Energía y transferencia de energía

En la vida cotidiana se piensa en la **energía** como

- **combustible** para el transporte o el calentamiento

- **electricidad** para iluminación o funcionamiento de electrodomésticos

- **alimentos** para el consumo y sostenimiento de la vida

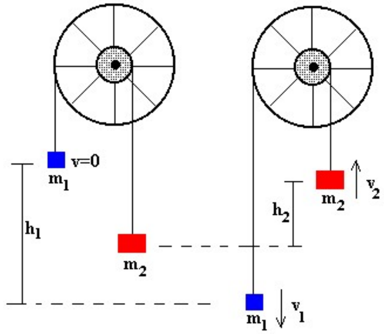
- etc.

Lo anterior no define la energía, solo deja ver que con el combustible, la electricidad o los alimentos son necesarios para realizar otras acciones o procesos que permiten

- sostener un movimiento
- mantener un ambiente confortable
- que una lámpara o una computadora esté encendida el tiempo que lo necesitemos
- que podamos movilizarnos
- que una industria pueda producir algún bien
- etc.

Todo proceso físico que ocurra en el Universo **involucra energía y transferencias o transformaciones de energía**

Hemos aplicado, en la **cinemática** y en la **dinámica**, el **modelo de partícula** a la resolución de problemas



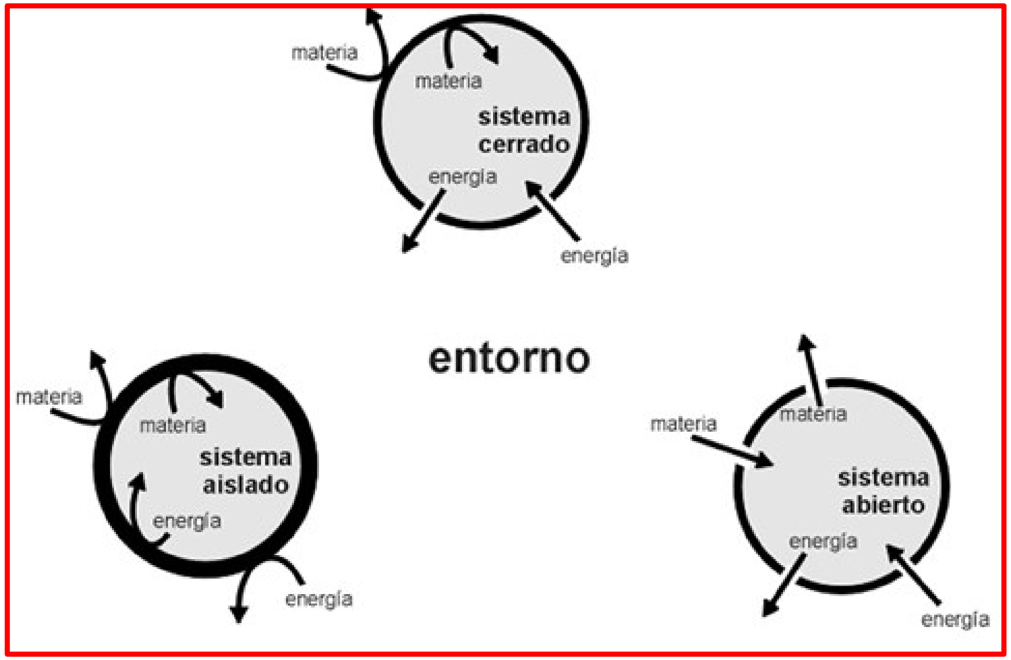
El nuevo planteamiento, el de la **energía**, comienza al dirigir la atención sobre un **sistema** y desarrollar técnicas para aplicar en un **modelo de sistema**

Sistemas y entornos:

Un sistema puede ser:

- un objeto simple o partícula
- una colección de objetos o partículas
- una región de espacio (como el interior del cilindro de combustión de un motor de automóvil),
- pero también puede variar en tamaño y forma (como una bola de goma, que se deforma al golpear una pared)

Sin importar cual sea el sistema particular en un problema dado, se identifica una **frontera de sistema**, una superficie imaginaria (que no necesariamente coincide con una superficie física) que divide al Universo del sistema y el **entorno** que lo rodea.



Trabajo (caso de una fuerza constante):

a)

b)

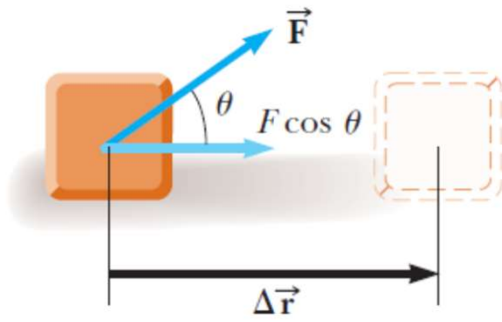
c)

Si quiere saber **que tan efectiva es la fuerza para mover el borrador**, debe considerar no solo la **magnitud de la fuerza** sino también su **dirección**.

Cuando se analizan fuerzas para determinar el **trabajo** que realizan, se debe considerar la **naturaleza vectorial de las fuerzas**. También se debe conocer el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ del borrador mientras se mueve a lo largo de la mesa si se quiere determinar el **trabajo desarrollado** sobre él por la fuerza.

Mover el borrador 3 m a lo largo de la mesa requiere mas trabajo que moverlo 2 cm.

