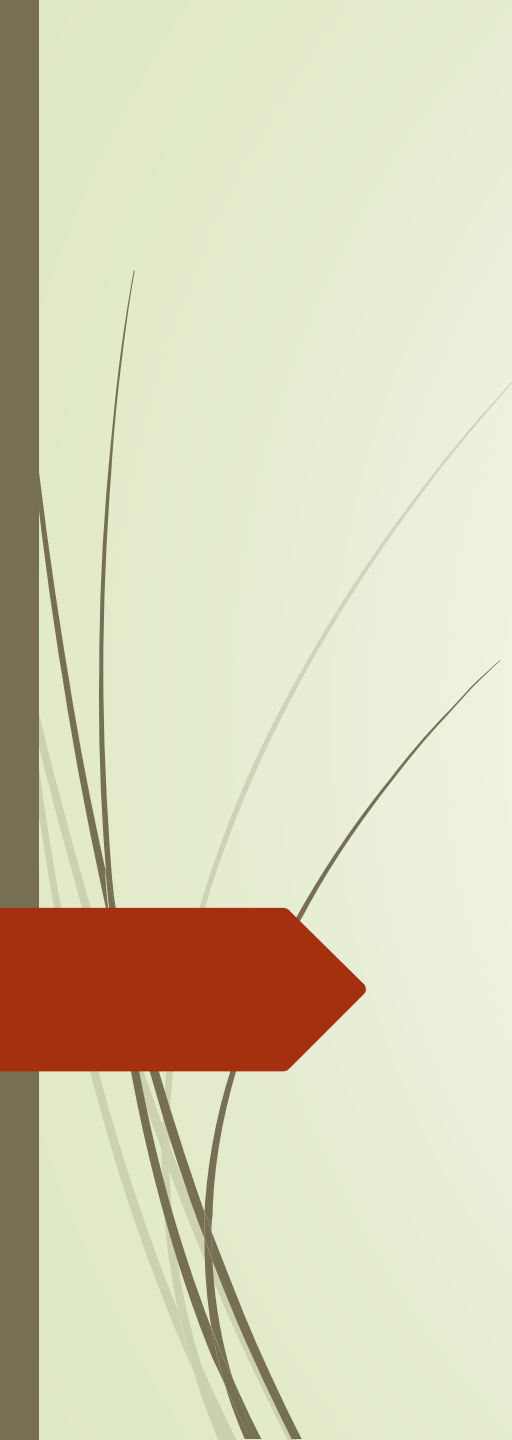
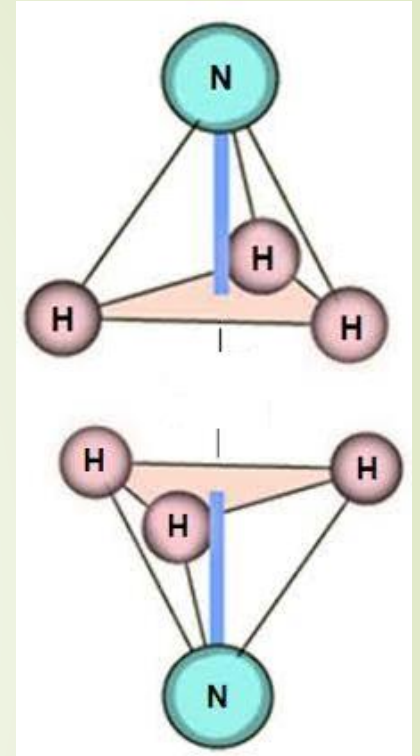
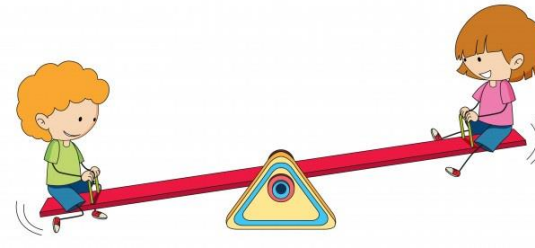
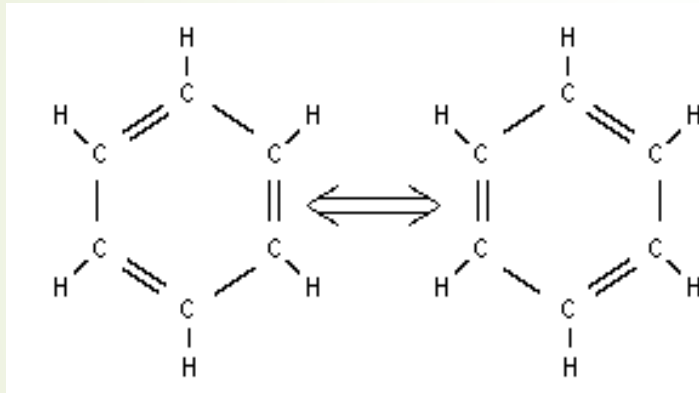
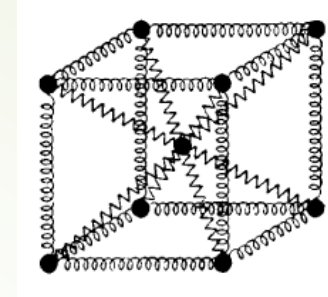
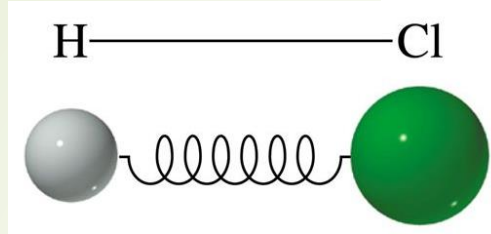




