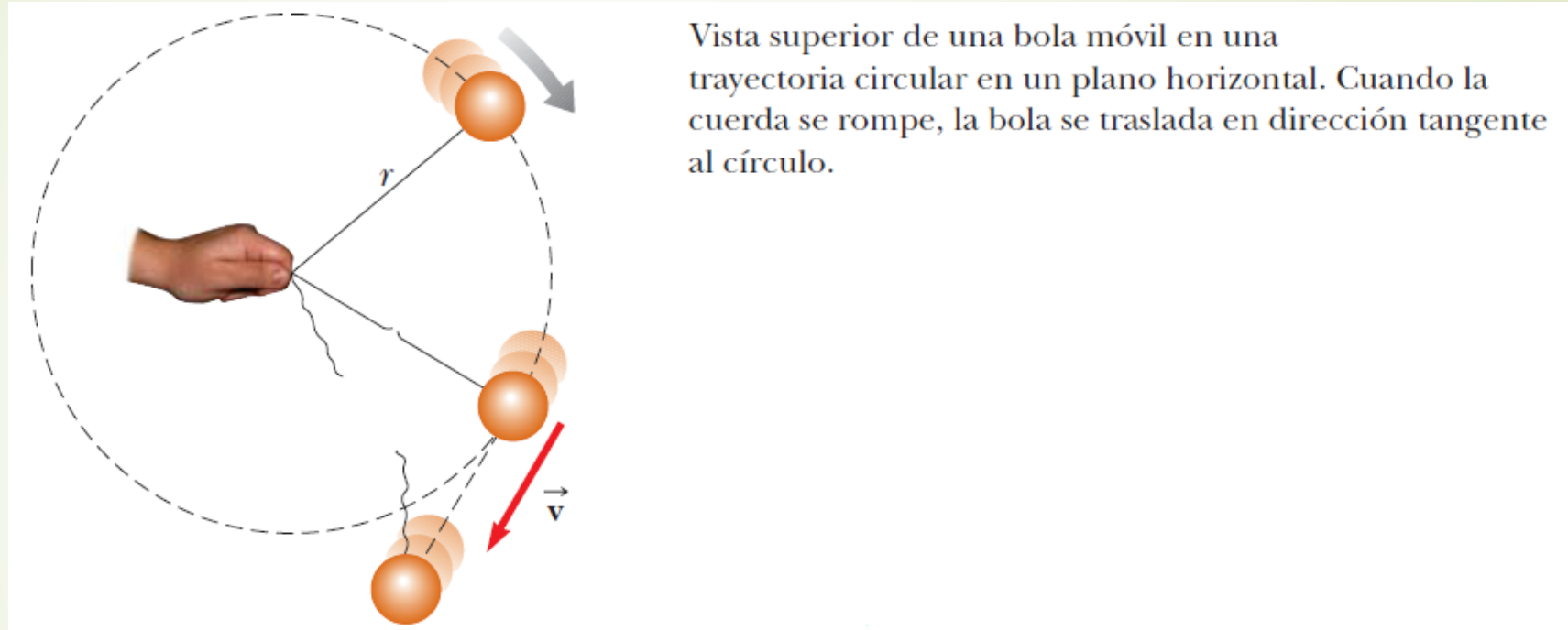
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$



Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Una fuerza  $\vec{F}_r$  dirigida hacia el centro del círculo mantiene a la bola móvil en su trayectoria circular.

$$\sum F = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

Una fuerza que causa una aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad.



Si dicha fuerza desapareciera, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular; en vez de ello, se movería a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo

Si la cuerda se rompe en algún instante, la bola se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición de la bola en ese instante

## EJEMPLO El péndulo cónico

Una pequeña bola de masa  $m$  se suspende de una cuerda de longitud  $L$ . La bola da vueltas con rapidez constante  $v$  en un círculo horizontal de radio  $r$ , como se muestra en la figura. (Puesto que la cuerda hace un recorrido de la superficie en forma de cono, el sistema se conoce como *péndulo cónico*.) Encuentre una expresión para  $v$ .

