

Torque de una fuerza:

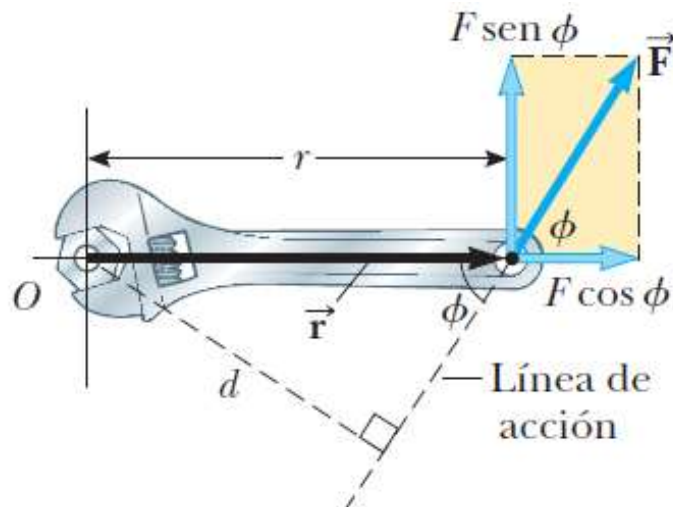


Si queremos abrir una puerta y se aplica una fuerza de magnitud F , perpendicular a la superficie de la puerta cerca de las bisagras y luego en diferentes distancias desde las bisagras, se logrará una relación de rotación mas rápida para la puerta, al aplicar la fuerza cerca de la manija que al aplicarla cerca de las bisagras.

Cuando se ejerce una fuerza en un objeto rígido que se articula en torno a un eje, el objeto tiende a dar vuelta en torno a dicho eje.

La tendencia de una fuerza a dar vuelta un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada **torque** o **momento de torsión** de una fuerza τ (letra griega tau).

El momento de torsión es un vector.



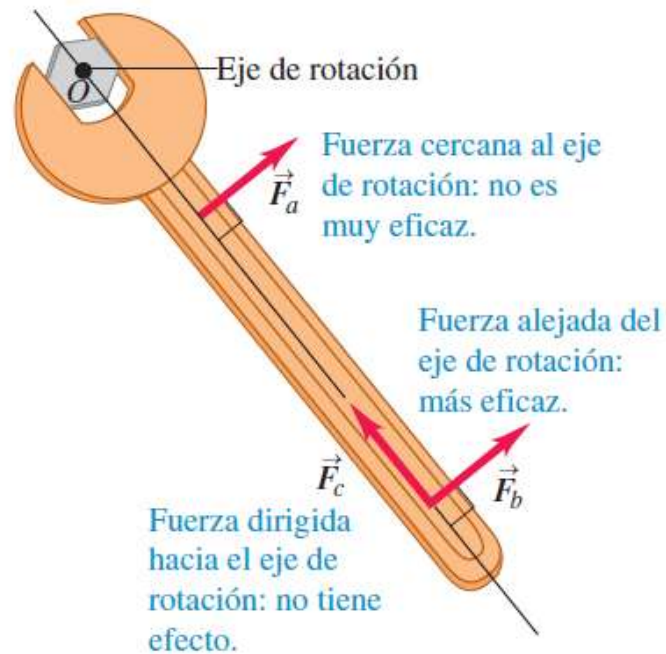
$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

$$[\tau]_{SI} = \text{N} \cdot \text{m}$$

La única componente de $\vec{F}$ que tiende a causar rotación de la llave en torno a un eje a través de O es $F \sin \phi$, la componente perpendicular a la línea dibujada desde el eje de rotación hacia el punto de aplicación de la fuerza.

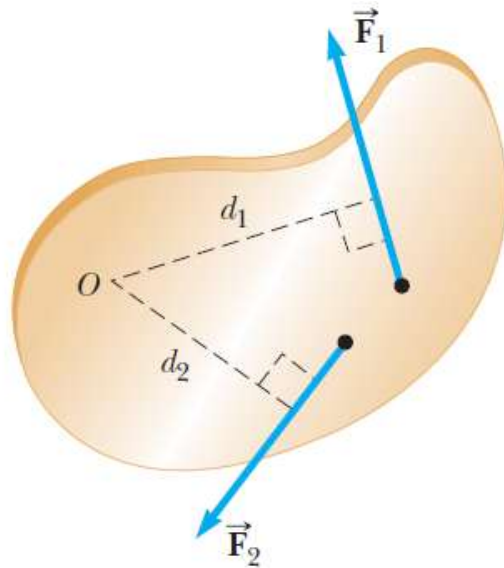
La componente horizontal $F \cos \phi$, dado que su línea de acción pasa a través de O , no tiene tendencia a producir rotación en torno a un eje que pase a través de O .