Física I

Movimiento oscilatorio

➤ Oscilaciones:



En el **movimiento periódico** el objeto regresa regularmente a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo.

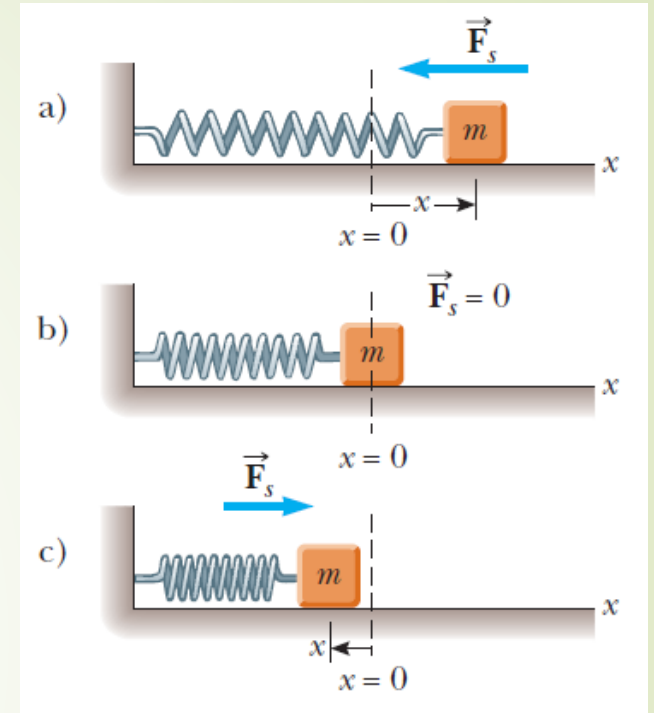
Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama **movimiento armónico simple**.

➤ Movimiento de un objeto unido a un resorte:

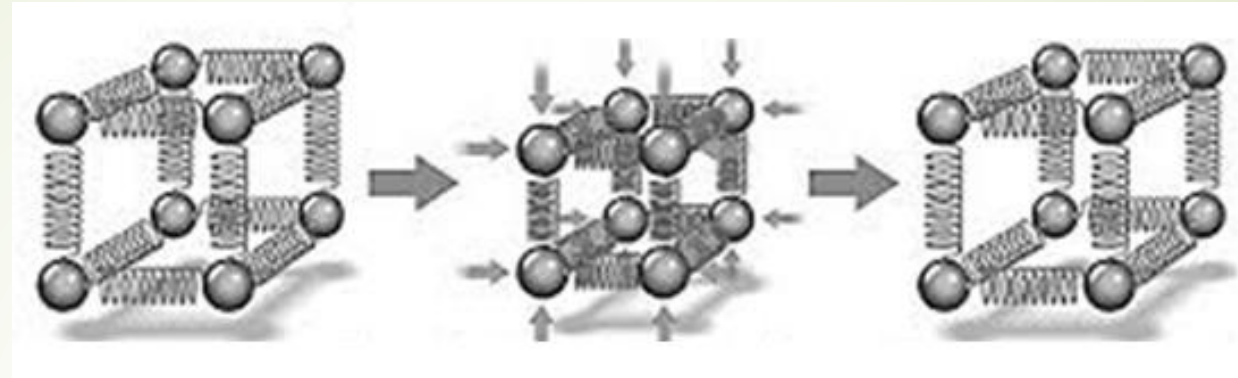
F_s se denomina fuerza restauradora

$$F_s = -kx$$
$$-kx = ma_x$$
$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

Si el bloque se desplaza a una posición $x = A$ y se libera desde el reposo, su aceleración *inicial* es $-k.A/m$. Cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$, su aceleración es cero. En este instante, su velocidad es un máximo porque la aceleración cambia de signo. Por lo tanto el bloque continua viajando hacia la izquierda del equilibrio con una aceleración positiva y al final llega a $x = -A$, momento en el que su aceleración es $k.A/m$ y su velocidad de nuevo es cero. El bloque termina un ciclo completo de su movimiento cuando regresa a la posición original y una vez mas pasa por $x = 0$ con velocidad máxima.



Ejemplo de fuerza restauradora (sólido elástico):



► Partícula en movimiento armónico simple (MAS):

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

Veamos la solución:

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} \cos (\omega t + \phi) = -\omega A \sin (\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \frac{d}{dt} \sin (\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \checkmark$$

A es llamada la ***amplitud*** del movimiento, es simplemente **el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x positiva o negativa.**

La constante ω se llama ***frecuencia angular*** y tiene unidades de rad/s. Es una medida de que tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras mas oscilaciones por unidad de tiempo haya, mas alto es el valor de ω .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

El ángulo constante φ se llama **constante de fase** (o ángulo de fase inicial) y, junto con la amplitud A , se determina de manera unívoca por la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$.

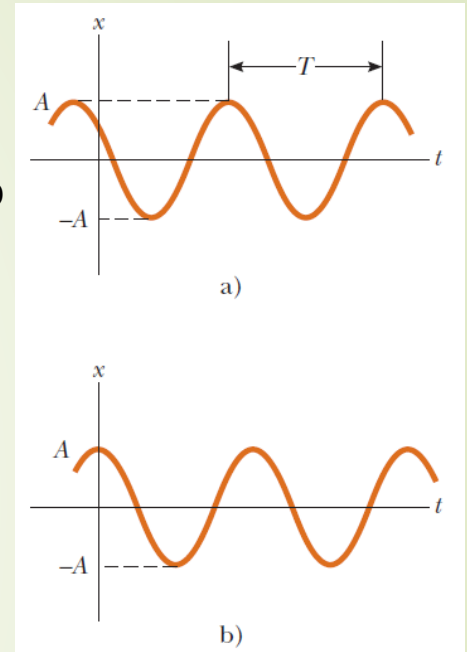
Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\varphi = 0$ y la representación gráfica del movimiento es como se exhibe en la figura.

La cantidad $(\omega t + \varphi)$ se llama **fase** del movimiento. Notar que la función $x(t)$ es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt aumenta en 2π radianes.

El **periodo** T del movimiento es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento.

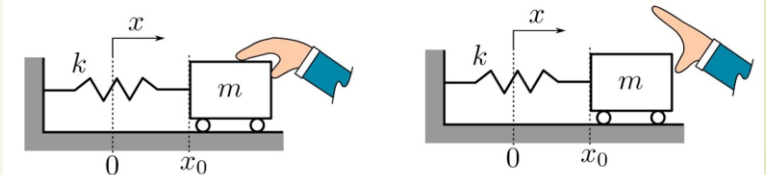
$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = 0$$



masa - resorte



El inverso del periodo se llama **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo de tiempo por oscilación, la frecuencia representa el **número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo**:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

El periodo y la frecuencia dependen *solamente* de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y *no* de los parámetros del movimiento, como A o φ .