$$\sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

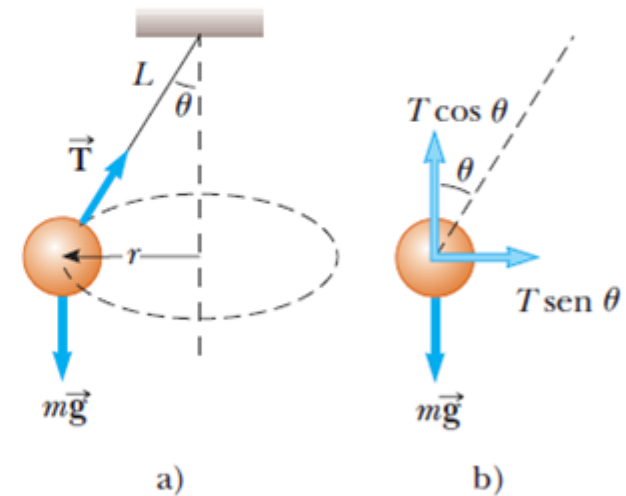
$$T \cos \theta = mg$$

$$\sum F_x = T \sin \theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}$$

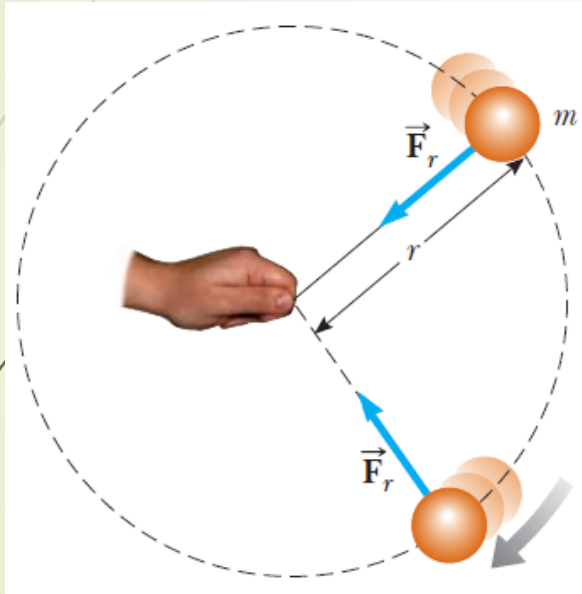
$$v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$



a) Péndulo cónico. La trayectoria del objeto es un círculo horizontal. b) Diagrama de cuerpo libre para el objeto.

## EJEMPLO ¿Qué tan rápido puede girar?

Una bola de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. La bola da vueltas en un círculo horizontal como se muestra en la figura. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la máxima rapidez a la que gira la bola antes de que se rompa la cuerda? Suponga que la cuerda permanece horizontal durante el movimiento.



Vista superior de una bola móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal. Una fuerza  $\vec{F}_r$  dirigida hacia el centro del círculo mantiene a la bola móvil en su trayectoria circular.

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{T_{\text{máx}} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0 \text{ N})(1.50 \text{ m})}{0.500 \text{ kg}}} = 12.2 \text{ m/s}$$

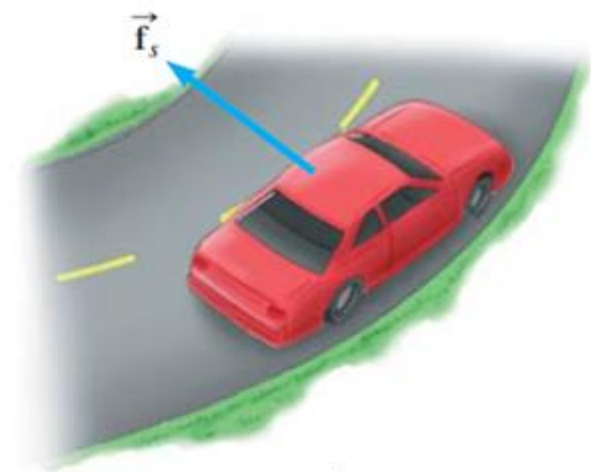
### EJEMPLO ¿Cuál es la máxima rapidez del automóvil?

Un automóvil de 1 500 kg, se traslada sobre una curva, plana horizontal como se muestra en la figura a. Si el radio de la curva es 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.523, encuentre la rapidez máxima que alcanza el automóvil y aún así da la vuelta exitosamente.

