

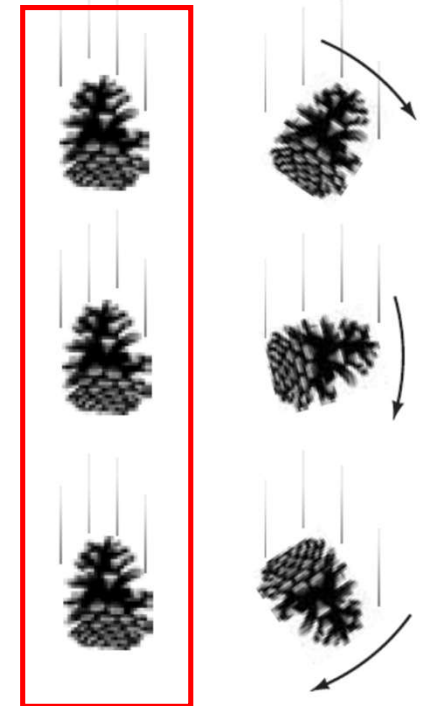
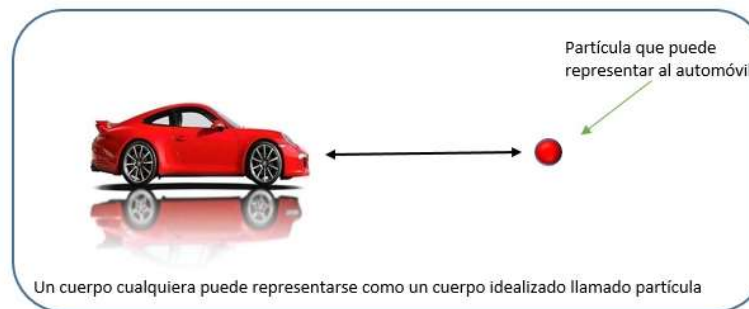
CINEMÁTICA LINEAL

Cinemática: estudia el movimiento de un cuerpo ignorando las interacciones con agentes externos que pudieran modificar o causar dicho movimiento

**“Descripción del movimiento de los objetos
sin tener en cuenta las causas que lo producen”**

Movimiento: traslacional
 rotacional
 vibratorio

Para describirlo se usa el “modelo de partícula”: el objeto en movimiento se describe como una partícula u objeto puntual; es decir un objeto que tiene masa pero es de tamaño infinitesimal

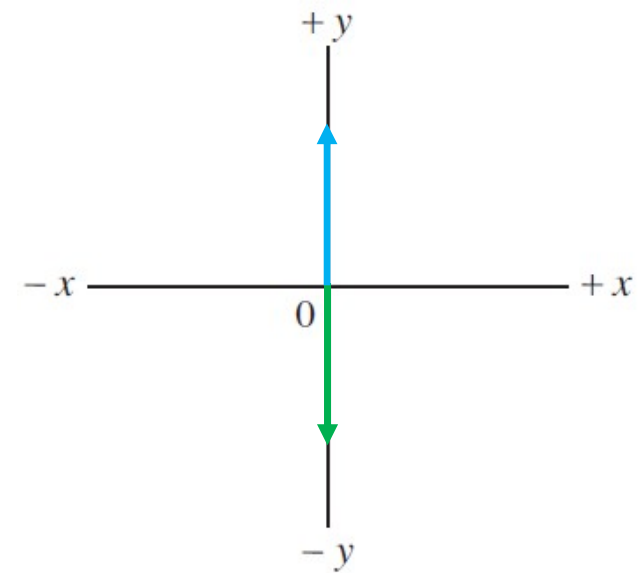
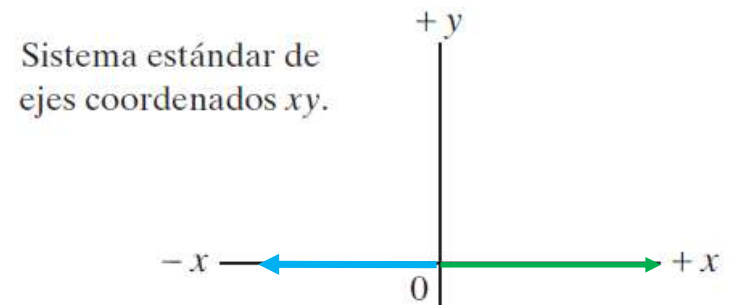


Sistemas de referencia:

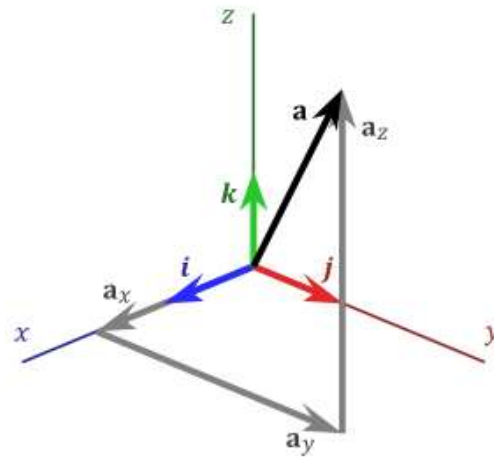
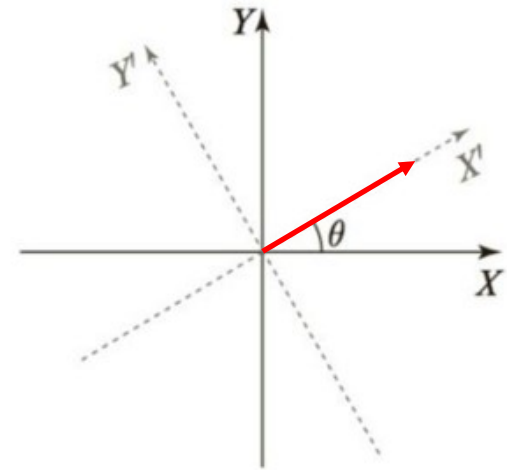
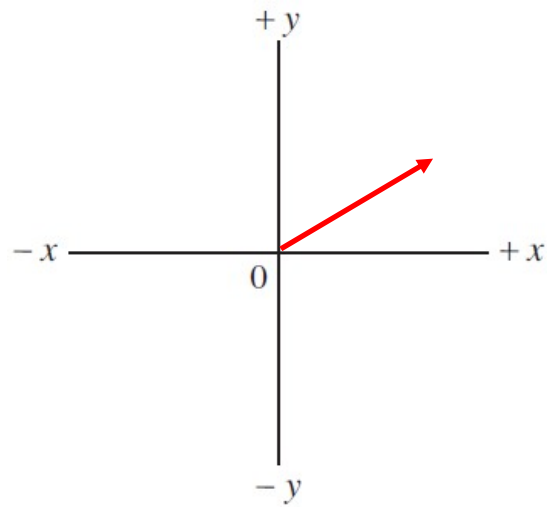
Movimiento unidimensional:

elegimos usualmente el eje x como la línea a lo largo de la cual se lleva a cabo el movimiento

Pero también podemos tener movimiento unidimensional en y

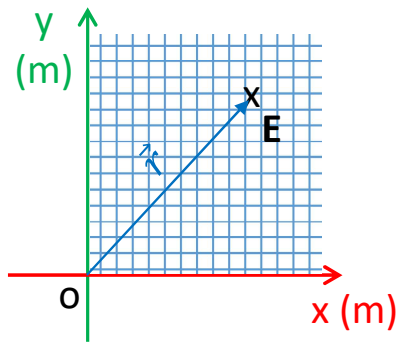


Sistemas de referencia:



Sistemas de referencia:

Posición: ubicación de la partícula respecto al origen del sistema coordenado elegido como sistema de referencia



$E = (E_x; E_y) \text{ m}$ **Vector posición:** es el vector con origen en el centro de coordenadas y fin en el punto de interés (en este caso el punto E)

$$\vec{r} = (r_x \hat{i} + r_y \hat{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r} = (r_x; r_y) \text{ m}$$

En un movimiento unidimensional, solo tendremos la coordenada que corresponde al eje en el cual el cuerpo se mueve.

Y a medida que se mueve, su posición cambia con el tiempo:

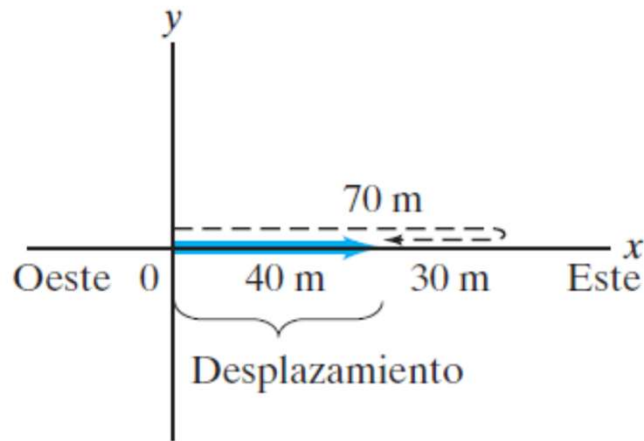
$$x(t)$$

$$y(t)$$

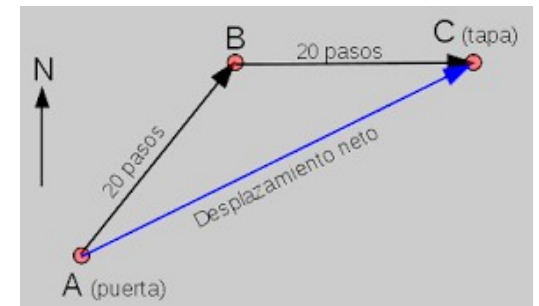
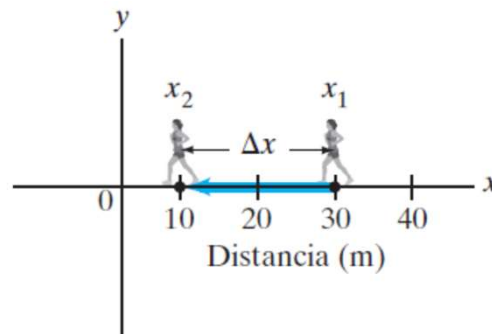
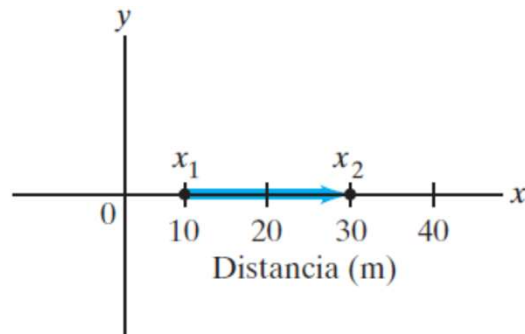
Desplazamiento: cambio de la posición de la partícula en algún intervalo de tiempo. Sólo depende de la posición inicial y de la posición final. Es una cantidad vectorial.