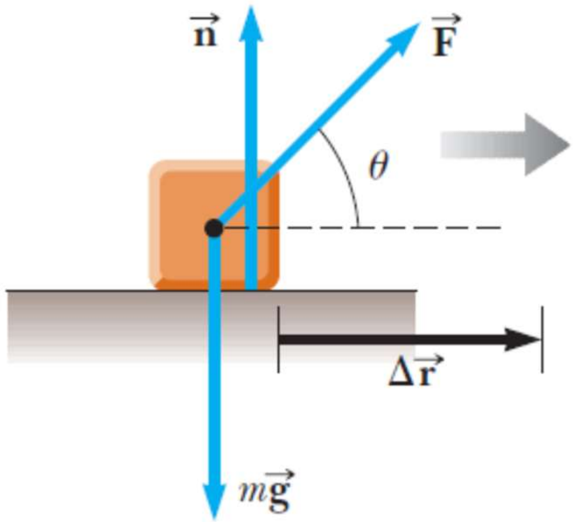
El **trabajo** W desarrollado sobre un sistema por un agente que ejerce una **fuerza constante** sobre el sistema es el producto de la magnitud (módulo) F de la fuerza, Δr la magnitud (módulo) del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:



$$\boxed{W \equiv F\,\Delta r\cos\theta}$$

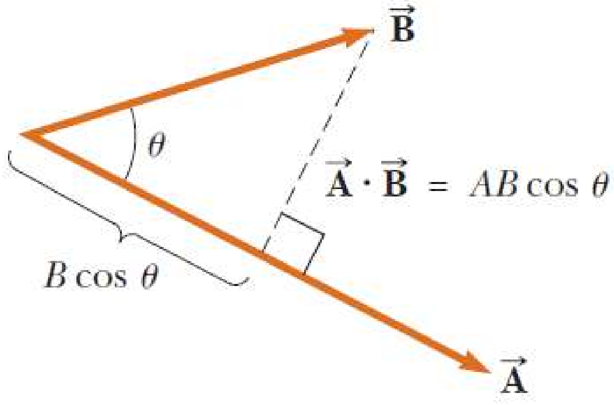
$[W]_{SI}$ = N.m = J (Joule)

En el ejemplo, el trabajo desarrollado por la fuerza normal sobre el objeto y el trabajo desarrollado por la fuerza gravitacional sobre el objeto son ambos cero porque ambas fuerzas son perpendiculares al desplazamiento y tienen componentes cero a lo largo de un eje en la dirección de $\Delta\vec{r}$

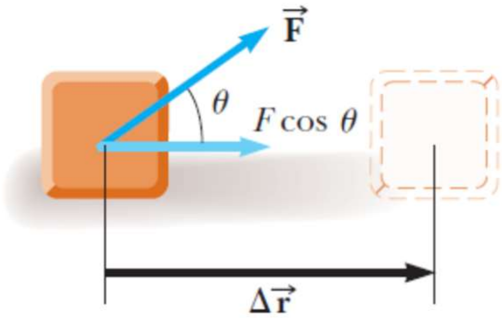


Producto escalar de dos vectores:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta$$



$$\boxed{W = F\,\Delta r\cos\theta = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}}$$



Propiedades del producto escalar:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

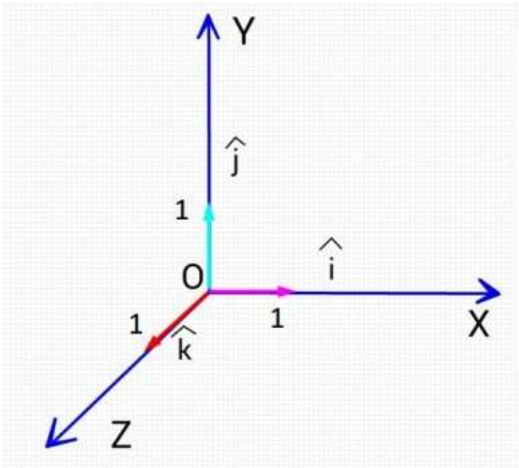
$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$



Los vectores unitarios que van en las tres direcciones preferenciales del espacio son: $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

EJEMPLO Trabajo desarrollado por una fuerza constante

Una partícula móvil en el plano *xy* se somete a un desplazamiento conocido por $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (2.0\,\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\hat{\mathbf{j}})$ m cuando una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}} = (5.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre la partícula.

A) Calcule las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento de la partícula.

Aplique el teorema de Pitágoras para encontrar las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = \boxed{5.4\text{ N}}$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \boxed{3.6\text{ m}}$$

B) Calcule el trabajo desarrollado por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula.

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = [(5.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}})\text{ N}] \cdot [(2.0\,\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\hat{\mathbf{j}})\text{ m}]$$

$$= (5.0\,\hat{\mathbf{i}} \cdot 2.0\,\hat{\mathbf{i}} + 5.0\,\hat{\mathbf{i}} \cdot 3.0\,\hat{\mathbf{j}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}} \cdot 2.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}} \cdot 3.0\,\hat{\mathbf{j}})\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= [10 + 0 + 0 + 6]\text{ N} \cdot \text{m} = \boxed{16\text{ J}}$$

Trabajo desarrollado por una fuerza variable:

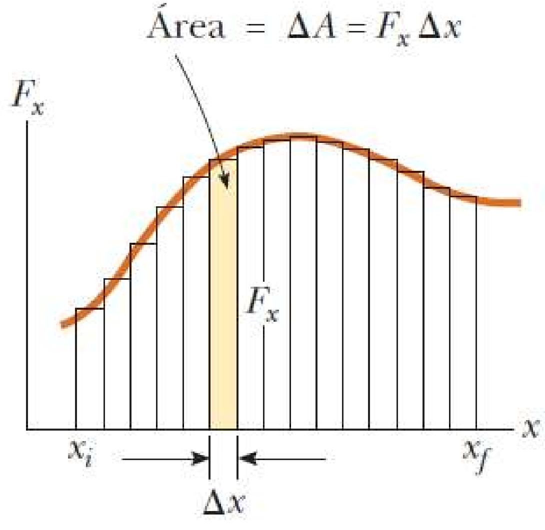
Si se piensa que la partícula se somete a un desplazamiento muy pequeño Δx, como se muestra en la figura a), la componente x de la fuerza, F_x, es aproximadamente constante en este intervalo pequeño; para este desplazamiento pequeño, se puede aproximar el trabajo invertido en la partícula mediante la fuerza como:

$$W \approx F_x \Delta x$$

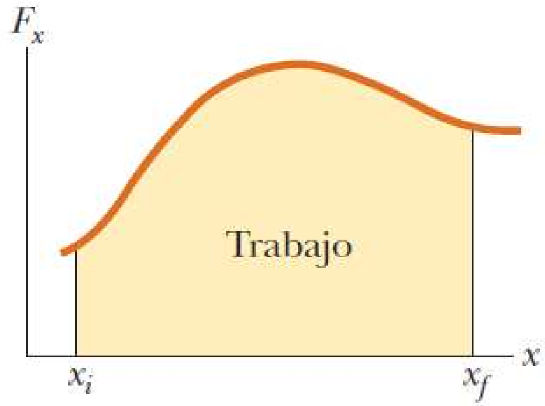
$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx}$$



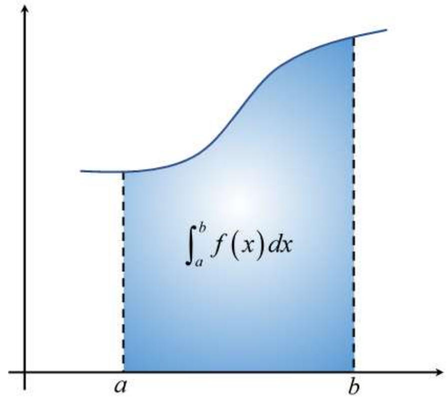
a)



b)

Si actúa un conjunto de fuerzas sobre el sistema, y si el sistema se puede modelar como una partícula**:**

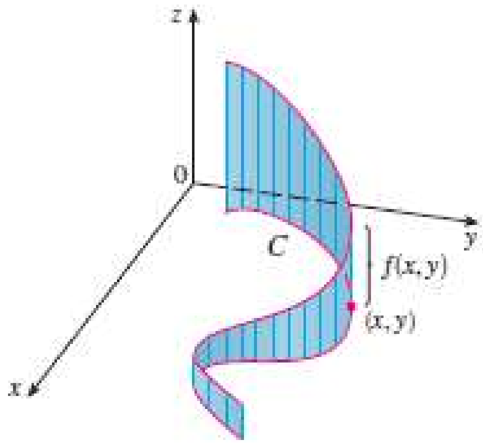
$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx$$



En el caso general de una fuerza neta (resultante) que puede variar su módulo y dirección:

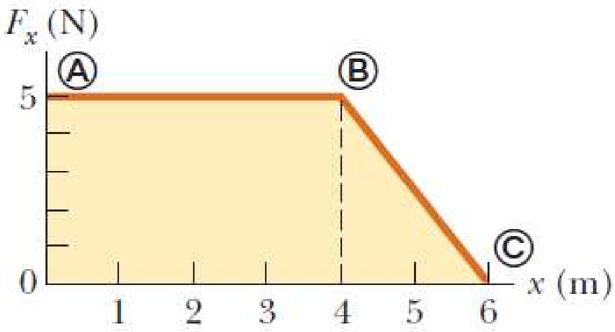
$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

donde la integral se calcula sobre la trayectoria que toma la partícula a través del espacio (integral de camino)



EJEMPLO Cálculo del trabajo total a partir de una gráfica

Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con x como se muestra en la figura Calcule el trabajo desarrollado por la fuerza en la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