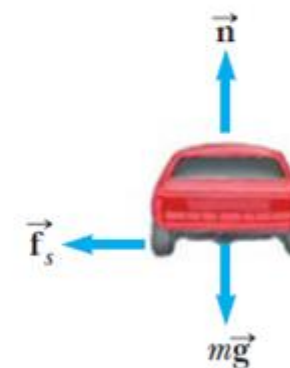
$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = m \frac{v_{\text{máx}}^2}{r}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow n - mg = 0 \rightarrow n = mg$$

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= \sqrt{\frac{\mu_s nr}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s mgr}{m}} = \sqrt{\mu_s gr} \\ &= \sqrt{(0.523)(9.80 \text{ m/s}^2)(35.0 \text{ m})} = 13.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$



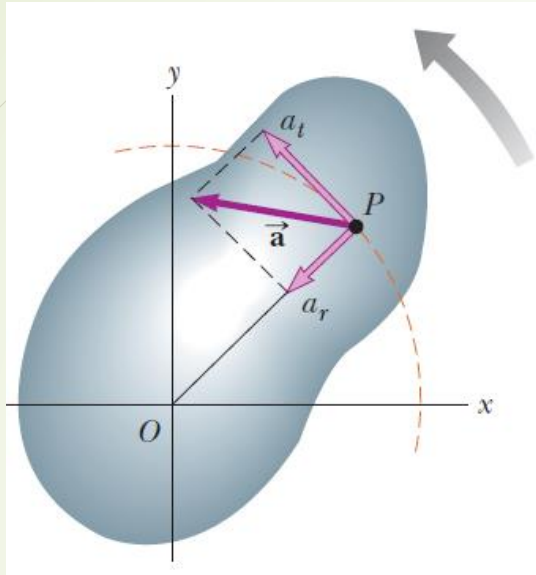
a)



b)

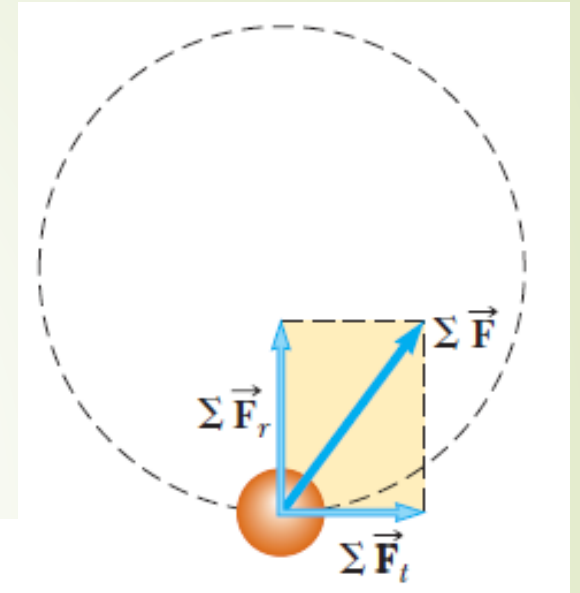
a) La fuerza de fricción estática dirigida hacia el centro de la curva mantiene al automóvil en movimiento en una trayectoria circular. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil.

► **Movimiento circular no uniforme:**



$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_r + \Sigma \vec{F}_t$$

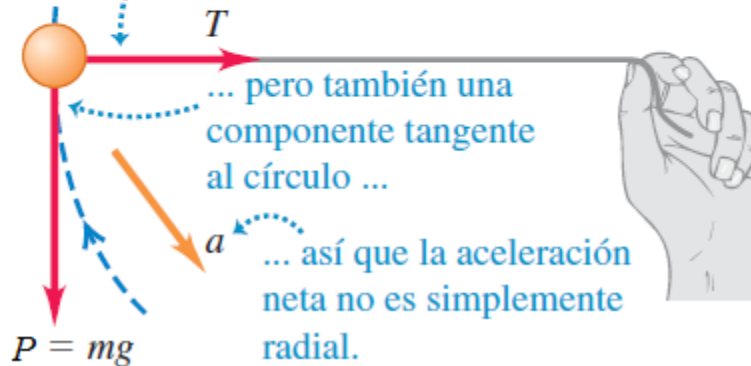


Cuando una pelota se mueve en un círculo vertical ...