Si el movimiento es sólo en la dirección de las x ,

$$\Delta x = x_f - x_i$$



$$\Delta x = x_2 - x_1$$

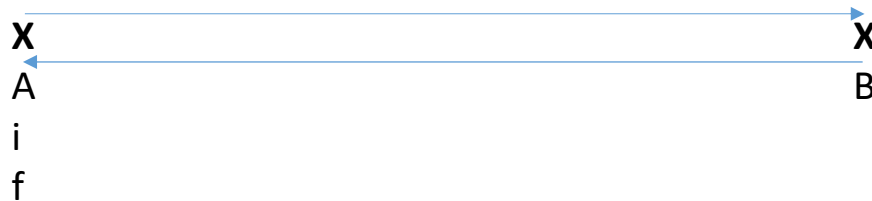


Desplazamiento: cambio de la posición de la partícula en algún intervalo de tiempo. Sólo depende de la posición inicial y de la posición final. Es una cantidad vectorial.

Si el movimiento es sólo en la dirección de las x , $\Delta x = x_f - x_i$

Distancia recorrida: es la longitud de la trayectoria seguida por la partícula, lo que recorrió, lo que “caminó”. Es una cantidad escalar. Es siempre positiva.

Si voy de un punto A hasta un punto B ida y vuelta, el desplazamiento va a ser 0, pero la distancia recorrida será dos veces la distancia entre A y B.



$$\Delta x = x_f - x_i = x_A - x_A = 0$$

$$\text{Distancia recorrida} = |x_B - x_A| + |x_A - x_B| = 2 |x_B - x_A|$$

Velocidad media:

“velocidad”



es un vector (módulo, dirección y sentido)

“rapidez”

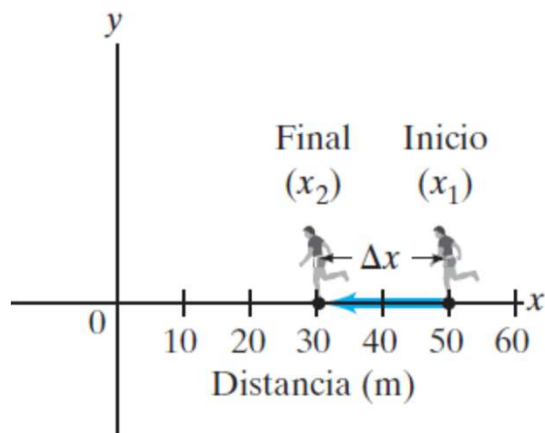


se refiere al módulo

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\text{posición final} - \text{posición inicial}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Velocidad promedio de un corredor. La posición de un corredor en función del tiempo se grafica conforme se mueve a lo largo del eje x de un sistema coordenado. Durante un intervalo de tiempo de 3.00 s, la posición del corredor cambia de $x_1 = 50.0$ m a $x_2 = 30.5$ m, como se muestra en la figura. ¿Cuál fue la velocidad promedio del corredor?

PLANTEAMIENTO Se necesita encontrar la velocidad promedio, que equivale al desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido.

SOLUCIÓN El desplazamiento es $\Delta x = x_2 - x_1 = 30.5 \text{ m} - 50.0 \text{ m} = -19.5 \text{ m}$. El tiempo transcurrido, o intervalo de tiempo, es $\Delta t = 3.00 \text{ s}$. Por lo tanto, la velocidad promedio es

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-19.5 \text{ m}}{3.00 \text{ s}} = -6.50 \text{ m/s}.$$

El desplazamiento y la velocidad promedio son negativos, lo cual nos indica que el corredor se mueve hacia la izquierda a lo largo del eje x , como señala la flecha en la figura. Así, afirmaremos que la velocidad promedio del corredor es de 6.50 m/s hacia la izquierda.

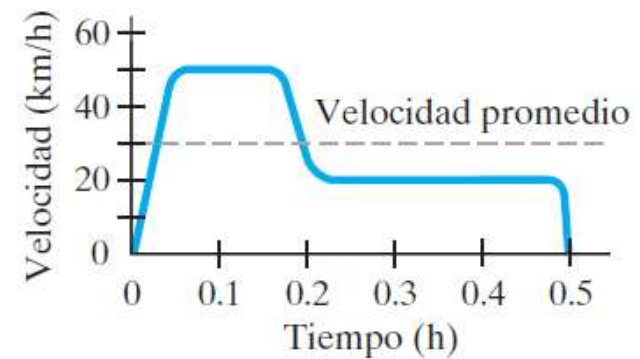
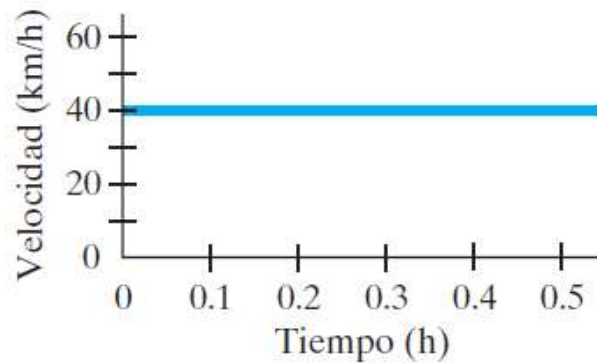
Velocidad instantánea:

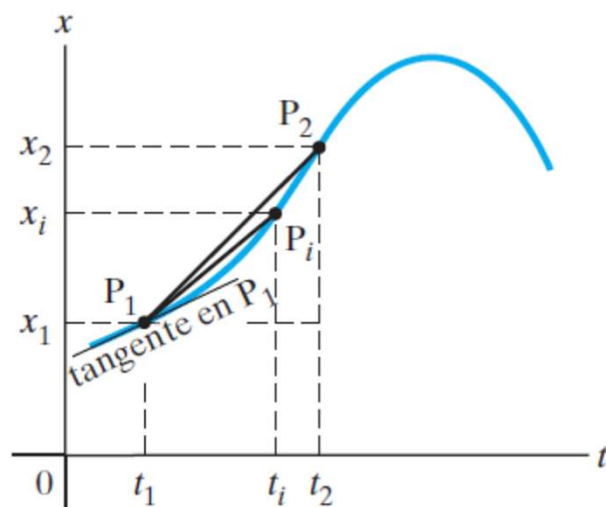
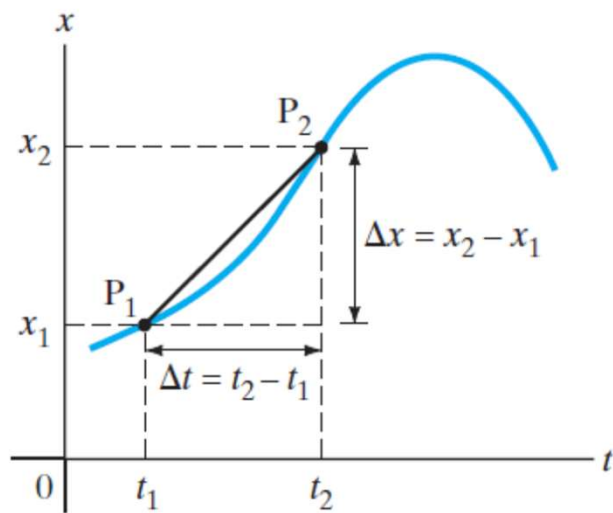


$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

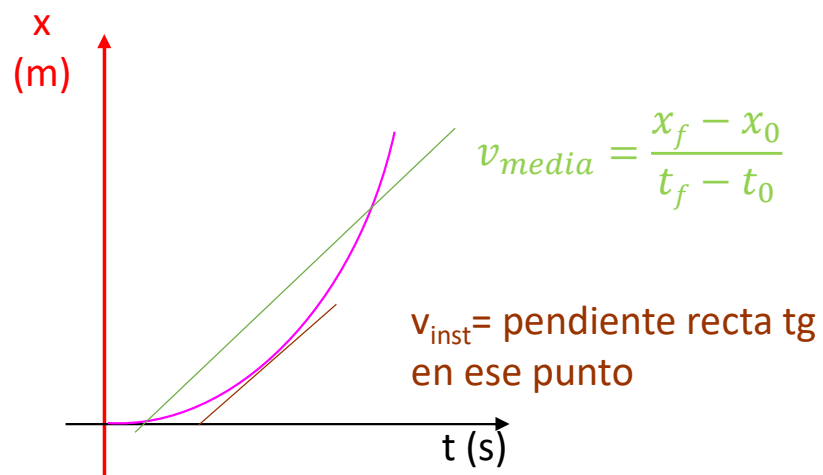
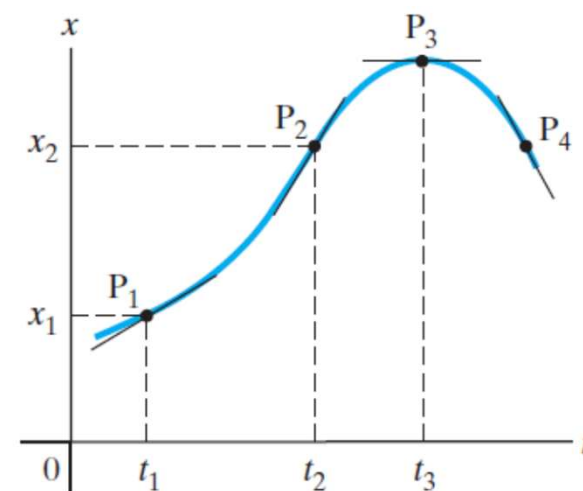
“es la velocidad media durante un intervalo de tiempo infinitesimalmente corto”