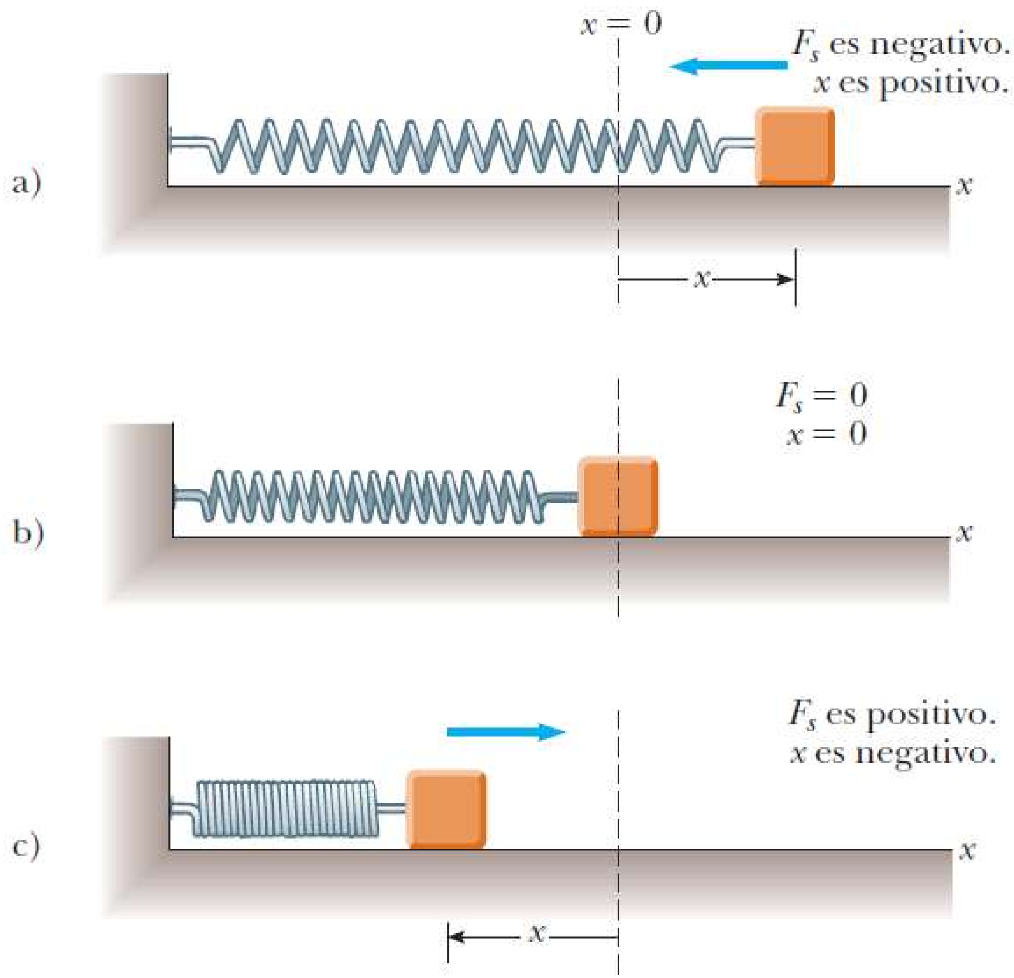


Evalúe el área del rectángulo: $W_{Ⓐ Ⓑ} = (5.0\ \text{N})(4.0\ \text{m}) = 20\ \text{J}$

Hallar el valor numérico del área del triángulo: $W_{Ⓑ Ⓒ} = \frac{1}{2}(5.0\ \text{N})(2.0\ \text{m}) = 5.0\ \text{J}$

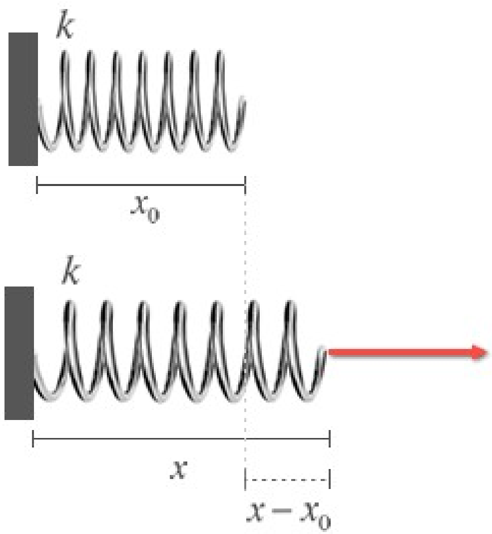
Encuentre el trabajo total consumido por la fuerza en la partícula: $W_{Ⓐ Ⓒ} = W_{Ⓐ Ⓑ} + W_{Ⓑ Ⓒ} = 20\ \text{J} + 5.0\ \text{J} = \boxed{25\ \text{J}}$

Trabajo desarrollado por un resorte:



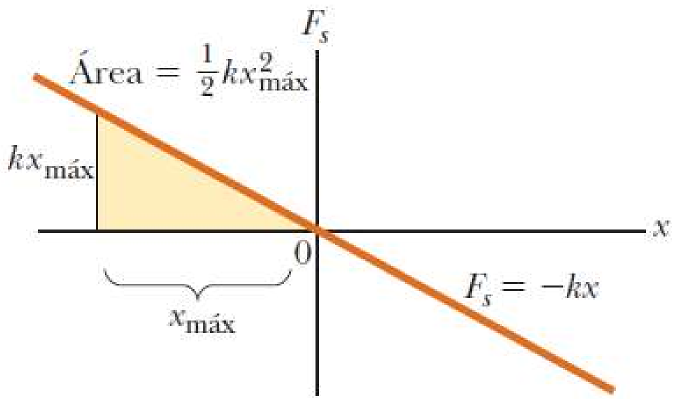
Ley de Hooke: "el alargamiento unitario que experimenta un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo (F_S)"

$$F_s = -kx$$



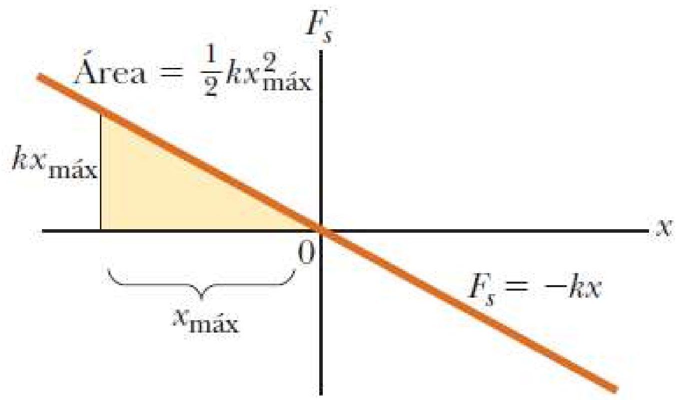
ley de Hooke

Al aplicar una fuerza en el muelle de la figura (arriba), este se alarga (abajo). La deformación que se le produce (x-x_0) es directamente proporcional a la fuerza que le aplicamos.