... la fuerza neta sobre la pelota tiene una componente hacia el centro del círculo ...

... pero también una componente tangente al círculo ...

... así que la aceleración neta no es simplemente radial.



## EJEMPLO Mantenga los ojos en la bola

Una pequeña esfera de masa  $m$  se une al extremo de una cuerda de longitud  $R$  y se pone en movimiento en un círculo *vertical* en torno a un punto fijo  $O$ , como se ilustra en la figura. Determine la tensión en la cuerda en cualquier instante cuando la rapidez de la esfera sea  $v$  y la cuerda forme un ángulo  $\theta$  con la vertical.

$$\sum F_t = mg \operatorname{sen} \theta = ma_t$$

$$a_t = g \operatorname{sen} \theta$$

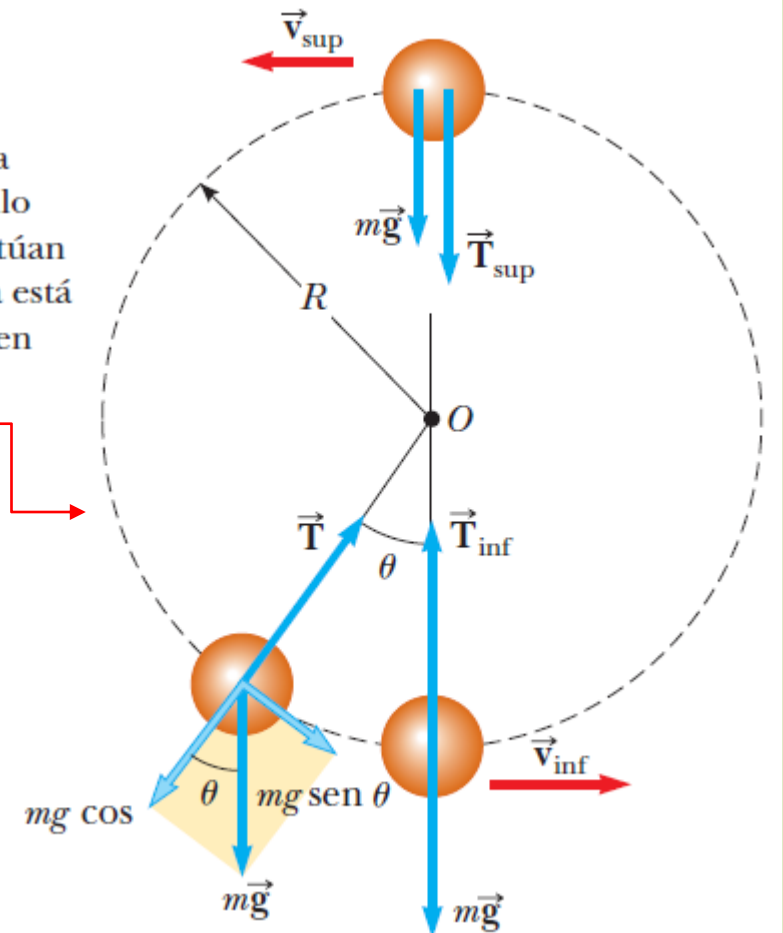
$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = mg \left( \frac{v^2}{Rg} + \cos \theta \right)$$

$$T_{\text{sup}} = mg \left( \frac{v_{\text{sup}}^2}{Rg} - 1 \right)$$

$$T_{\text{inf}} = mg \left( \frac{v_{\text{inf}}^2}{Rg} + 1 \right)$$

Fuerzas que actúan sobre una esfera de masa  $m$  conectada a una cuerda de longitud  $R$  y que gira en un círculo vertical con centro en  $O$ . Las fuerzas que actúan sobre la esfera se muestran cuando la esfera está en la parte superior e inferior del círculo y en una posición arbitraria.