Como es de esperar, la frecuencia es mayor para un resorte mas rígido (mayor valor de k) y disminuye con la masa creciente de la partícula.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Velocidad y aceleración:

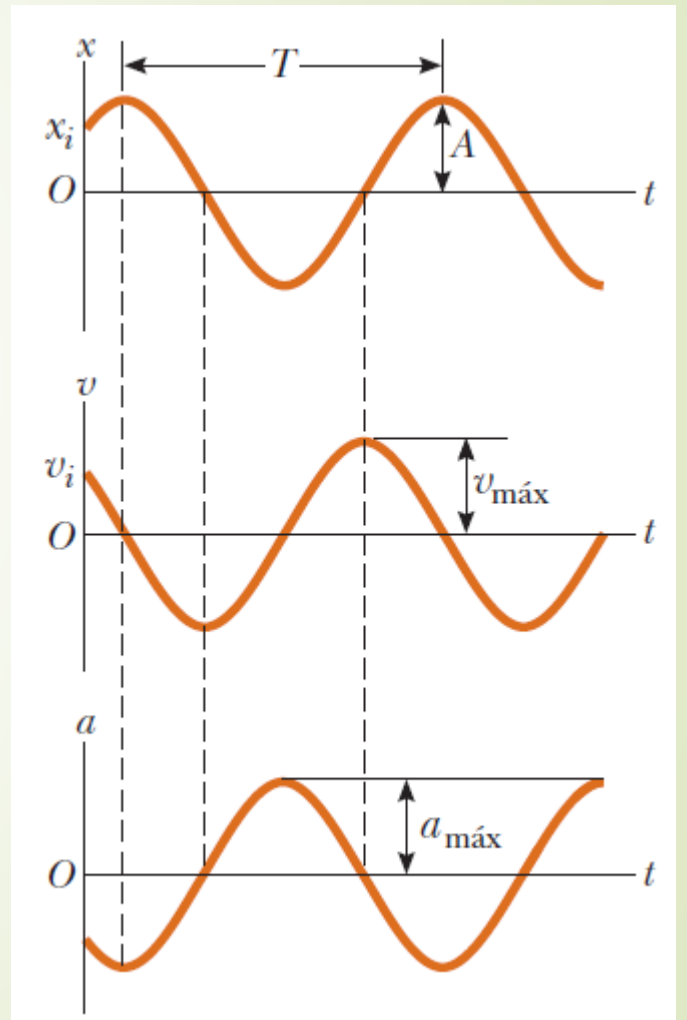
$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin (\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi)$$

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$



EJEMPLO**Un sistema bloque-resorte**

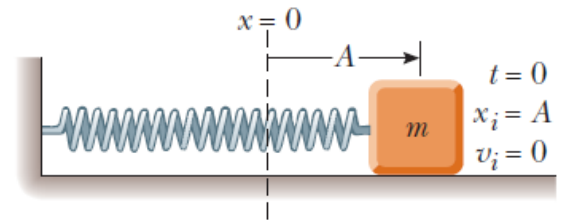
Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura.

A) Hallar el periodo de su movimiento.

B) Determine la rapidez máxima del bloque.