$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_s = F_s\hat{\mathbf{i}} = -kx\hat{\mathbf{i}}$$

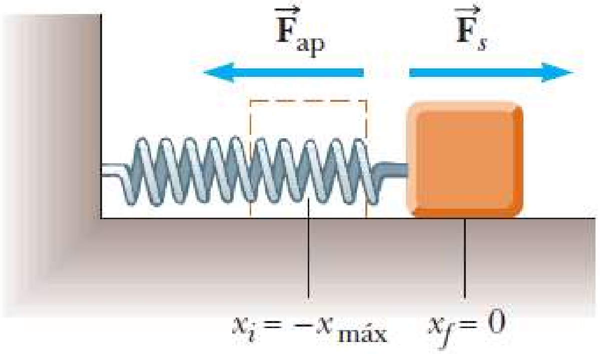


$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$$

Trabajo desarrollado **por el resorte sobre el bloque**:

$$\boxed{W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2}$$

Trabajo desarrollado por un **agente externo** que aplica una fuerza sobre el bloque y el mismo se mueve lentamente (cuasi equilibrio, o **equilibrio cuasiestático**):



$$\vec{\mathbf{F}}_{ap} = F_{ap}\hat{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{F}}_s = -(-kx\hat{\mathbf{i}}) = kx\hat{\mathbf{i}}$$

$$W_{ap} = \int \vec{\mathbf{F}}_{ap} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{máx}}^{0} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_{máx}^2$$

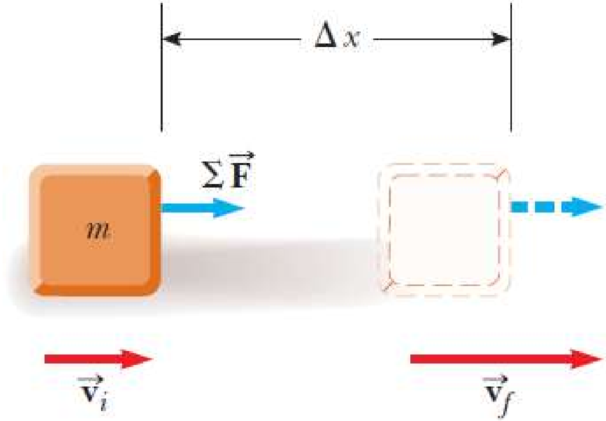
$$\boxed{W_{ap} = \int_{x_i}^{x_f} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2}$$

$$W_{ap} = -W_S$$

Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética:

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\,\hat{\mathbf{i}} = (x_f - x_i)\,\hat{\mathbf{i}}$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}}$$



Trabajo neto realizado sobre el bloque:

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\,dx$$ donde $$\sum F = ma$$

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\,dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv$$

$$\boxed{W_{\text{neto}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2}$$

el trabajo desarrollado por la fuerza neta en una partícula de masa *m* es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de la cantidad K (o E_c) denominada **energía cinética**:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K}$$

Otra forma de expresarlo:

$$K_f = K_i + W_{\text{neto}}$$

la energía cinética final de un objeto es igual a su energía cinética inicial mas el cambio debido al trabajo neto desarrollado sobre él

Teorema trabajo-energía cinética:

“Cuando se desarrolla trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es su rapidez, el trabajo neto desarrollado es igual al cambio en la energía cinética del sistema”

El trabajo es una magnitud escalar que da la cantidad de energía cinética transferida por una fuerza al sistema

$$W_{AB} = \int_A^B \bar{F} \cdot \overline{ds} = \int_A^B F_{tg}\, dS = \int_A^B M a_{tg}\, dS = \int_A^B M \frac{dv}{dt} dS = \int_A^B M \frac{dS}{dt} dv = \int_A^B M v\, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

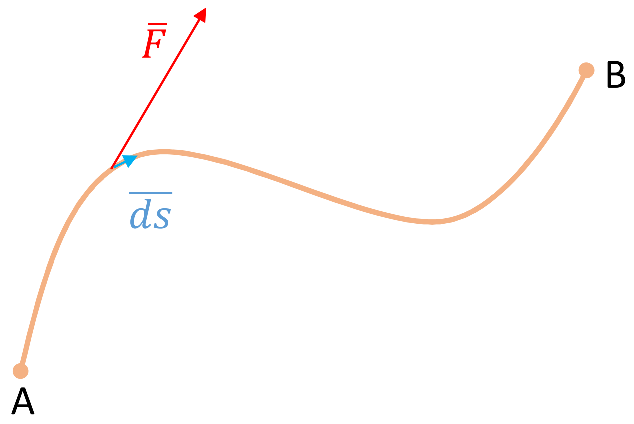
$\boldsymbol{W_{FRES} = \Delta E_c}$ => $W_{FRES} = E_{cf} - E_{ci}$

F = M**a** => MUV => v varía => E_c varía

F constante (a =cte, M=cte)