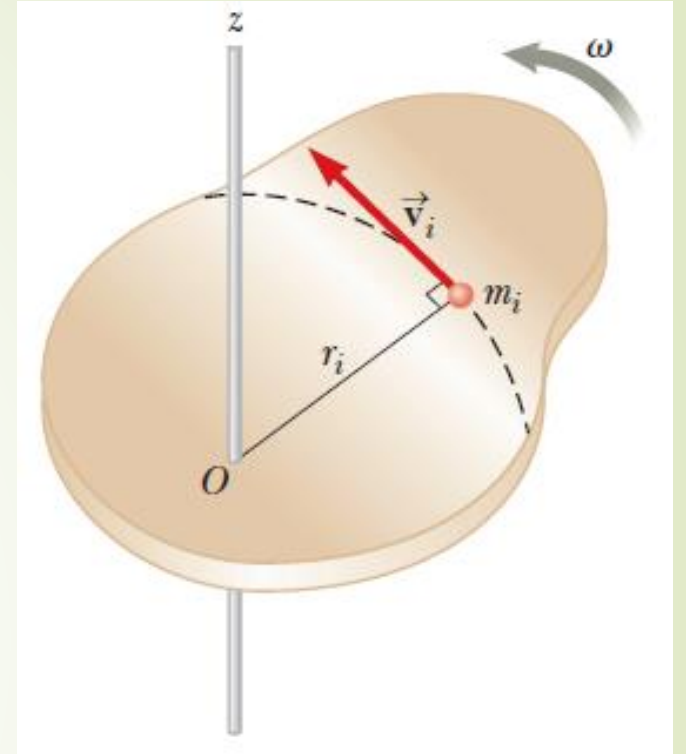


➤ Energía cinética rotacional y momento de inercia:

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$



Simplificamos esta ecuación definiendo el **momento de inercia**  $I$  de un objeto rígido como:

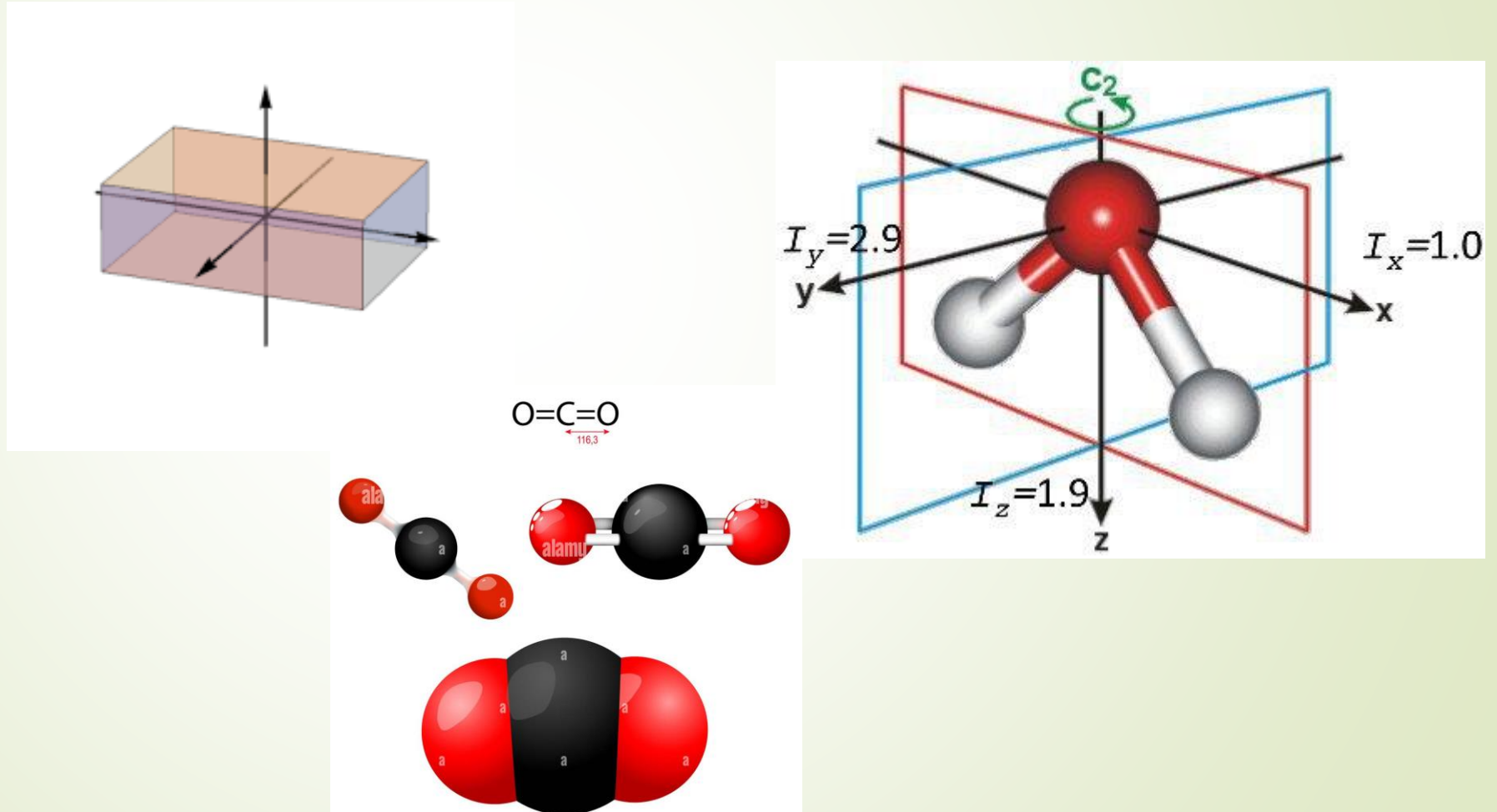
$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