La tendencia a la rotación aumenta a medida que F aumenta y a medida que d aumenta, lo que explica por qué es más fácil dar vuelta a una puerta si se empuja por la manija en lugar de hacerlo en un punto cerca de las bisagras.



Si dos o mas fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O .

En este ejemplo, $\mathbf{F}_2$ tiende a hacer girar el objeto en sentido horario y $\mathbf{F}_1$ tiende a hacer girar el objeto en sentido anti-horario.



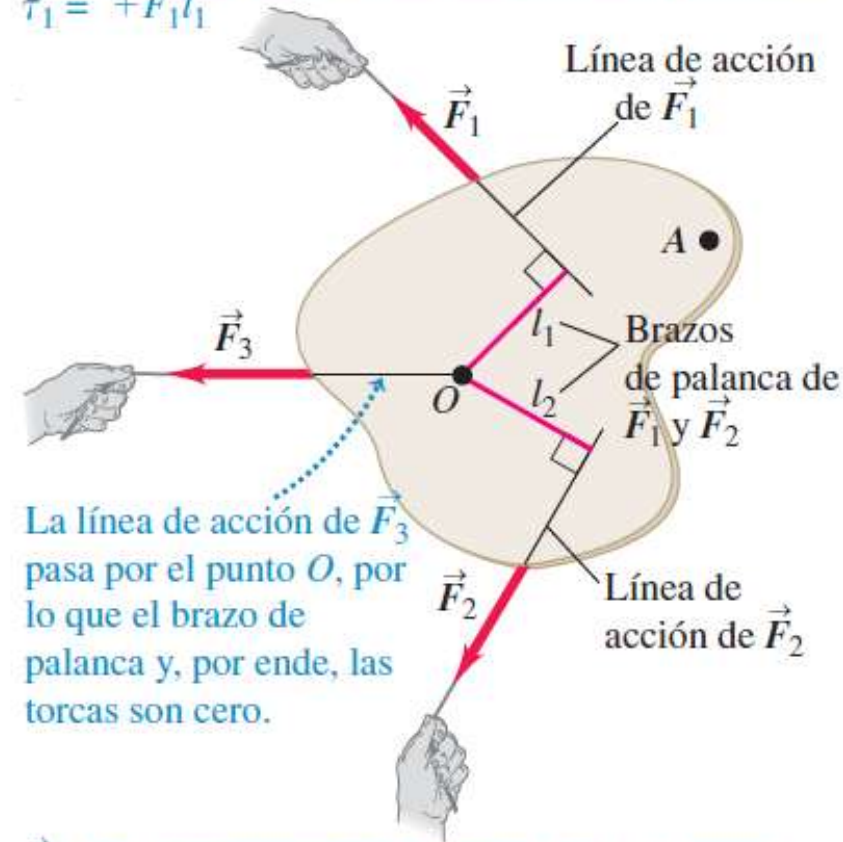
$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

Convenio de signos:

- ✓ Tendencia al giro en sentido **anti-horario**: torque positivo (+)
- ✓ Tendencia al giro en sentido **horario**: torque negativo (-)

$\vec{F}_1$ tiende a provocar rotación en *sentido antihorario* alrededor del punto O , así que la torca es *positiva*:

$$\tau_1 = +F_1 l_1$$



La línea de acción de $\vec{F}_3$ pasa por el punto O , por lo que el brazo de palanca y, por ende, las torcas son cero.

$\vec{F}_2$ tiende a provocar rotación en *sentido horario* alrededor del punto O , así que la torca es *negativa*: $\tau_2 = -F_2 l_2$.

EJEMPLO El momento de torsión neto sobre un cilindro

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una soga enrollada en torno al tambor, que tiene radio R_1 , ejerce una fuerza $\vec{T}_1$ hacia la derecha sobre el cilindro. Una soga enrollada en torno a la parte central, que tiene radio R_2 , ejerce una fuerza $\vec{T}_2$ hacia abajo sobre el cilindro.