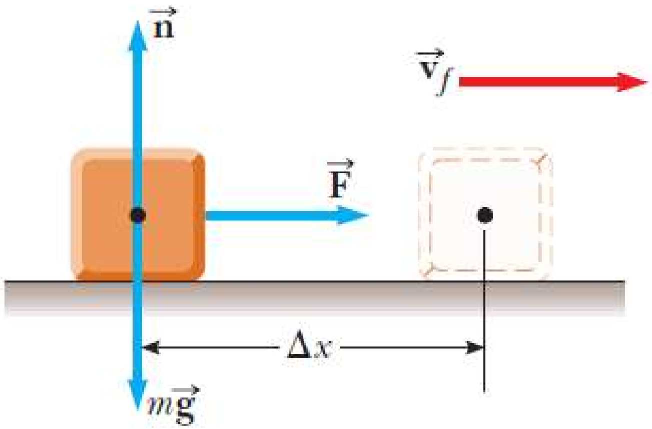
$$W_{FRES} = \mathrm{F\ d\ cos\theta}$$

θ =ángulo entre la dirección del movimiento y la fuerza
d = distancia durante la cual se aplica la fuerza F



EJEMPLO Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido 3.0 m.



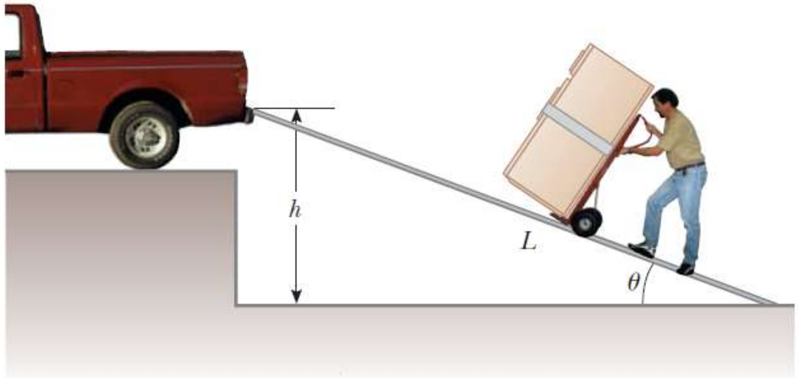
$$W = F\,\Delta x = (12\text{ N})(3.0\text{ m}) = 36\text{ J}$$

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\text{ J})}{6.0\text{ kg}}} = \boxed{3.5\text{ m/s}}$$

EJEMPLO CONCEPTUAL ¿La rampa reduce el trabajo requerido?

Un hombre quiere cargar un refrigerador en una camioneta con el uso de una rampa a un ángulo θ, como se muestra en la figura. Él afirma que se debe requerir menos trabajo para cargar la camioneta si la longitud L de la rampa aumenta. ¿Esta afirmación es válida?



No. Suponga que el refrigerador se sube por la rampa en una carretilla con rapidez constante. En este caso, para el sistema del refrigerador y la carretilla, $\Delta K = 0$. La fuerza normal que ejerce la rampa sobre el sistema se dirige 90° al desplazamiento de su punto de aplicación y por lo tanto no realiza trabajo sobre el sistema. Puesto que $\Delta K = 0$, el teorema trabajo–energía cinética produce

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{por hombre}} + W_{\text{por gravedad}} = 0$$

$$W_{\text{por hombre}} = -\,W_{\text{por gravedad}} = -\,(mg)(L)[\cos\,(\theta + 90°)]$$
$$= mgL \text{ sen } \theta = mgh$$

Energías cinéticas de diferentes objetos

Objeto	Masa (kg)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (J)
Tierra que orbita el Sol	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.66×10^{33}
Luna que orbita la Tierra	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Cohete que se mueve con rapidez de escape[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automóvil a 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Atleta que corre	70	10	3 500
Piedra que se deja caer desde 10 m	1.0	14	98
Pelota de golf con rapidez terminal	0.046	44	45
Gota de lluvia con rapidez terminal	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Molécula de oxígeno en aire	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

[a] Rapidez de escape es la rapidez mínima que un objeto debe lograr cerca de la superficie de la Tierra para alejarse infinitamente de ésta.

Analizar: ¿Qué pasaría si evaluamos situaciones que incluyen fricción cinética?

La fuerza de fricción se dispersa sobre toda el área de contacto de un objeto que se desliza sobre una superficie, de modo que la fuerza no se localiza en un punto.

El teorema trabajo–energía cinética es valido para una partícula o un objeto que se modela como partícula. No obstante, cuando actúa una fuerza de fricción, no se puede calcular el trabajo invertido por la fricción. Para tales situaciones, la segunda ley de Newton todavía es válida para el sistema aun cuando el teorema trabajo–energía cinética no lo sea.

Escribimos el trabajo para todas las otras fuerzas distintas de la fricción:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

A cada lado de la igualdad le agregamos un "trabajo de fricción":

$$\begin{aligned}\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} &= \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} \\ &= \int \boxed{\left(\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{otras fuerzas}} + \vec{\mathbf{f}}_k\right)} \cdot d\vec{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

fuerza neta $\Sigma\, \vec{\mathbf{F}}$

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Al considerar la 2° Ley de Newton: $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int m\vec{\mathbf{a}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}\, dt$$

donde:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = 2\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$$

Finalmente:

$$\boxed{\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{t_i}^{t_f} m\left(\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}\right) dt = \frac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} d(v^2) = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_i^{\,2} = \Delta K}$$

Además: $$\vec{\mathbf{f}}_k \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -f_k\, dr$$

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - \int f_k\, dr = \Delta K$$