entonces, la energía cinética de rotación es:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

El **momento de inercia** es una medida de la resistencia de un objeto a los cambios en su movimiento de rotación, así como la **masa** es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento de traslación.

Para la **rotación**, esta resistencia depende no solo de la masa del objeto, sino también de **cómo se distribuye la masa alrededor del eje de rotación**.

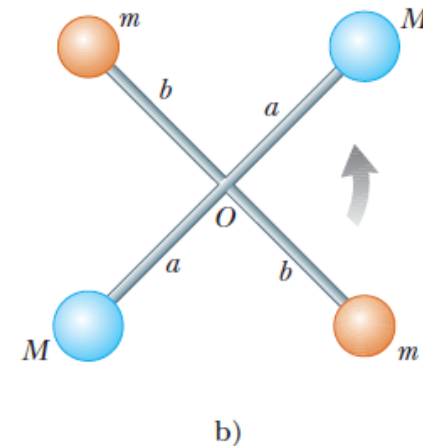
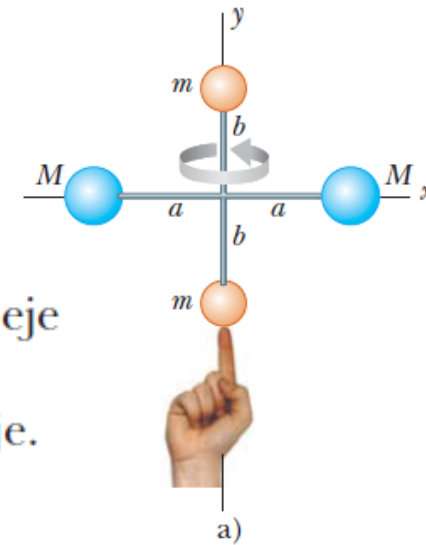


## EJEMPLO Cuatro objetos en rotación

Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano  $xy$ . Se supondrá que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

**A)** Si el sistema da vueltas en torno al eje  $y$  (figura a) con una rapidez angular  $\omega$ , encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.