C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00 \text{ rad/s}} = 1.26 \text{ s}$$

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.250 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

$$x(0) = A \cos \phi = A \rightarrow \phi = 0$$

$$x = A \cos (\omega t + \phi) = (0.0500 \text{ m}) \cos 5.00t$$

$$v = -\omega A \sin (\omega t + \phi) = -(0.250 \text{ m/s}) \sin 5.00t$$

$$a = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi) = -(1.25 \text{ m/s}^2) \cos 5.00t$$

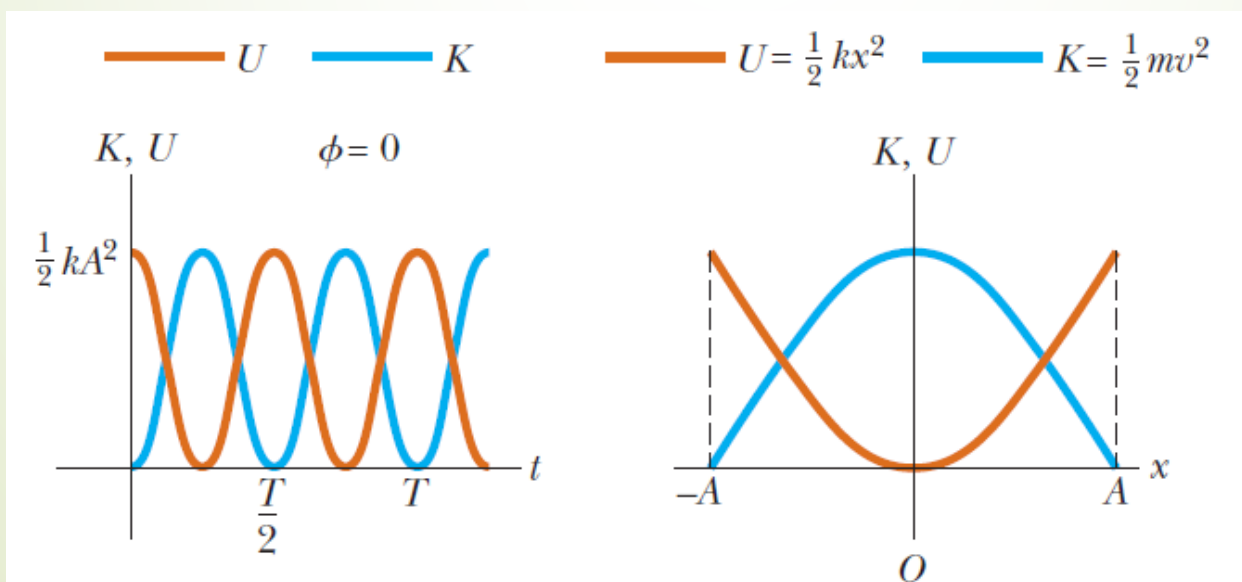
➤ Energía del oscilador armónico simple:

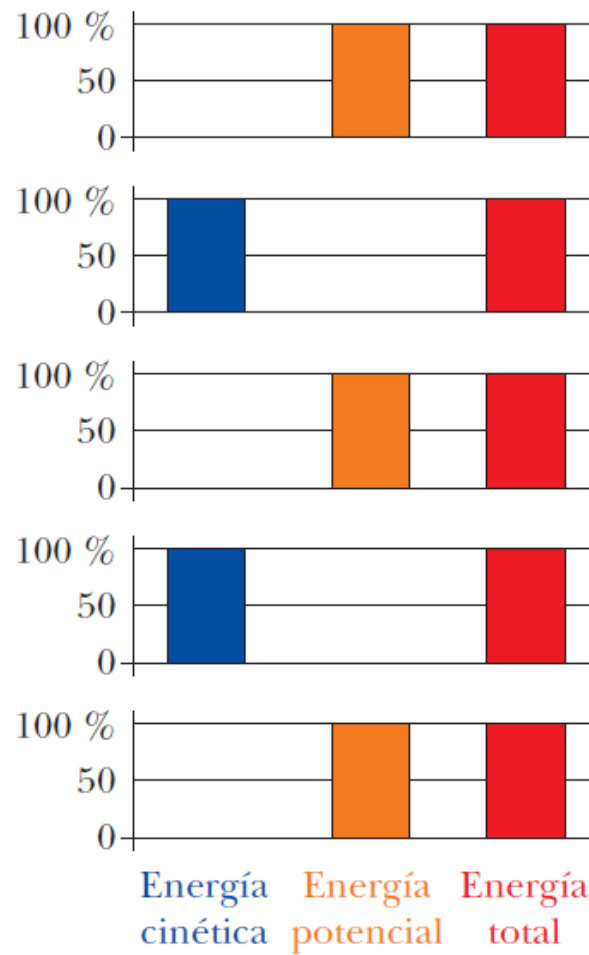
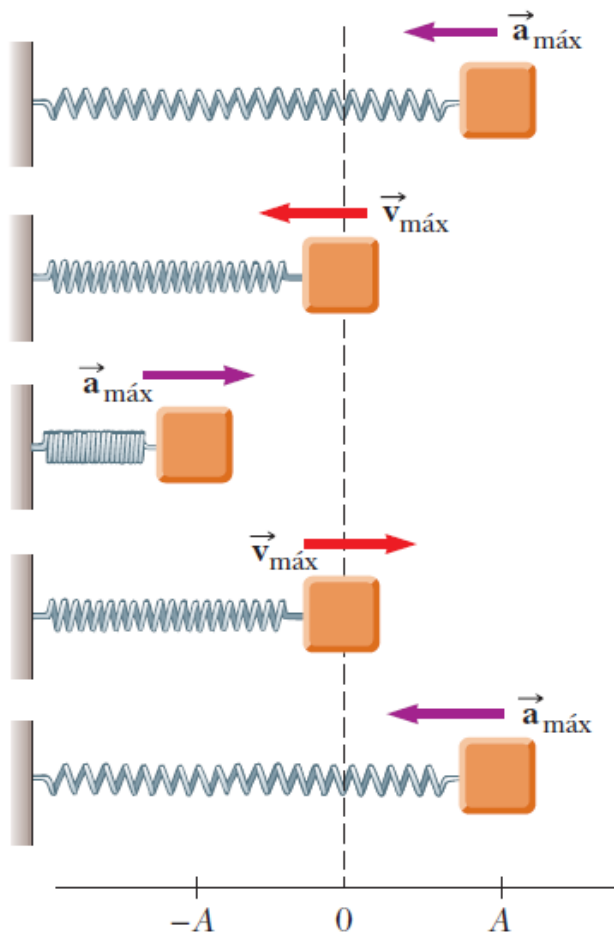
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 (\omega t + \phi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2 (\omega t + \phi) + \cos^2 (\omega t + \phi)]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$





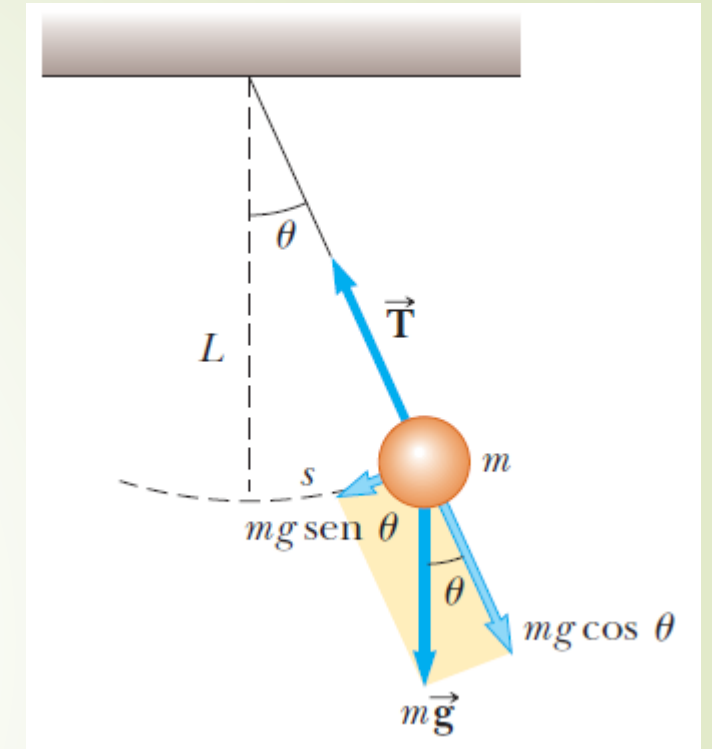
t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2} k A^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$

➤ Péndulo simple:

$$F_t = -mg \sen \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$s = L\theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sen \theta$$



Para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta \quad (\text{para valores pequeños de } \theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

► Péndulo físico:

Un **péndulo físico** es cualquier péndulo *real* que usa un cuerpo de tamaño finito, en contraste con el modelo idealizado de péndulo *simple* en el que toda la masa se concentra en un punto.