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

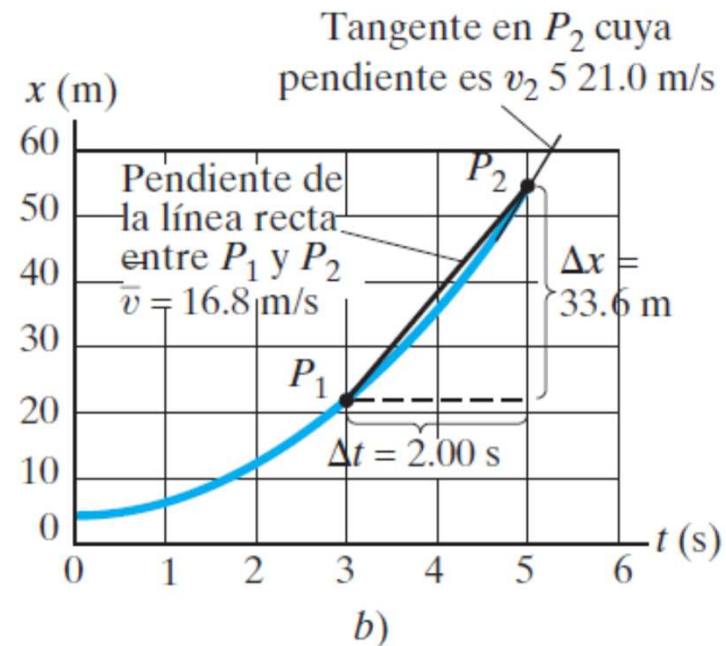
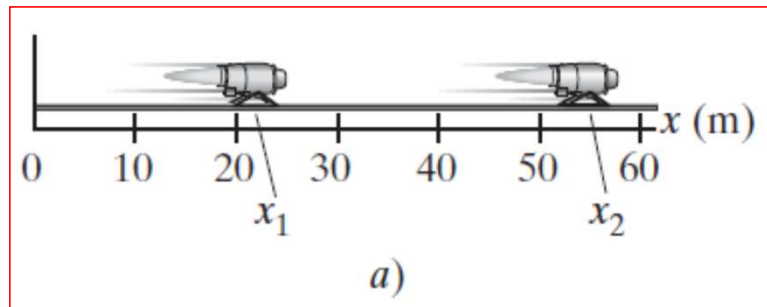




$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Dada x como función de t . Un motor de propulsión a chorro se mueve a lo largo de una pista experimental (que llamamos el eje x) como se muestra en la figura a. Trataremos al motor como si fuera una partícula. Su posición en función del tiempo está dada por la ecuación $x = At^2 + B$ donde $A = 2.10 \text{ m/s}^2$ y $B = 2.80 \text{ m}$; esta ecuación se grafica en la figura b. a) Determine el desplazamiento del motor durante el intervalo de tiempo de $t_1 = 3.00 \text{ s}$ a $t_2 = 5.00 \text{ s}$. b) Determine la velocidad promedio durante este intervalo de tiempo. c) Determine la magnitud de la velocidad instantánea en $t = 5.00 \text{ s}$.



Aceleración media:

“es el cambio de la velocidad (instantánea) en un intervalo de tiempo”

$$\text{aceleración promedio} = \frac{\text{cambio de velocidad}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

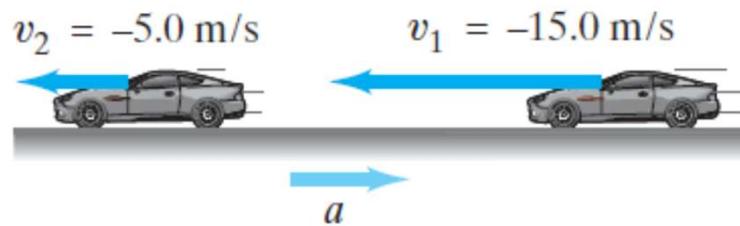
Unidades: $\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Tener en cuenta que:

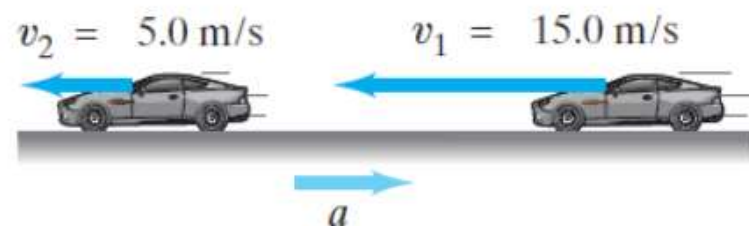
- ✓ **velocidad:** nos dice qué tan rápido cambia la posición
- ✓ **aceleración:** nos dice qué tan rápido cambia la velocidad

Velocidad y aceleración.

- a) Si la velocidad de un objeto es cero, ¿significa esto que la aceleración es cero?
b) Si la aceleración es cero, ¿significa esto que la velocidad es cero?



$$\begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \\ &= \frac{(-5.0 \text{ m/s}) - (-15.0 \text{ m/s})}{5.0 \text{ s}} \\ &= \frac{-5.0 \text{ m/s} + 15.0 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = +2.0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



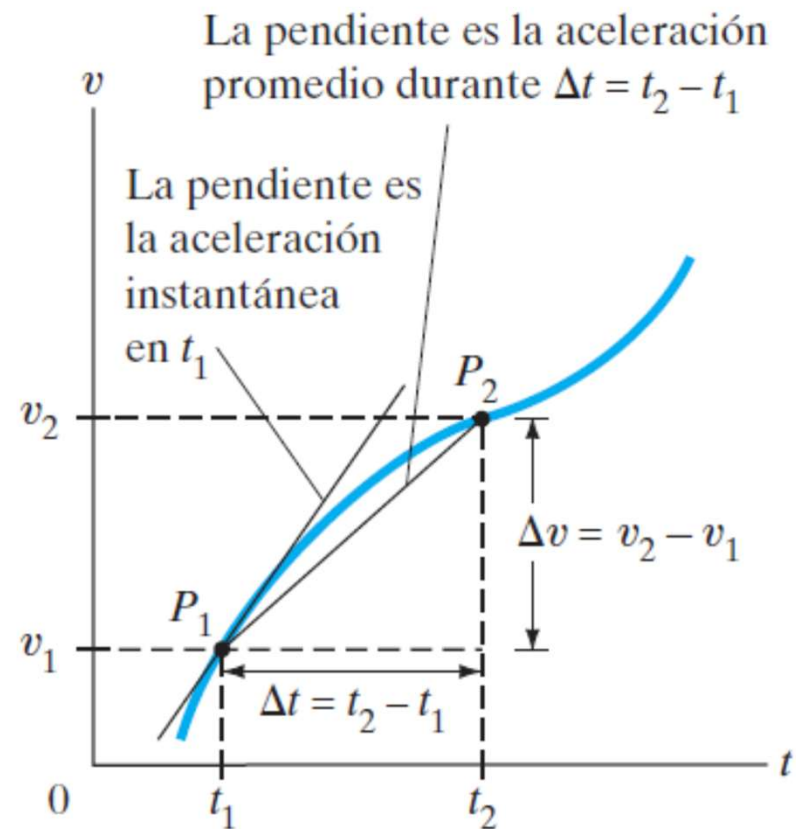
$$\begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \\ &= \frac{(+5.0 \text{ m/s}) - (+15.0 \text{ m/s})}{5.0 \text{ s}} \\ &= \frac{5.0 \text{ m/s} - 15.0 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Aceleración instantánea:

“es el valor límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero”

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$



Aceleración a partir de $x(t)$. Una partícula se mueve en una línea recta, de manera que su posición como función del tiempo está dada por la ecuación $x = (2.10 \text{ m/s}^2)t^2 + (2.80 \text{ m})$. Calcule a) su aceleración promedio durante el intervalo de tiempo de $t_1 = 3.00 \text{ s}$ a $t_2 = 5.00 \text{ s}$, y b) su aceleración instantánea como función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Para determinar la aceleración, primero debemos encontrar la velocidad en t_1 y en t_2 diferenciando x : $v = dx/dt$. Después, usamos la ecuación para encontrar la aceleración promedio, y la ecuación para encontrar la aceleración instantánea.