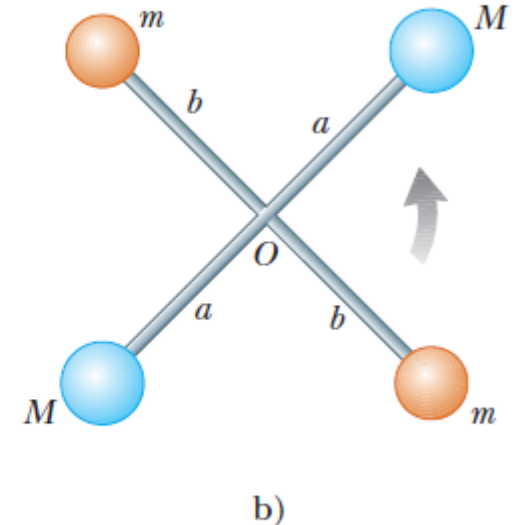
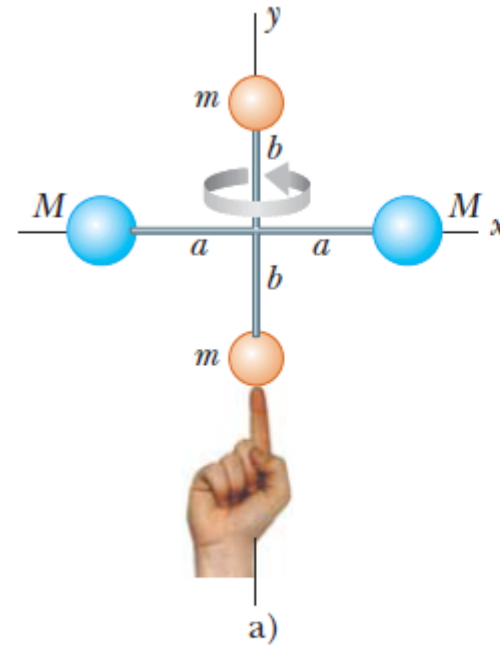
**B)** Suponga que el sistema da vueltas en el plano  $xy$  en torno a un eje (el eje  $z$ ) a través de  $O$  (figura b). Calcule el momento de inercia y la energía cinética rotacional en torno a este eje.



Cuatro esferas forman un bastón inusual. a) El bastón rota en torno al eje  $y$ . b) El bastón rota en torno al eje  $z$ .

$$I_y = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}I_y\omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$



Cuatro esferas forman un bastón inusual. a) El bastón rota en torno al eje  $y$ . b) El bastón rota en torno al eje  $z$ .

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

► Cálculo de momentos de inercia:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

$$\rho \equiv m/V$$

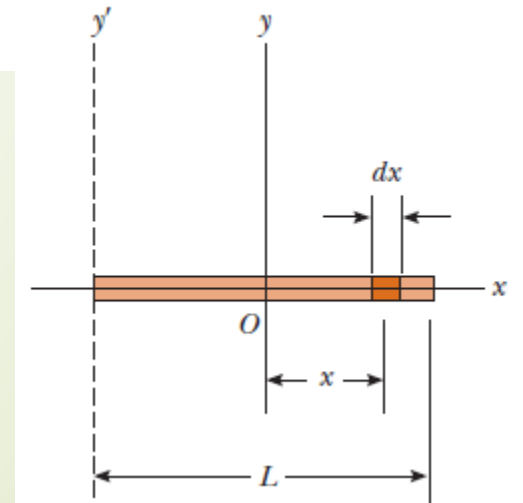
$$I = \int \rho r^2 dV$$

**EJEMPLO** Barra rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$  en torno a un eje perpendicular a la barra (el eje  $y$ ) y que pasa a través de su centro de masa.

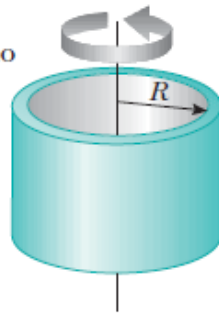
$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{L} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

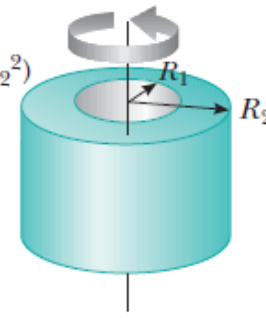


## Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías

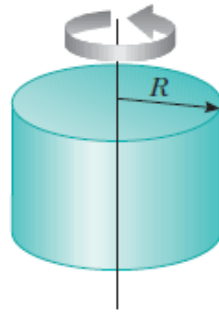
Aro o cascarón  
cilíndrico delgado  
 $I_{CM} = MR^2$



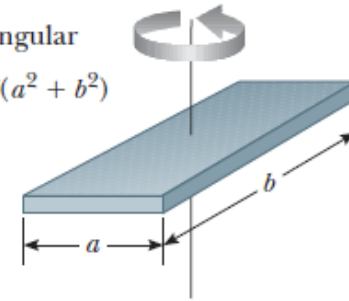
Cilindro hueco  
 $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$