Si las oscilaciones son pequeñas, el análisis del movimiento de un péndulo real es tan sencillo como el de un péndulo simple.

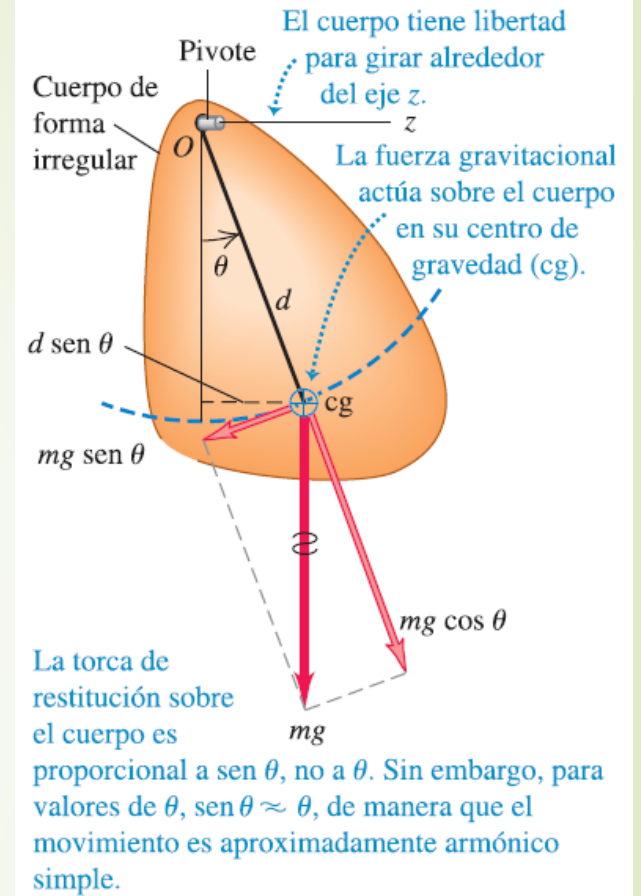
$$\tau_z = -(mg)(d \sin \theta)$$

$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

$$\Sigma \tau_z = I \alpha_z$$

$$-(mgd)\theta = I \alpha_z = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} \theta$$



$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (\text{péndulo físico, amplitud pequeña})$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (\text{péndulo físico, amplitud pequeña})$$

► Oscilaciones amortiguadas:

Los sistemas oscilantes idealizados que hasta ahora hemos visto no tienen fricción; no hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica total es constante y un sistema puesto en movimiento sigue oscilando eternamente sin disminución de la amplitud. Sin embargo, los sistemas del mundo real siempre tienen fuerzas disipadoras, y las oscilaciones cesan con el tiempo.

La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipadoras se denomina ***amortiguamiento***, y el movimiento correspondiente se llama ***oscilación amortiguada***.

El caso más sencillo para un análisis detallado es un oscilador armónico simple, con una de amortiguamiento por fricción directamente proporcional a la *velocidad* del cuerpo oscilante.

$$\sum F_x = -kx - bv_x$$

$$-kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega't + \phi) \quad (\text{oscilador con poco amortiguamiento})$$

Análisis de la solución:

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

(oscilador con poco amortiguamiento)

Si se hace nulo el radicando:

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \quad \text{o bien,} \quad b = 2\sqrt{km}$$

En esta situación la condición se denomina **amortiguamiento crítico**.

El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

Gráfica de desplazamiento contra tiempo para un oscilador con poco amortiguamiento y ángulo de fase $\phi = 0$. Se muestran curvas para dos valores de la constante de amortiguamiento b .

— $b = 0.1\sqrt{km}$ (fuerza de amortiguamiento débil)

— $b = 0.4\sqrt{km}$ (fuerza de amortiguamiento más fuerte)