SOLUCIÓN a) La velocidad en cualquier tiempo t es

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [(2.10 \text{ m/s}^2)t^2 + 2.80 \text{ m}] = (4.20 \text{ m/s}^2)t,$$

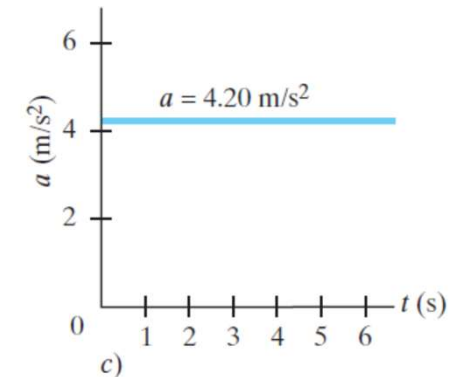
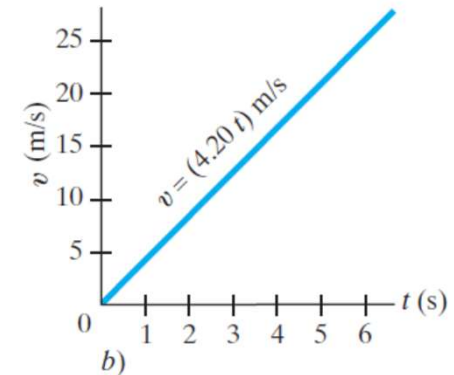
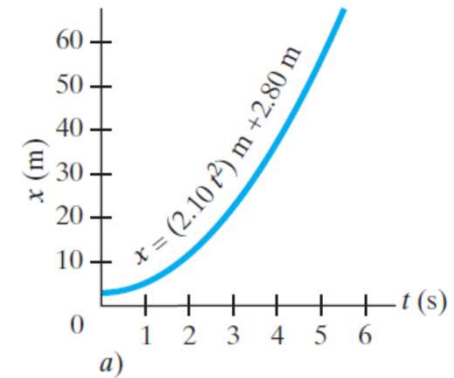
Por lo tanto, en $t_1 = 3.00 \text{ s}$, $v_1 = (4.20 \text{ m/s}^2)(3.00 \text{ s}) = 12.6 \text{ m/s}$ y en $t_2 = 5.00 \text{ s}$, $v_2 = 21.0 \text{ m/s}$. Así que,

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{21.0 \text{ m/s} - 12.6 \text{ m/s}}{5.00 \text{ s} - 3.00 \text{ s}} = 4.20 \text{ m/s}^2.$$

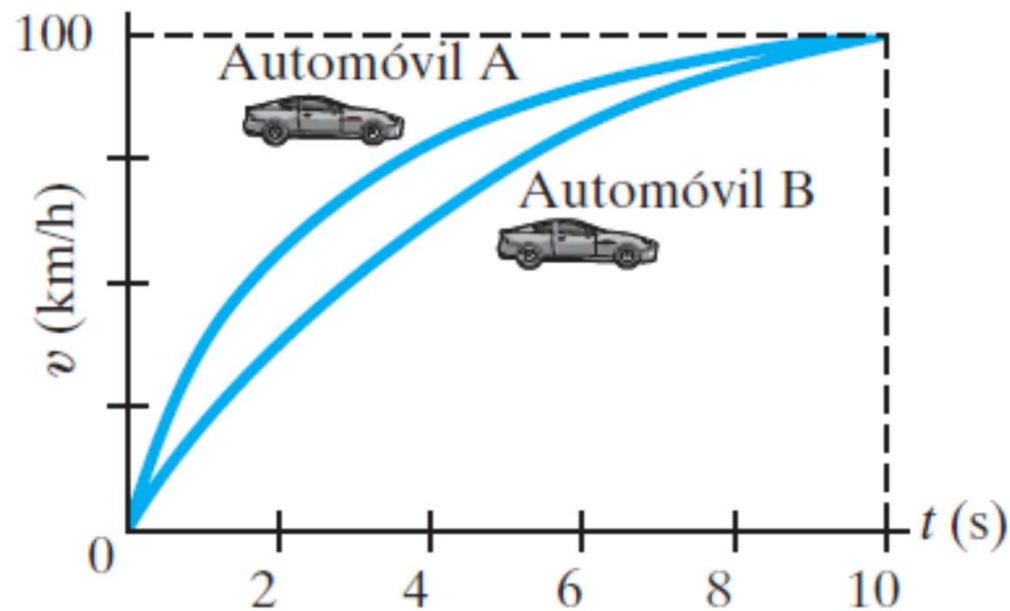
b) Dada ahora $v = (4.20 \text{ m/s}^2)t$, la aceleración instantánea en cualquier tiempo es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [(4.20 \text{ m/s}^2)t] = 4.20 \text{ m/s}^2.$$

La aceleración en este caso es constante y no depende del tiempo. La figura muestra las gráficas de a) x versus t , b) v versus t , que crece linealmente como se calculó arriba, y c) a versus t , que es una línea recta horizontal porque $a = \text{constante}$.



Análisis con gráficas. La figura muestra la velocidad como función del tiempo para dos automóviles que aceleran de 0 a 100 km/h en un tiempo de 10.0 s. Compare *a)* la aceleración promedio; *b)* la aceleración instantánea; y *c)* la distancia total recorrida por los dos automóviles.



Movimiento con aceleración constante:

simplificamos el problema suponiendo que: $t_1 = t_0 = 0$

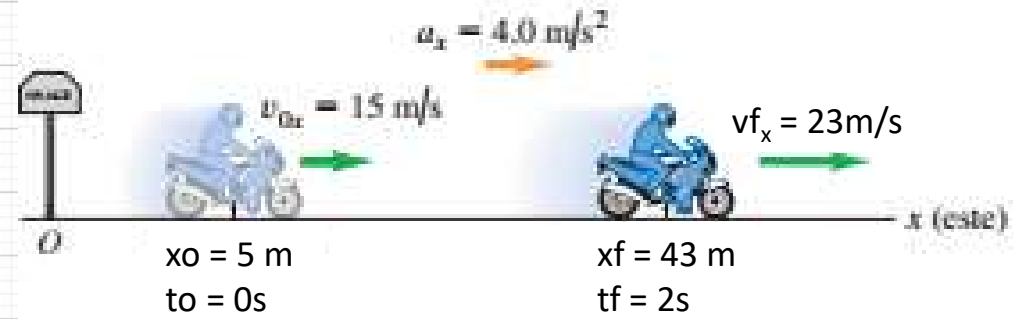
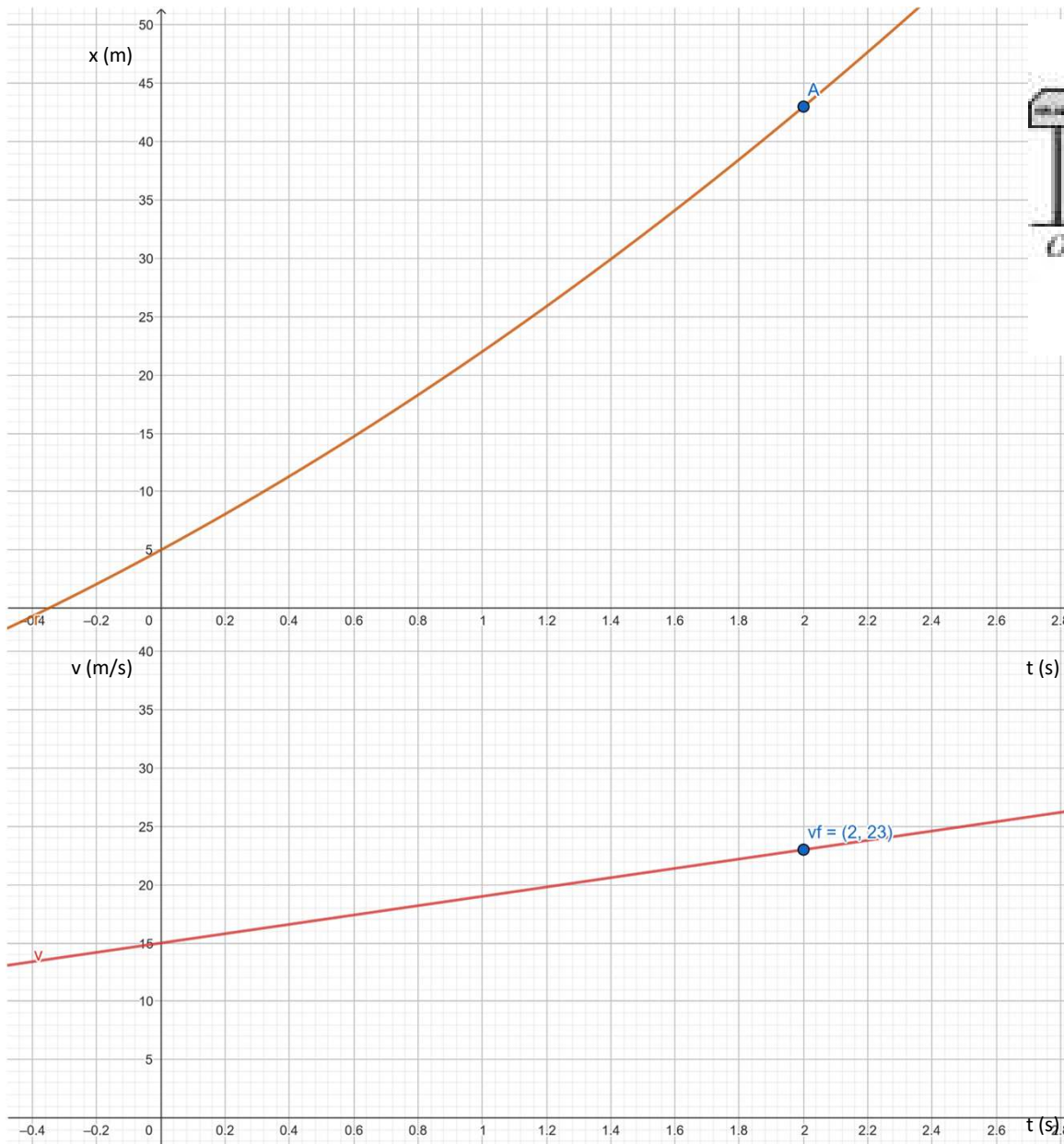
velocidad media: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}$

aceleración media (constante en el tiempo): $a = \frac{v - v_0}{t}$

velocidad instantánea: $v = v_0 + at$

posición: $x = x_0 + \bar{v}t$

pero, como $a = cte$: $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$



Motociclista que viaja a aceleración constante

$$\check{v} = \frac{x_f - x_0}{t} \quad \check{v} = \frac{v_f + v_0}{2}$$

$$\check{v} = \frac{43\text{m} - 5\text{m}}{2\text{s}} \quad \check{v} = \frac{23\frac{\text{m}}{\text{s}} + 15\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}$$

$$\check{v} = 19\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \check{v} = 19\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Movimiento con aceleración constante:

simplificamos el problema suponiendo que: $t_1 = t_0 = 0$

velocidad media: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}$

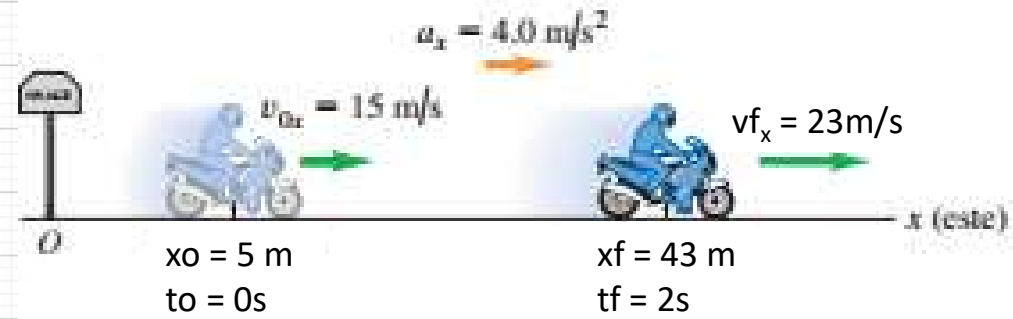
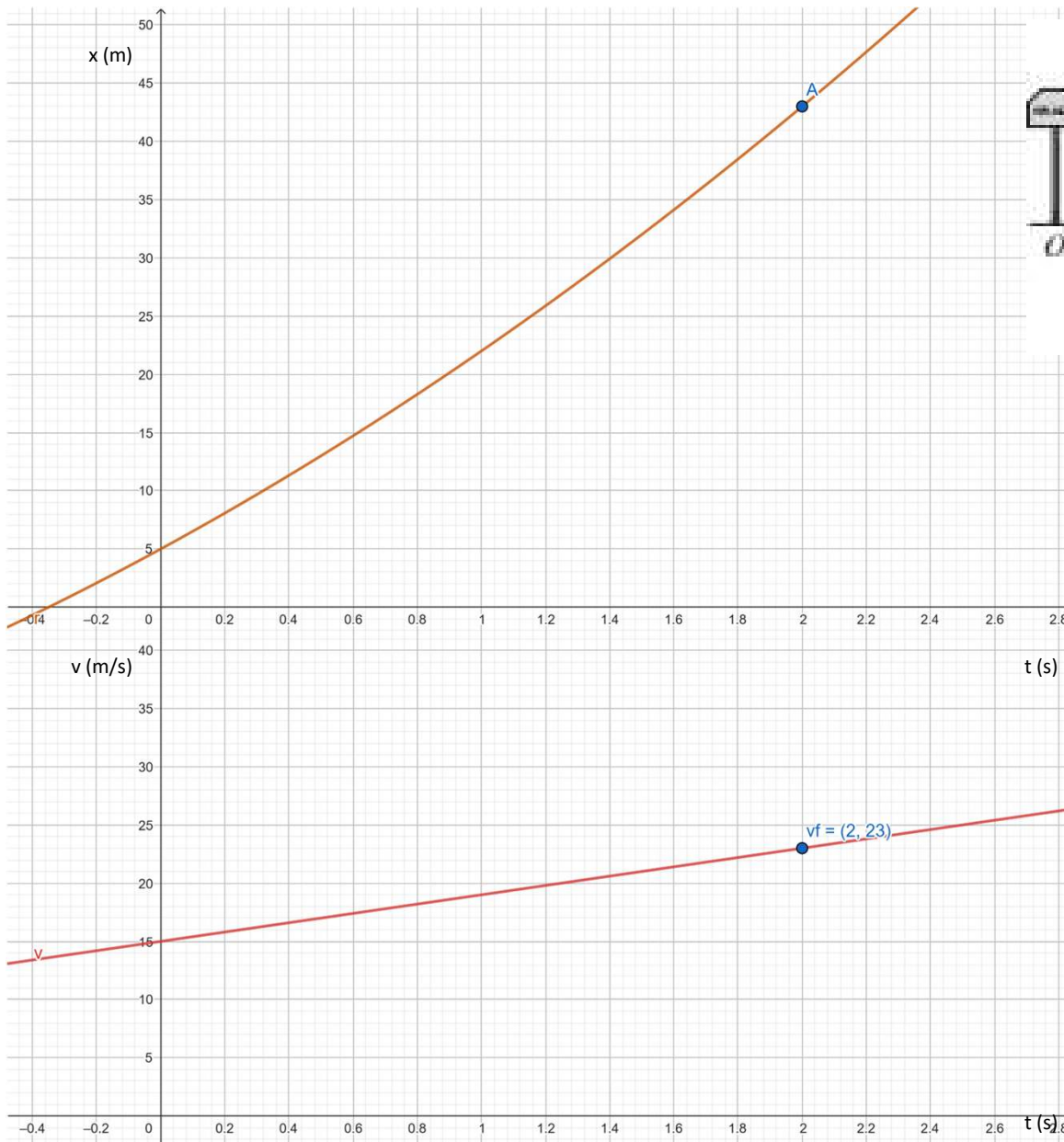
aceleración media (constante en el tiempo): $a = \frac{v - v_0}{t}$

velocidad instantánea: $v = v_0 + at$

posición: $x = x_0 + \bar{v}t$

pero, como $a = \text{cte}$: $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \bar{v}t \\&= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \\&= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right)t \\x &= x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2\end{aligned}$$



Motociclista que viaja a aceleración constante

$$\check{v} = \frac{x_f - x_0}{t}$$

$$\check{v} = \frac{v_f + v_0}{2}$$

$$\check{v} = \frac{43\text{ m} - 5}{2\text{ s}}$$

$$\check{v} = \frac{23\frac{\text{m}}{\text{s}} + 15\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}$$

$$\check{v} = 19\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\check{v} = 19\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x(t) = 5\text{ m} + 15\frac{\text{m}}{\text{s}} t + \frac{1}{2} 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2$$

$$v(t) = 15\frac{\text{m}}{\text{s}} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$$

Movimiento con aceleración constante:

$$\Rightarrow x = x_0 + \bar{v}t = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$$

A continuación despejamos t de la ecuación

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación anterior, resulta

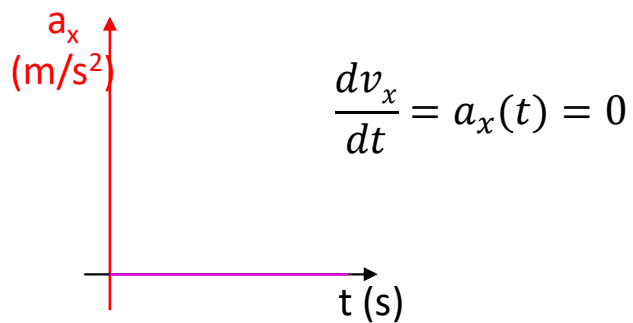
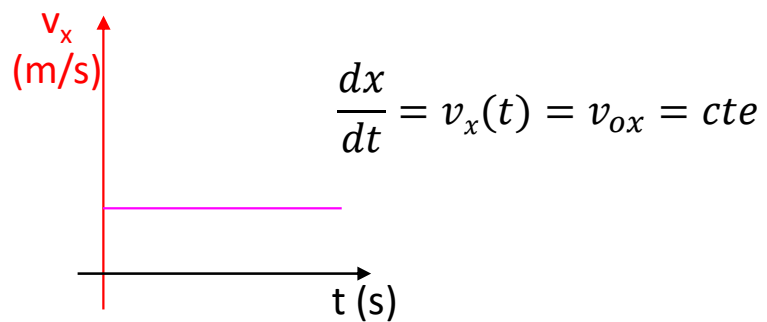
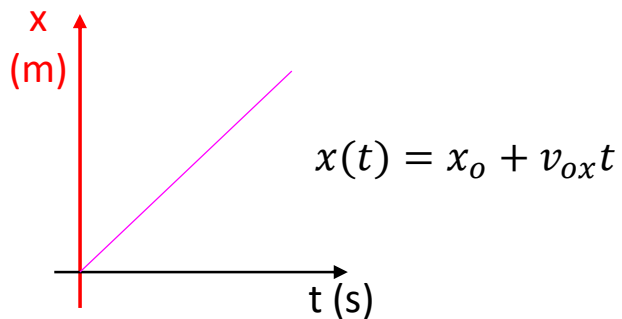
$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Despejamos v^2 en esta ecuación y obtenemos

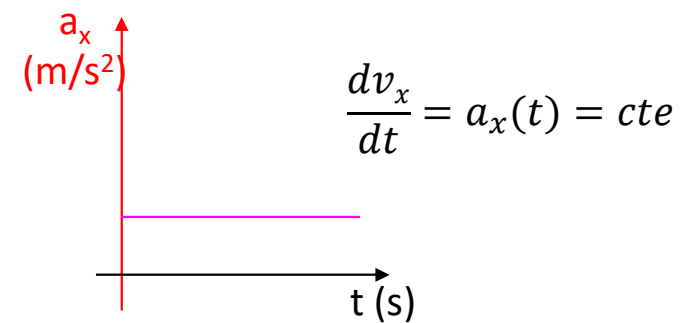
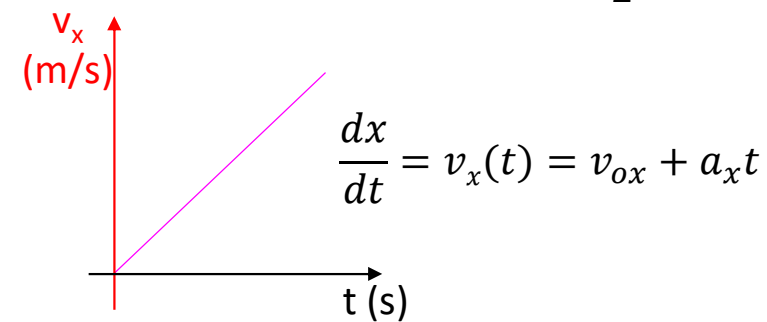
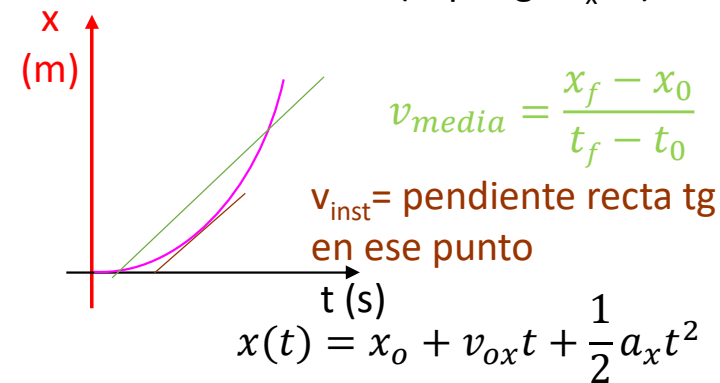
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

[aceleración constante]

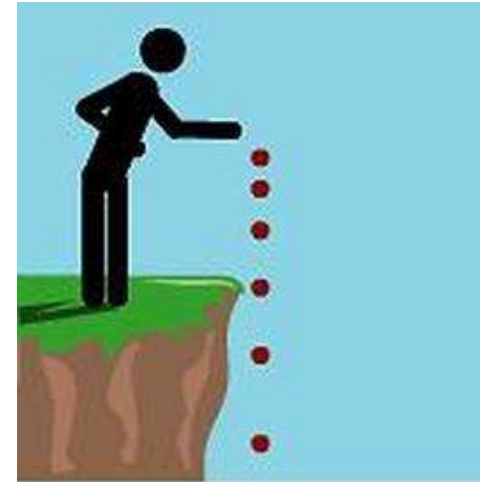
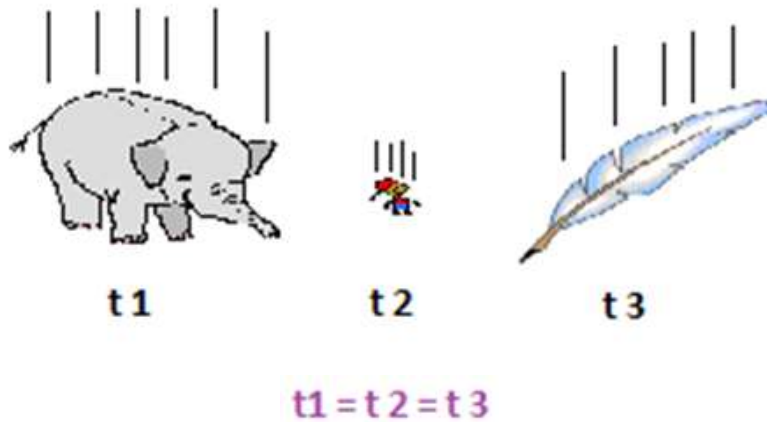
MRU



MRUV (supongo $a_x > 0$)



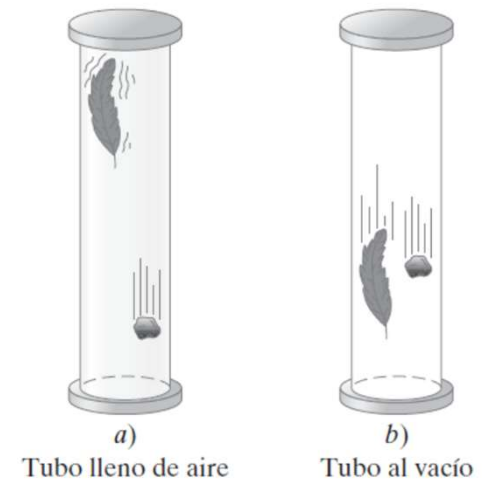
Caída libre de objetos:



“en un lugar dado de la Tierra y en ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma aceleración constante”

Aceleración de la gravedad:

$g = 9,80 \text{ m/s}^2$ (en la superficie terrestre)



Caída desde una torre. Suponga que una pelota se deja caer ($v_0 = 0$) desde una torre de 70.0 m de altura. ¿Cuánto habrá caído después de un tiempo $t_1 = 1.00$ s, $t_2 = 2.00$ s y $t_3 = 3.00$ s? Desprecie la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Se toma y como positivo hacia abajo, de manera que la aceleración es $a = g = +9.80$ m/s². Sea $v_0 = 0$ y $y_0 = 0$. Queremos encontrar la posición y de la pelota después de tres intervalos de tiempo diferentes. La ecuación vista, con x sustituida por y , relaciona las cantidades dadas (t , a y v_0) y la incógnita y .

SOLUCIÓN Se establece $t = t_1 = 1.00$ s en la ecuación

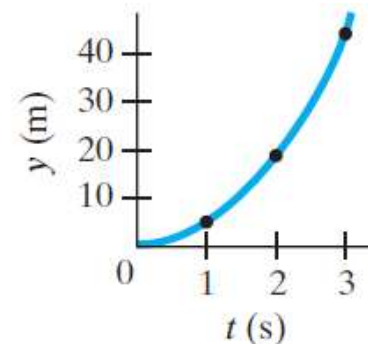
$$y_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = 0 + \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} (9.80 \text{ m/s}^2) (1.00 \text{ s})^2 = 4.90 \text{ m}.$$

La pelota ha caído una distancia de 4.90 m durante el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t_1 = 1.00$ s. Similarmente, después de 2.00 s ($= t_2$), la posición de la pelota es

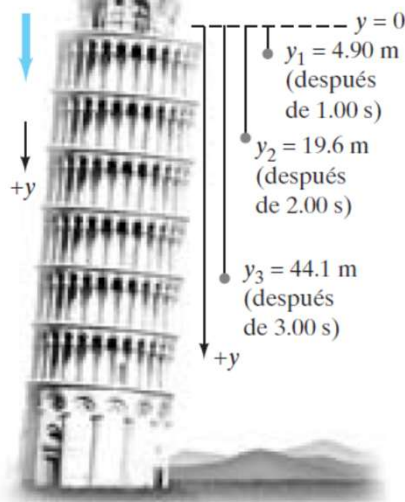
$$y_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 = \frac{1}{2} (9.80 \text{ m/s}^2) (2.00 \text{ s})^2 = 19.6 \text{ m}.$$

y finalmente después de 3.00 s ($= t_3$), la posición de la pelota es (véase la figura)

$$y_3 = \frac{1}{2} a t_3^2 = \frac{1}{2} (9.80 \text{ m/s}^2) (3.00 \text{ s})^2 = 44.1 \text{ m}.$$



Aceleración
debida a la
gravedad



Lanzamiento hacia abajo desde una torre. Suponga que la pelota se *lanza* hacia abajo con una velocidad inicial de 3.00 m/s, en vez de simplemente dejarse caer. *a)* ¿Cuál sería entonces su posición después de 1.00 s y 2.00 s? *b)* ¿Cuál sería su rapidez después de 1.00 s y 2.00 s? Compare estos valores con las rapidezces del ejemplo anterior.

PLANTEAMIENTO De nuevo utilizamos la ecuación vista, pero ahora v_0 no es cero, es $v_0 = 3.00$ m/s hacia abajo.

SOLUCIÓN *a)* En $t = 1.00$ s, la posición de la pelota dada por la ecuación es

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (3.00 \text{ m/s})(1.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(1.00 \text{ s})^2 = 7.90 \text{ m}.$$

En $t = 2.00$ s, (intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2.00$ s), la posición es

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (3.00 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 = 25.6 \text{ m}.$$

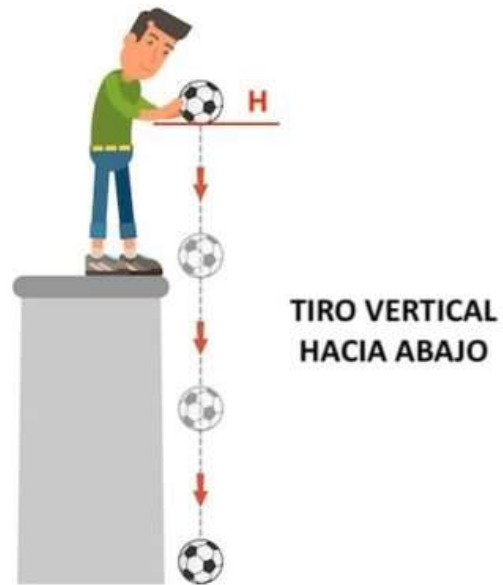
Como se esperaba, la pelota cae más rápido cada segundo que si se dejara caer con $v_0 = 0$. *b)* La velocidad se obtiene con la ecuación:

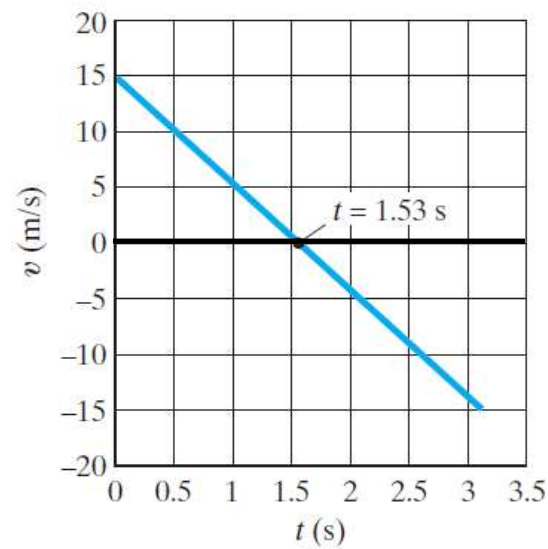
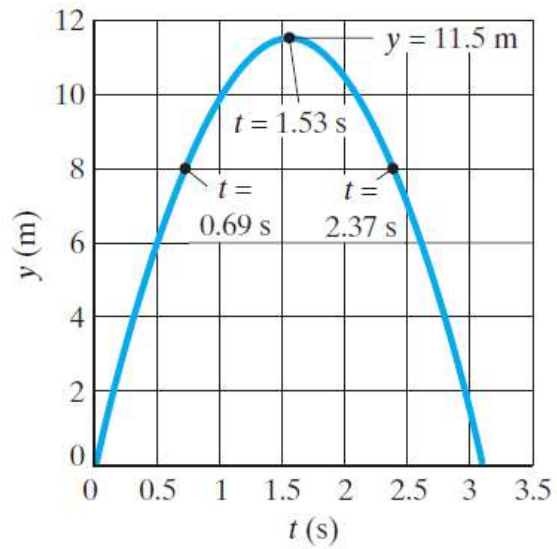
$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 3.00 \text{ m/s} + (9.80 \text{ m/s}^2)(1.00 \text{ s}) = 12.8 \text{ m/s} \quad [\text{en } t_1 = 1.00 \text{ s}] \\ &= 3.00 \text{ m/s} + (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 22.6 \text{ m/s}. \quad [\text{en } t_2 = 2.00 \text{ s}] \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior, cuando la pelota se deja caer ($v_0 = 0$), el primer término (v_0) en las ecuaciones anteriores era cero, por lo que

$$\begin{aligned} v &= 0 + at \\ &= (9.80 \text{ m/s}^2)(1.00 \text{ s}) = 9.80 \text{ m/s} && [\text{en } t_1 = 1.00 \text{ s}] \\ &= (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 19.6 \text{ m/s}. && [\text{en } t_2 = 2.00 \text{ s}] \end{aligned}$$

Tiro vertical:

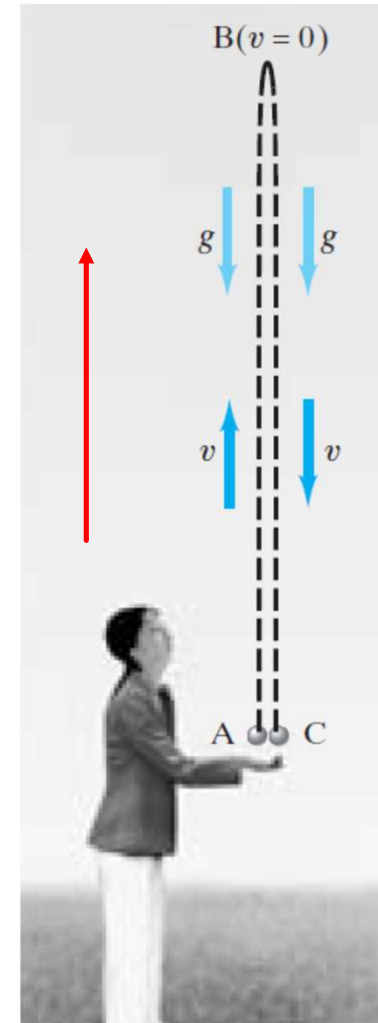


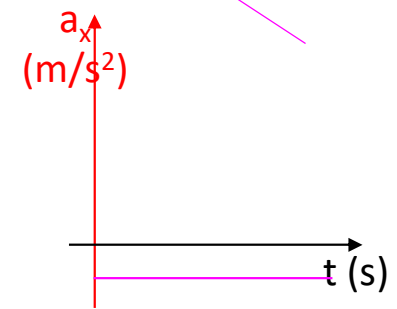
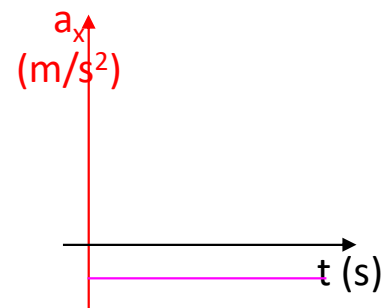
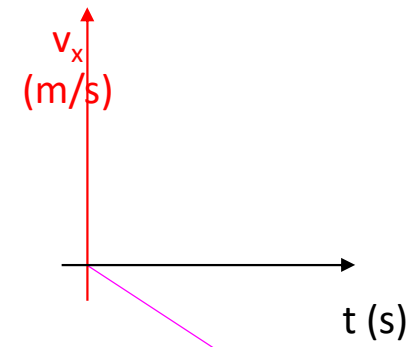
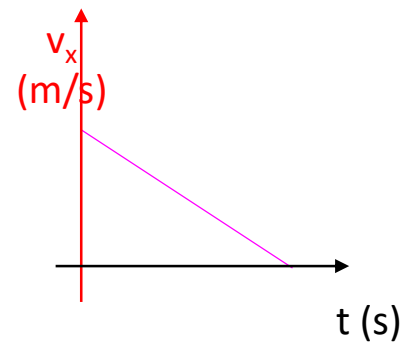
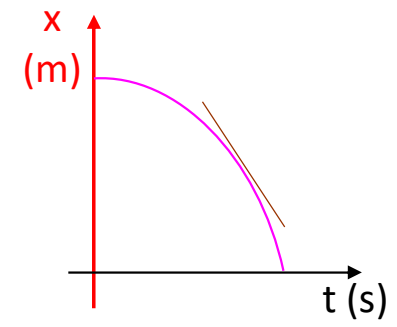
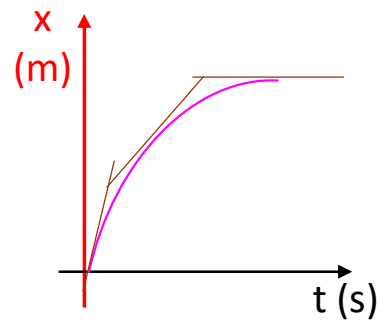


¿Hacia donde apunta el eje y ?

¿Cuánto tiempo tarda “en subida”?

¿Cuánto tiempo tarda “en bajada”?





Aceleración variable. Cálculo integral:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

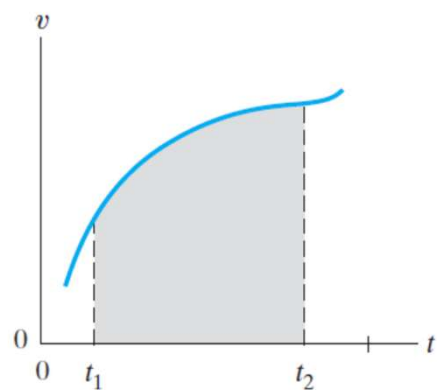
$$dv = a dt$$

$$\int_{v=v_0}^v dv = \int_{t=0}^t a dt$$

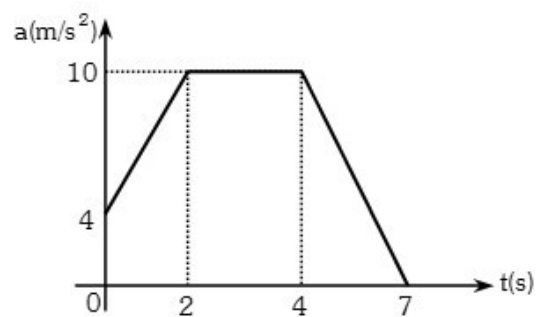
Si $a = cte$, entonces $v - v_0 = at$

Posición:

$$\left. \begin{array}{l} v = \frac{dx}{dt} \\ dx = v dt \\ dx = (v_0 + at)dt \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{x=x_0}^x dx = \int_{t=0}^t (v_0 + at) dt \\ x - x_0 = \int_{t=0}^t v_0 dt + \int_{t=0}^t at dt \\ x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{array} \right.$$



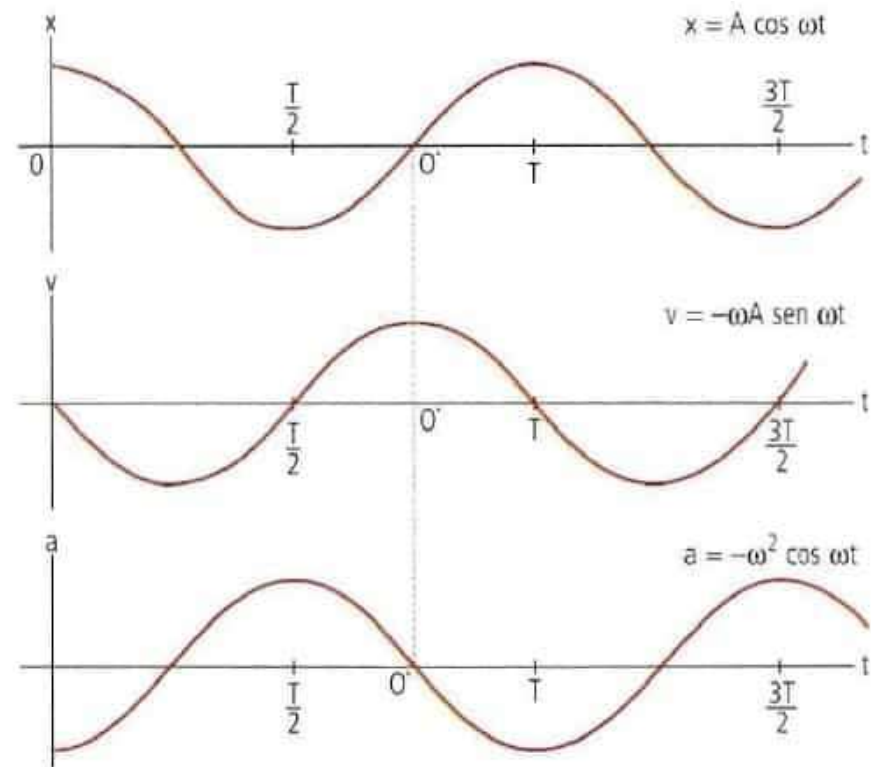
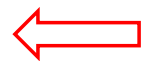
$$\Rightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$