Cilindro sólido  
o disco  
 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$

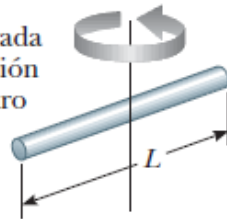


Placa rectangular  
 $I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



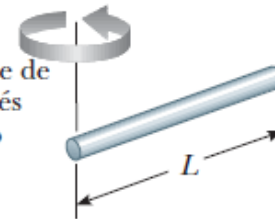
Barra larga delgada  
con eje de rotación  
a través del centro

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$

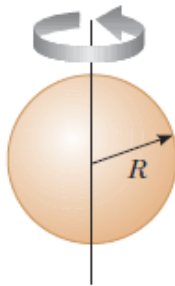


Barra larga  
delgada con eje de  
rotación a través  
de un extremo

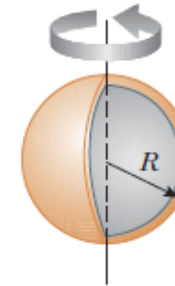
$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



Esfera sólida  
 $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



Cascarón esférico  
delgado  
 $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$



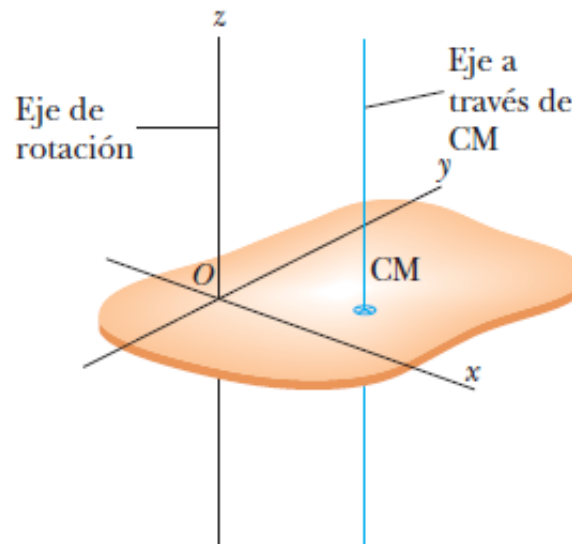
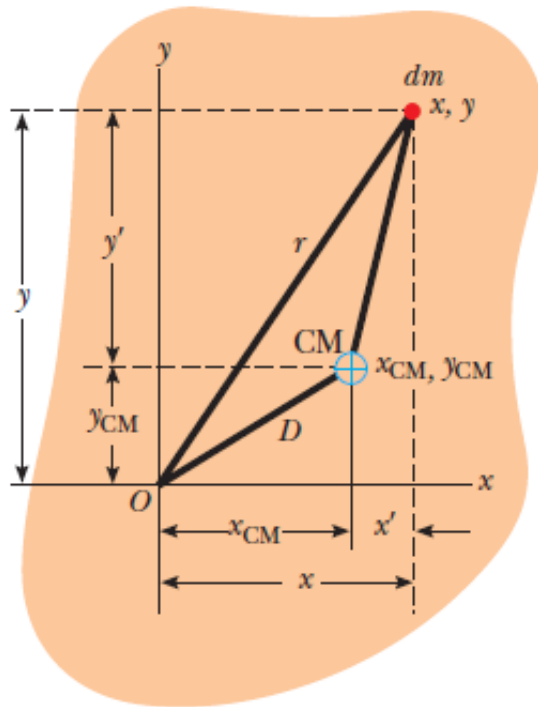
► **Teorema de ejes paralelos (o Teorema de Steiner):**

El calculo de momentos de inercia de un objeto en torno a un eje arbitrario puede ser complicado, incluso para un objeto considerablemente simétrico. Por fortuna, el uso de un importante teorema, llamado **teorema de ejes paralelos**, con frecuencia simplifica el calculo

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I = \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2] dm$$

$$= \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{CM} \int x' dm + 2y_{CM} \int y' dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm$$



$$I = I_{CM} + MD^2$$