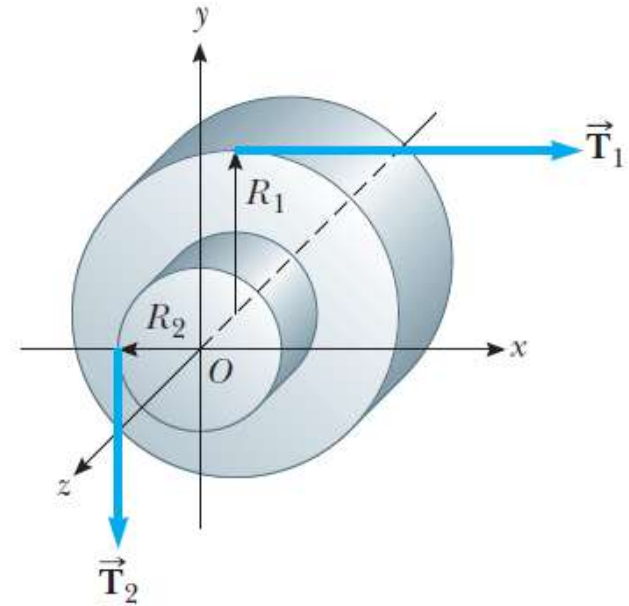
A) ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa en el cilindro en torno al eje de rotación (que es el eje z en la figura)?

B) Suponga $T_1 = 5.0 \text{ N}$, $R_1 = 1.0 \text{ m}$, $T_2 = 15.0 \text{ N}$ y $R_2 = 0.50 \text{ m}$.

¿Cuál es el momento de torsión neto en torno al eje de rotación, y de qué forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2 T_2 - R_1 T_1$$

$$\sum \tau = (0.50 \text{ m})(15 \text{ N}) - (1.0 \text{ m})(5.0 \text{ N}) = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$



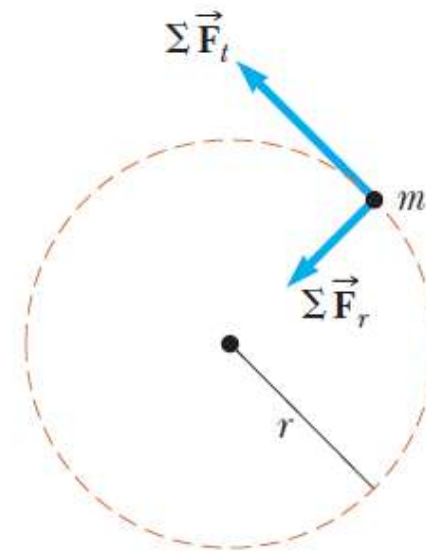
Objeto con momento de torsión neto (o resultante):

$$\sum F_t = ma_t$$

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r$$

$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

$$\boxed{\sum \tau = I\alpha}$$



El momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular, y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia.

$$\sum \tau = I\alpha$$

Si tenemos un objeto rígido de forma arbitraria que gira en torno a un eje fijo, como en la figura, el objeto puede considerarse constituido por un número infinito de elementos de masa dm de tamaño infinitesimal:

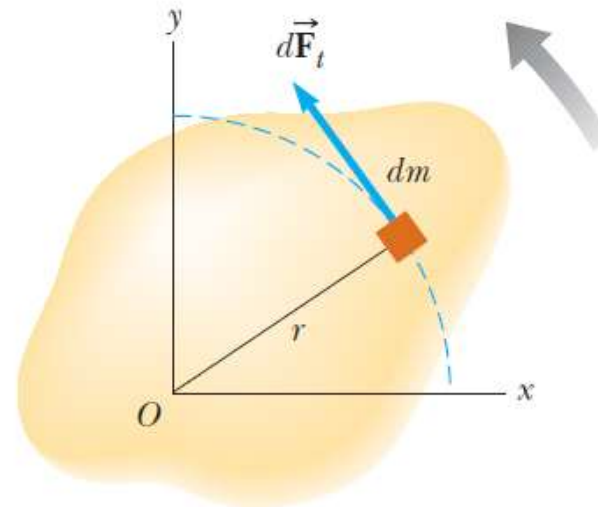
$$dF_t = (dm)a_t$$

$$d\tau = r dF_t = a_t r dm$$

$$d\tau = \alpha r^2 dm$$

$$\sum \tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

$$\sum \tau = I\alpha$$



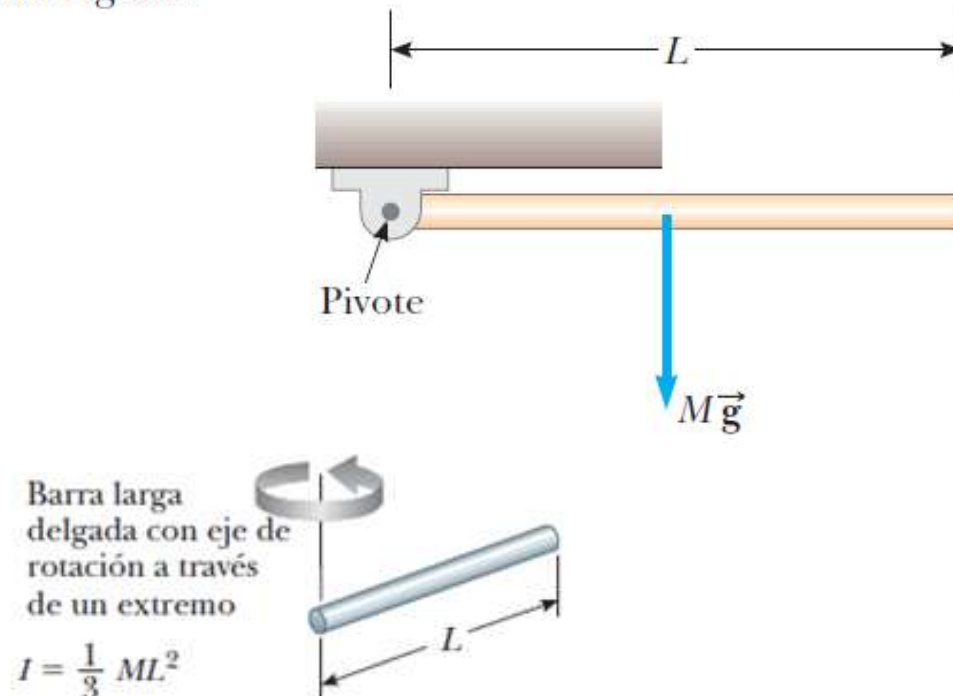
EJEMPLO Barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido?

$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$



EJEMPLO Aceleración angular de una rueda

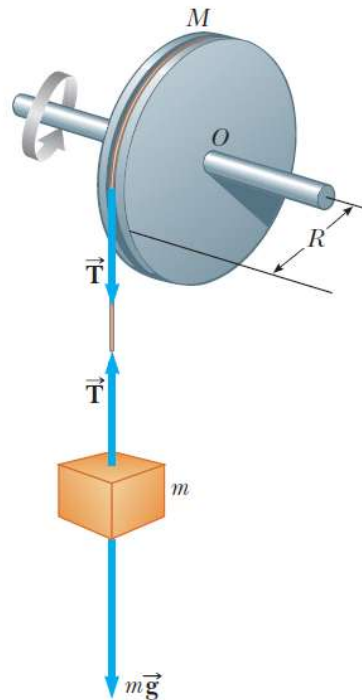
Una rueda de radio R , masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como en la figura. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa m . Calcule la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del objeto y la tensión en la cuerda.

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{TR}{I}$$

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

$$a = \frac{mg - T}{m}$$



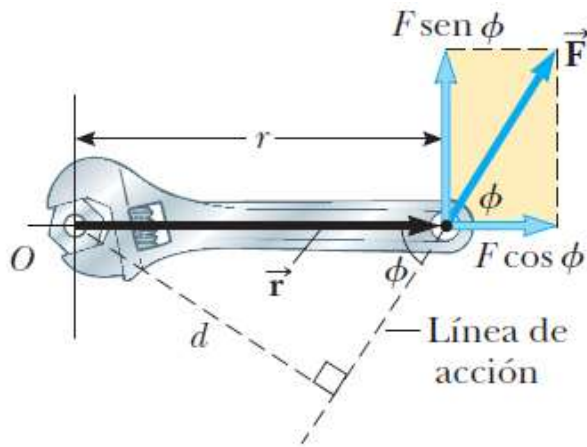
$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$

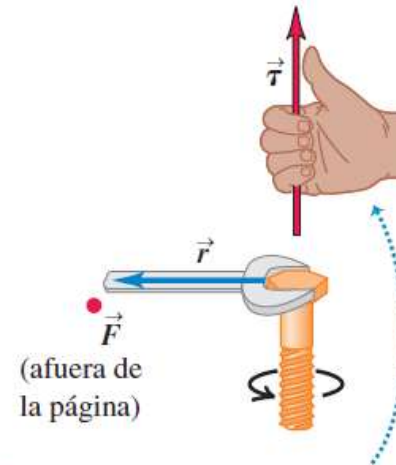
El torque como vector:



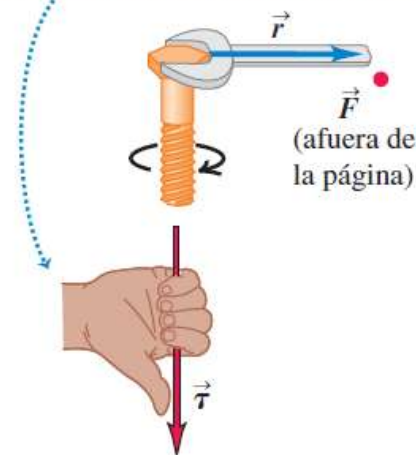
$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

El vector $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige sobre el eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Vemos que los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que la torca tiende a causar.



Si usted enrosca los dedos de la mano derecha de la dirección de $\vec{r}$ hacia la dirección de $\vec{F}$, su pulgar estirado apunta en la dirección de $\vec{\tau}$.



Condiciones de equilibrio:

Vimos que una partícula está en *equilibrio* —es decir, no tiene aceleración— en un marco de referencia inercial si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \mathbf{0} \\ \sum F_x &= 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \end{aligned} \quad \text{(primera condición de equilibrio)}$$

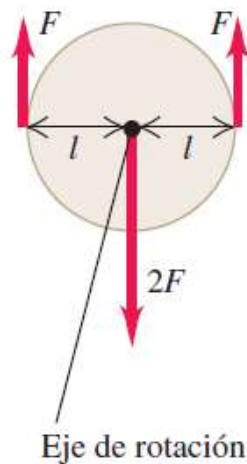
Una **segunda condición** para que un cuerpo extendido esté en **equilibrio** es que no debe tener tendencia a *girar*. Esta condición se basa en la dinámica del movimiento rotacional, exactamente del mismo modo que la primera condición se basa en la primera ley de Newton.

$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{alrededor de cualquier punto (segunda condición de equilibrio)}$$

“La suma de los torques debidos a todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, con respecto a cualquier punto específico, debe ser cero”

Para estar en equilibrio estático, un cuerpo en reposo debe satisfacer *ambas* condiciones del equilibrio: no tener la tendencia a acelerar como un todo ni empezar a girar.

a) Este cuerpo está en equilibrio estático.



Condiciones de equilibrio:

primera condición satisfecha:

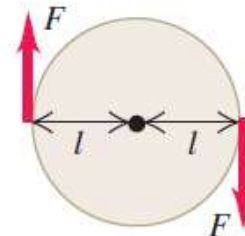
fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición satisfecha:

la torca total alrededor del eje = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Eje de rotación (perpendicular a la figura)

b) Este cuerpo no tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero tiene una tendencia a empezar a girar.



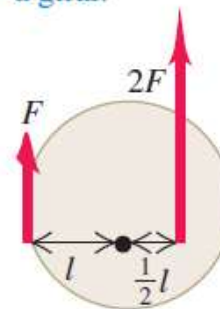
Primera condición satisfecha:

fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición NO

satisfecha: hay una torca total en sentido horario alrededor del eje, así que el cuerpo en reposo empezará a girar en sentido horario.

c) Este cuerpo tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero no tiene una tendencia a empezar a girar.



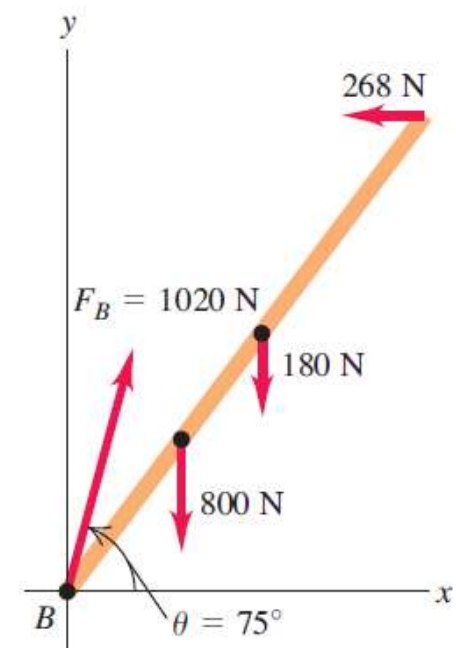
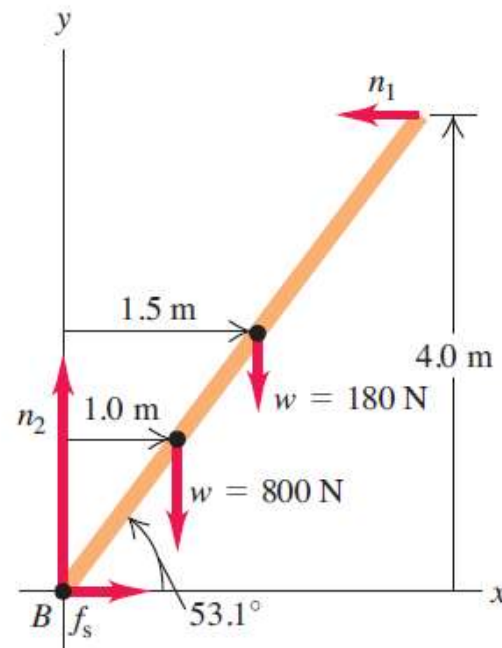
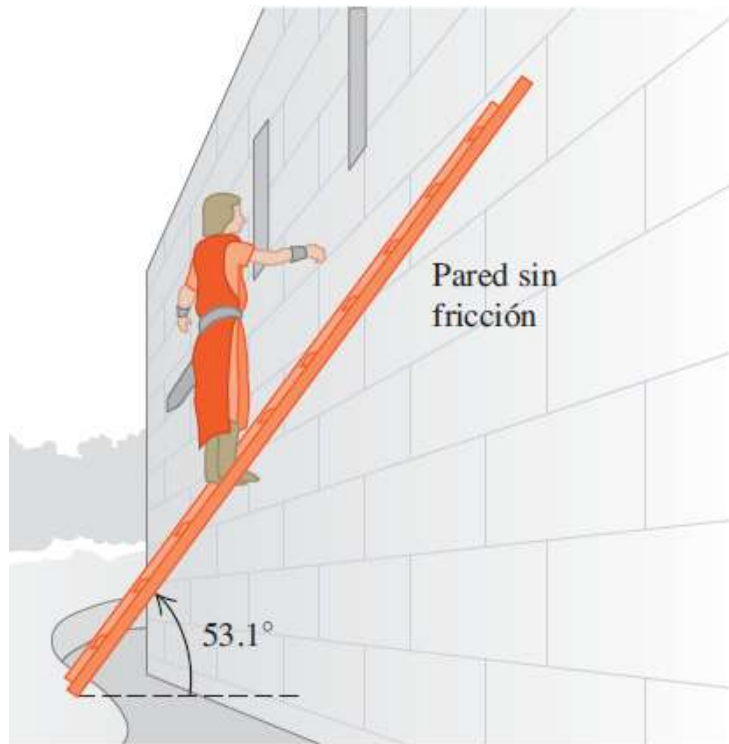
Primera condición NO

satisfecha: hay una fuerza neta hacia arriba, así que un cuerpo en reposo empezará a moverse hacia arriba.

Segunda condición satisfecha:

la torca total alrededor del eje = 0 así que el cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a girar.

Ejemplo: a) Calcule las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la base de la escalera. b) Obtenga el coeficiente de fricción estática mínimo que evita un deslizamiento en la base de la escalera. c) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de contacto que actúa sobre la base de la escalera.



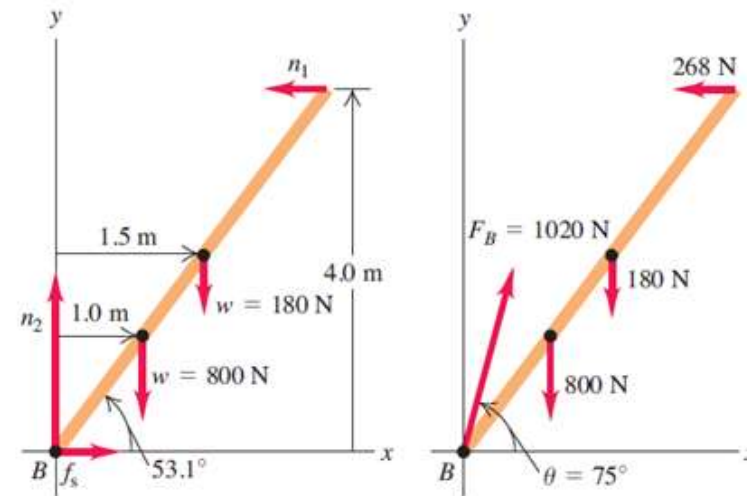
$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$

$$\sum F_y = n_2 + (-800 \text{ N}) + (-180 \text{ N}) = 0$$

$$n_2 = 980 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \sum \tau_B &= n_1 (4.0 \text{ m}) - (180 \text{ N})(1.5 \text{ m}) - (800 \text{ N})(1.0 \text{ m}) \\ &\quad + n_2(0) + f_s(0) = 0 \end{aligned}$$

$$f_s = 268 \text{ N}$$



b) La fuerza de fricción estática f_s no puede exceder $\mu_s n_2$, así que el coeficiente *mínimo* de fricción estática para evitar el deslizamiento es

$$(\mu_s)_{\min} = \frac{f_s}{n_2} = \frac{268 \text{ N}}{980 \text{ N}} = 0.27$$

c) Las componentes de la fuerza de contacto $\vec{F}_B$ en la base son la fuerza de fricción estática f_s y la fuerza normal n_2 , así que

$$\vec{F}_B = f_s \hat{i} + n_2 \hat{j} = (268 \text{ N})\hat{i} + (980 \text{ N})\hat{j}$$

La magnitud y la dirección de $\vec{F}_B$ (figura 11.9c) es entonces

$$F_B = \sqrt{(268 \text{ N})^2 + (980 \text{ N})^2} = 1020 \text{ N}$$

$$\theta = \arctan \frac{980 \text{ N}}{268 \text{ N}} = 75^\circ$$

Consideraciones energéticas:

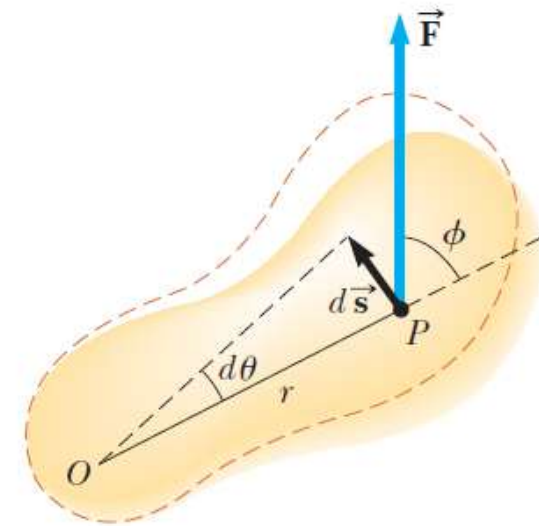
$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (F \sin \phi) r d\theta$$

Trabajo y potencia:

$$dW = \tau d\theta$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$



Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a P .

Cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo invertido por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto

Teorema del trabajo y la energía para el movimiento rotacional:

Para probar este hecho, comience con $\sum \tau = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo, es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\sum \tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\sum \tau d\theta = dW$ se obtiene

$$\sum \tau d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total invertido por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotativo

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

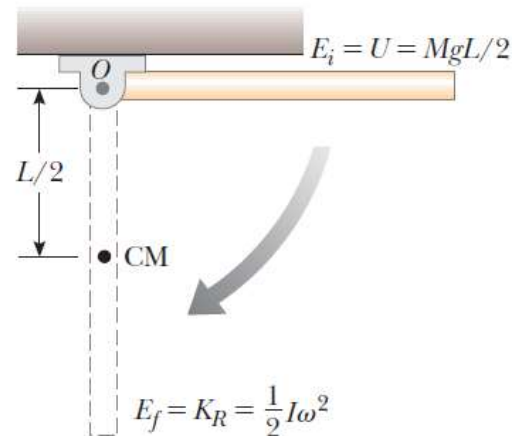
Similar al teorema trabajo–energía cinética en movimiento traslacional, este teorema afirma que **el trabajo neto invertido por fuerzas externas en un objeto rígido simétrico en rotación en torno a un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto**

EJEMPLO Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

- A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?
- B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

El sistema de la barra y la Tierra se clasifica como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas actuantes y usa el principio de conservación de energía mecánica.



$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}MgL$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_{\text{CM}} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

$$v = 2v_{\text{CM}} = \sqrt{3gL}$$