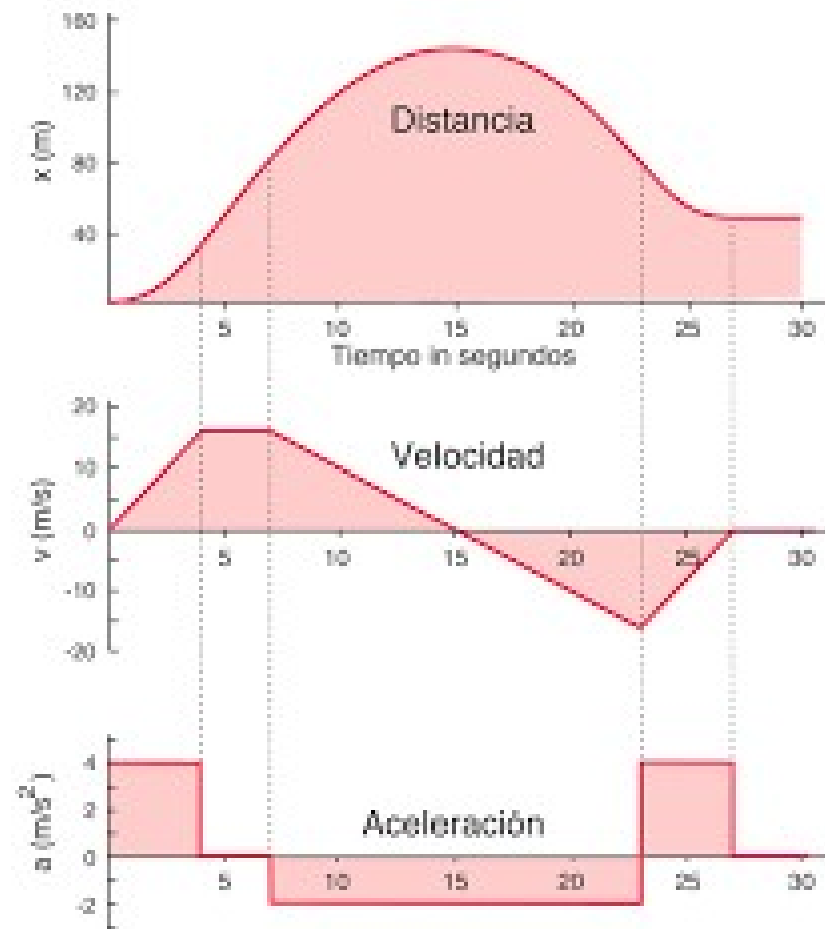
$$\Rightarrow v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$



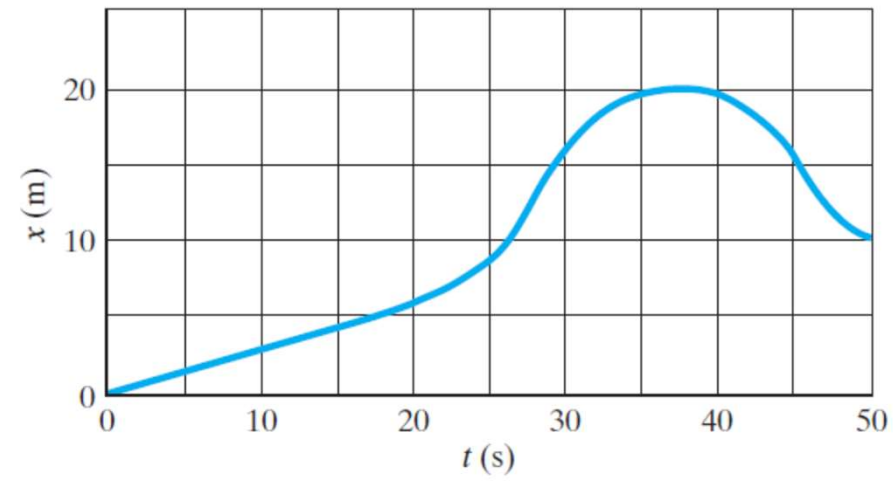
Análisis de gráficas:



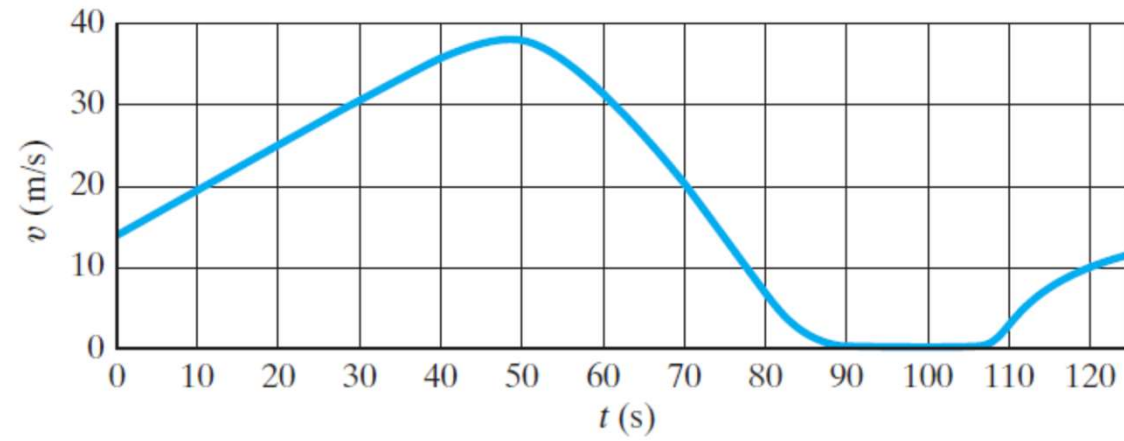
$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

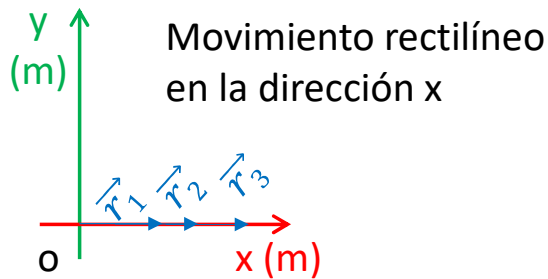
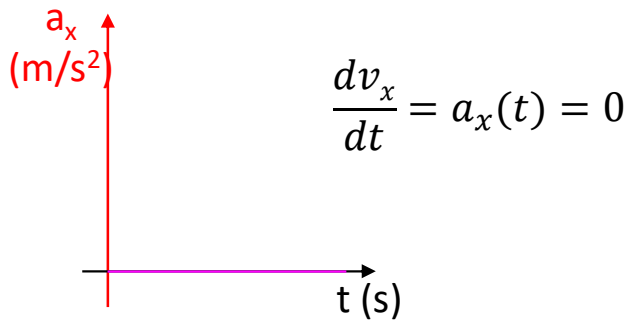
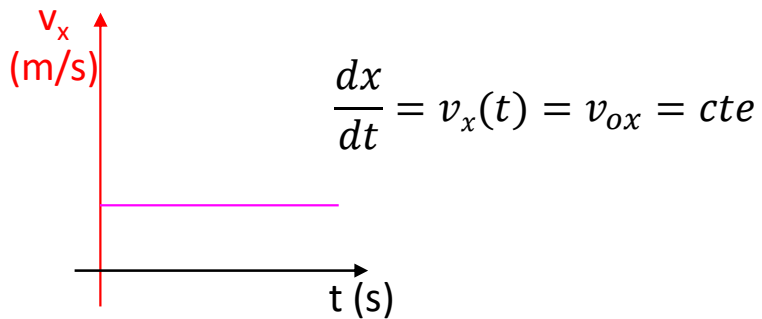
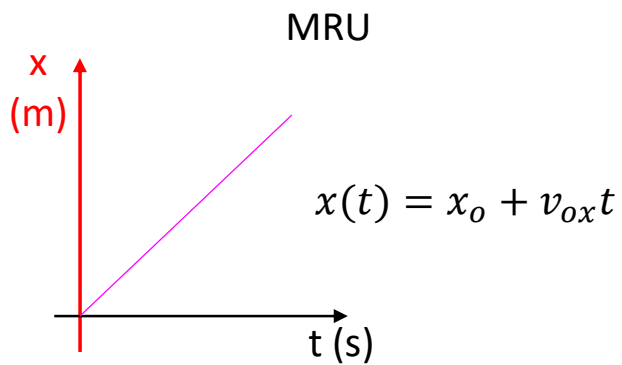
$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Describir el tipo de movimiento:



Describir el tipo de movimiento:





$$\vec{r}(t) = (x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j})$$

$y(t) = 0$ (porque no hay movimiento en y)

$x(t) =$ depende de si es MRU o MRUV

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j})$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j})$$