En el modelo para la fricción, la magnitud de la fuerza de fricción cinética es constante, de modo de f_k se puede sacar de la integral. La integral restante es simplemente la suma de incrementos de longitud a lo largo de la trayectoria, que es la longitud de trayectoria total d. Por lo tanto,

$$\boxed{\begin{gathered}\sum W_{\text{otras fuerzas}} - f_k d = \Delta K \\[1em] K_f = K_i - f_k d + \sum W_{\text{otras fuerzas}}\end{gathered}}$$

Teorema del trabajo y la energía para el movimiento rotacional:

Para probar este hecho, comience con $\sum \tau = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo, es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\sum \tau \, d\theta = dW$ se obtiene

$$\sum \tau d\theta = dW = I\omega \, d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total invertido por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotativo

$$\boxed{\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega \, d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2}$$

Similar al teorema trabajo–energía cinética en movimiento traslacional, este teorema afirma que **el trabajo neto invertido por fuerzas externas en un objeto rígido simétrico en rotación en torno a un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto**

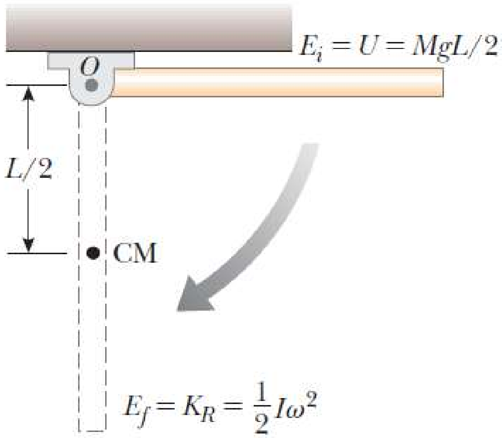
EJEMPLO Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

El sistema de la barra y la Tierra se clasifica como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas actuantes y usa el principio de conservación de energía mecánica.



$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

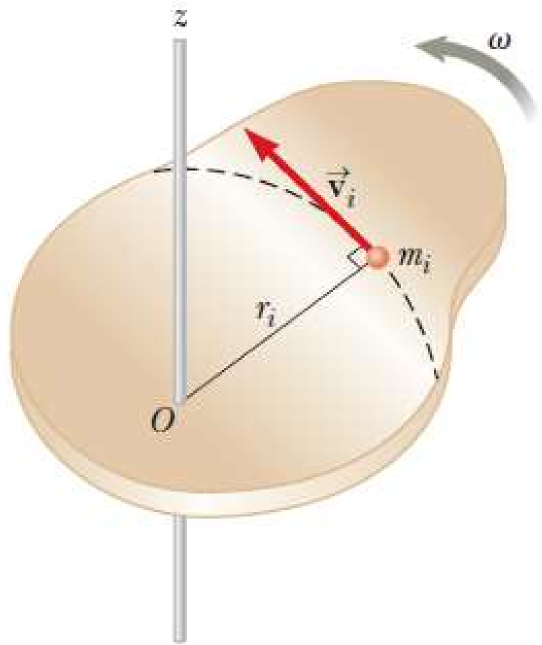
$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}MgL$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{3gL}}$$

$$v = 2v_{CM} = \boxed{\sqrt{3gL}}$$

Energía cinética rotacional y momento de inercia:



$$K_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^{\,2}$$

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^{\,2} = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i r_i^{\,2} \omega^2$$

$$K_R = \tfrac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^{\,2} \right) \omega^2$$

Simplificamos esta ecuación definiendo el **momento de inercia** I de un objeto rígido como:

$$\boxed{I \equiv \sum_i m_i r_i^{\,2}}$$

entonces, la energía cinética de rotación es:

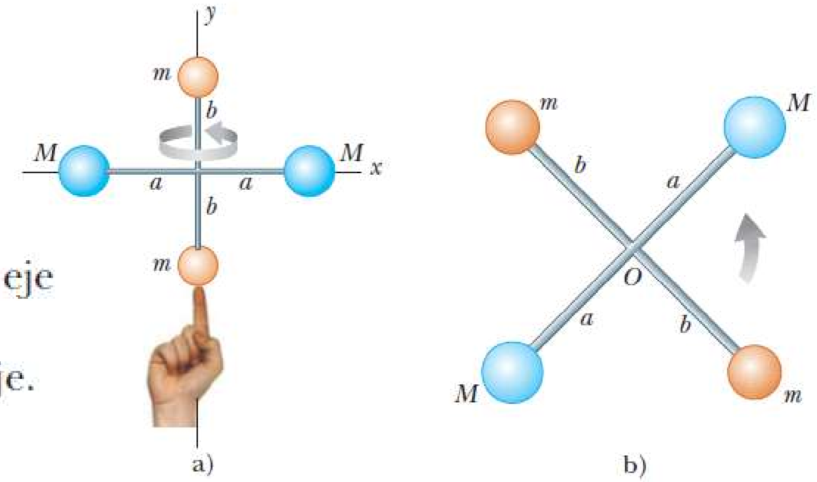
$$\boxed{K_R = \tfrac{1}{2} I \omega^2}$$

EJEMPLO Cuatro objetos en rotación

Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano *xy* Se supondrá que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

A) Si el sistema da vueltas en torno al eje *y* (figura a) con una rapidez angular ω, encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.

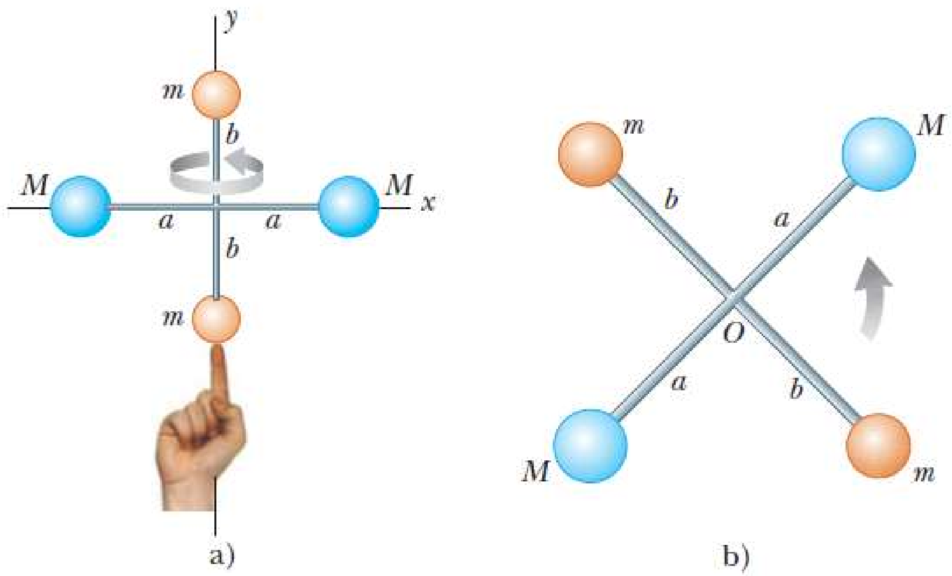
B) Suponga que el sistema da vueltas en el plano *xy* en torno a un eje (el eje *z*) a través de *O* (figura b). Calcule el momento de inercia y la energía cinética rotacional en torno a este eje.



Cuatro esferas forman un bastón inusual. a) El bastón rota en torno al eje *y*. b) El bastón rota en torno al eje *z*.

$$I_y = \sum m_i {r_i}^2 = Ma^2 + Ma^2 = \boxed{2Ma^2}$$

$$K_R = \tfrac{1}{2}I_y\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = \boxed{Ma^2\omega^2}$$



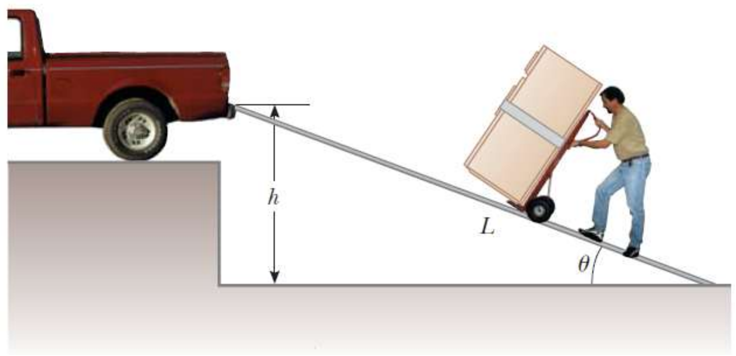
Cuatro esferas forman un bastón
inusual. a) El bastón rota en torno al eje *y*. b) El bastón rota en torno al eje *z*.

$$I_z = \sum_i m_i {r_i}^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = \boxed{2Ma^2 + 2mb^2}$$

$$K_R = \tfrac{1}{2}I_z\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = \boxed{(Ma^2 + mb^2)\omega^2}$$

Potencia:

En el problema de la rampa, aunque el hombre realiza la misma cantidad de trabajo que alguien que usa una rampa mas corta, le toma mas tiempo realizar el trabajo porque tiene que mover el refrigerador una mayor distancia. Aunque el trabajo realizado sobre ambas rampas es el mismo, hay *algo* diferente acerca de las tareas: el *intervalo de tiempo* durante el que se realiza el trabajo.



La relación con el tiempo de la transferencia de energía se llama **potencia instantánea**

$$\boxed{\mathcal{P} \equiv \frac{dE}{dt}}$$

Aquí se considerará al trabajo como el método de transferencia de energía, pero debemos tener en mente que la noción de potencia es valida para cualquier medio de transferencia de energía

$[\mathcal{P}]_{SI}$ = J/s= W (Watt)

Si una fuerza externa se aplica a un objeto (que se representa como partícula) y si el trabajo invertido por esta fuerza en el objeto en el intervalo de tiempo Δt es W, la **potencia promedio** durante este intervalo es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Para el caso particular de una fuerza constante:

$$d\mathrm{W} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Consideraciones energéticas:

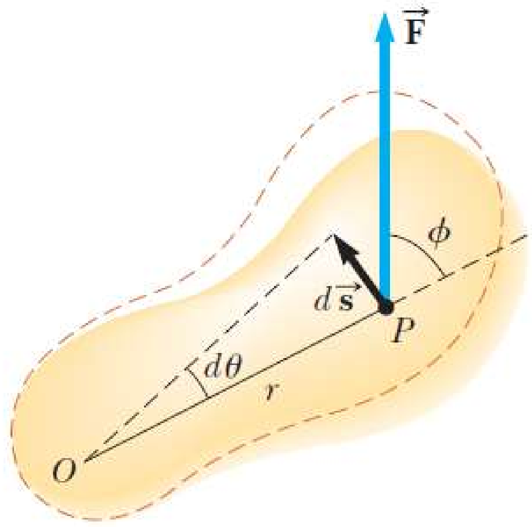
$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = (F \operatorname{sen} \phi) r \, d\theta$$

Trabajo y potencia:

$$dW = \tau \, d\theta$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$



Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a P.

Cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo invertido por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto