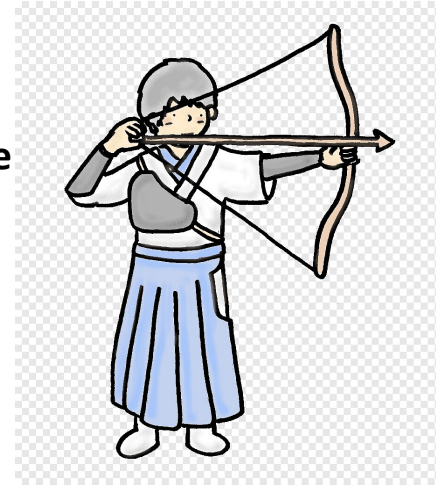


Cantidad de movimiento:

Un arquero de 60 kg esta de pie sobre hielo **sin fricción** y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s. A partir de la tercera ley de Newton, se sabe que **la fuerza que el arco ejerce en la flecha se iguala mediante una fuerza en la dirección opuesta sobre el arco (y el arquero).**

Esta fuerza hace que **el arquero se deslice hacia atrás sobre el hielo**, ¿pero **con que velocidad**?

No se puede responder esta pregunta directamente con el uso de la segunda ley de Newton o un planteamiento de energía porque no se tiene suficiente información.

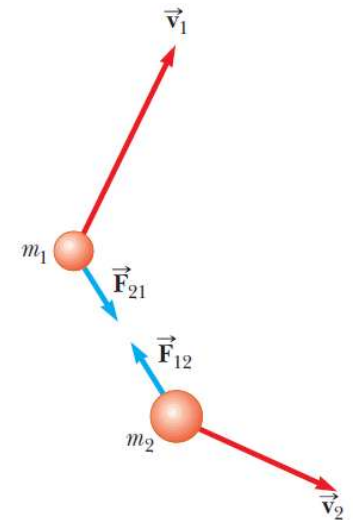


Cantidad de movimiento (momento lineal, momentum):

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} &= 0 \\ m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 &= 0 \\ m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) &= 0\end{aligned}$$



Notar que:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$$

$$(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = cte$$

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

$$[p]_{SI} = \text{kg.m/s}$$

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z$$

Para una sola partícula:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento lineal o cantidad de movimiento

Puede considerarse como una medida de la dificultad de llevar la partícula al reposo

Es un vector

$$\bar{p} = M\bar{v}$$

$$\text{En líneas generales } \left. \begin{array}{l} \bar{p} \\ p_y = Mv_y \\ p_z = Mv_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} p_x = Mv_x \end{array}$$

Volviendo al problema de **dos partículas**:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f}$$

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx}$$

$$p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy}$$

$$p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$$

Ley de conservación de la cantidad de movimiento:

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

EJEMPLO

El arquero

Considere la situación propuesta al principio de esta sección. Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s. ¿Con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?

$$m_1 = 60 \text{ kg}, m_2 = 0.50 \text{ kg} \text{ y } \vec{v}_{2f} = 50\hat{i} \text{ m/s}$$

$$m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = 0$$

$$\vec{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2f} = -\left(\frac{0.50 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}\right)(50\hat{i} \text{ m/s}) = -0.42\hat{i} \text{ m/s}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la flecha se dispara en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambiará la velocidad de retroceso del arquero?

$$m_1v_{1f} + m_2v_{2f}\cos\theta = 0$$

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2f}\cos\theta$$



Impulso y cantidad de movimiento:

Supongamos que hay una fuerza neta que actúa sobre una partícula y puede variar con el tiempo, entonces:

$$\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$$

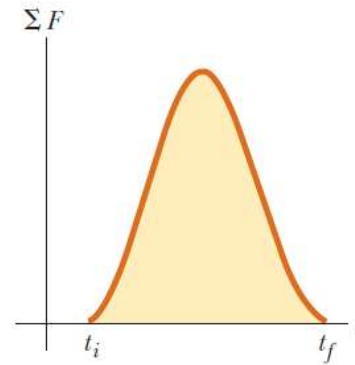
$$d\vec{p} = \sum \vec{F} dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado **impulso** de la fuerza neta que actúa en una partícula durante el intervalo de tiempo

$$\vec{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

A partir de esta definición, se ve que el impulso I es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza–tiempo.

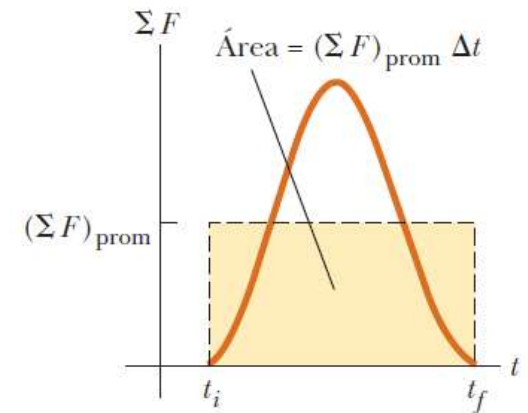


Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma integral que se muestra en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento.

Es frecuente definir una fuerza neta promediada en el intervalo de tiempo:

$$(\Sigma \vec{F})_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = (\Sigma \vec{F})_{\text{prom}} \Delta t$$



Si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante:

$$(\sum \vec{F})_{\text{prom}} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{I} = \sum \vec{F} \Delta t$$

En muchas situaciones físicas se usara lo que se llama la **aproximación del impulso**, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente. En este caso, la fuerza neta se sustituye con una sola fuerza F para encontrar el impulso sobre la partícula. Esta aproximación es especialmente útil al tratar colisiones en las cuales la duración de la colisión es muy breve. Cuando se hace esta aproximación, la fuerza sola se conoce como *fuerza impulsiva*.



EJEMPLO**¿Qué tan útiles son las defensas?**

En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa choca con una pared, como se muestra en la figura. Las velocidades inicial y final del automóvil son $\vec{v}_i = -15.0\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_f = 2.60\hat{i}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza promedio ejercida en el automóvil.

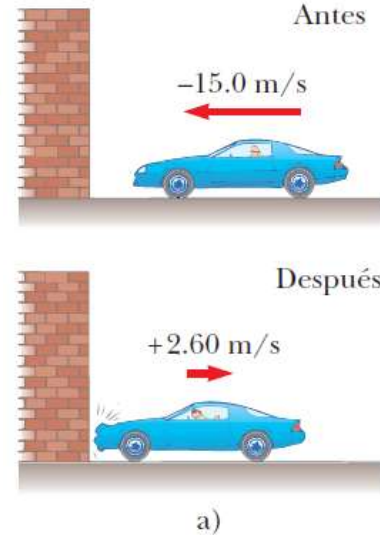
$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (1\,500\text{ kg})(-15.0\hat{i}\text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4\hat{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = (1\,500\text{ kg})(2.60\hat{i}\text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4\hat{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 0.39 \times 10^4\hat{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\hat{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s})$$

$$= 2.64 \times 10^4\hat{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{F}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\hat{i}\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\text{ s}} = 1.76 \times 10^5\hat{i}\text{ N}$$

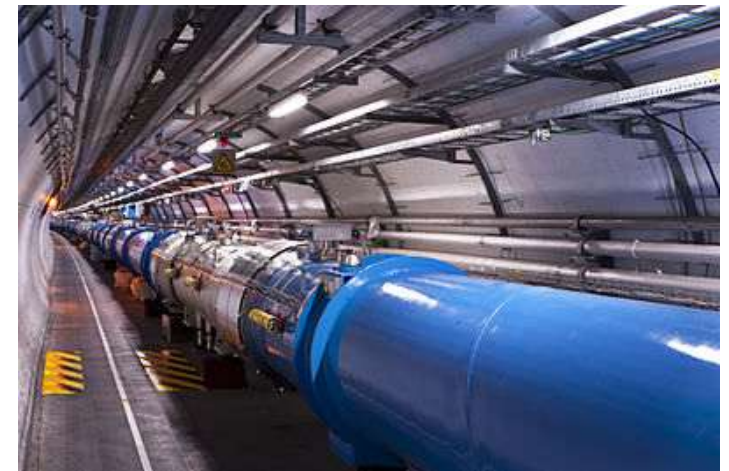
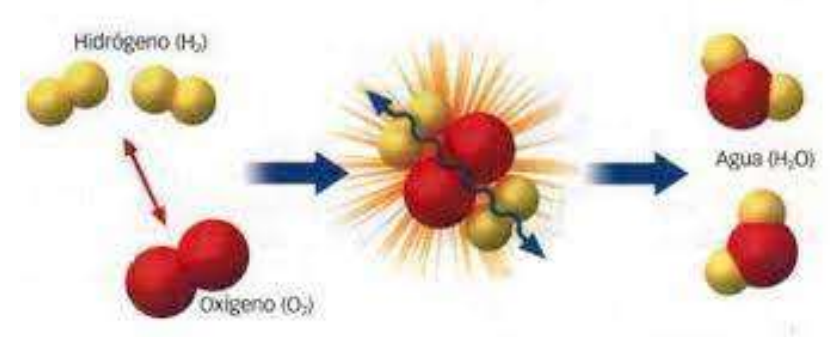
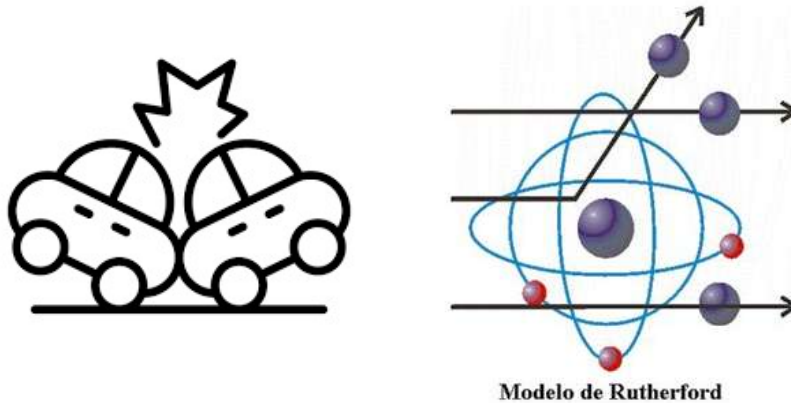


b)

a) La cantidad de movimiento de este automóvil cambia como resultado de su colisión con la pared. b) En una prueba de choque, mucha de la energía cinética inicial del automóvil se transforma en energía asociada con el daño al auto.

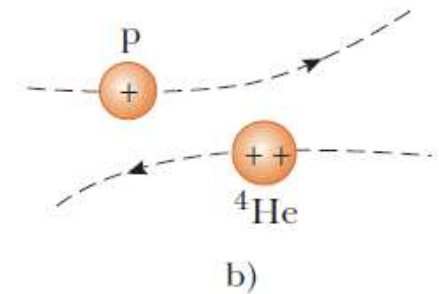
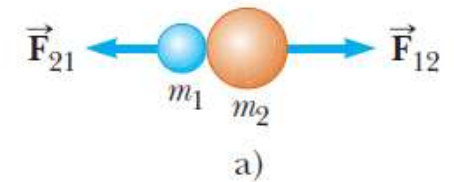
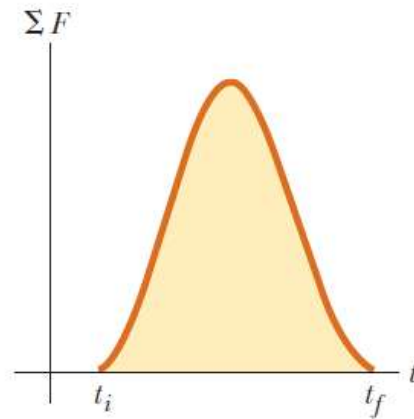
Colisiones en una dimensión:

El termino **colisión** representa un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan mediante fuerzas. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que otras fuerzas externas.



Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura, pero la noción de lo que significa una colisión se debe ampliar porque “**contacto físico**” en una escala submicroscópica no tiene significado.

En una colisión las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, pero esas son **fuerzas internas** del sistema de dos partículas.



a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. b) “Colisión” entre dos partículas con carga.

Las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

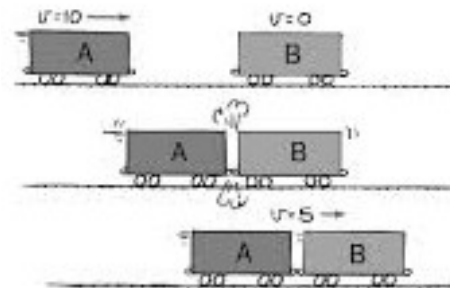
La energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión.

Colisión elástica → se conserva la energía cinética ($E_{cf} = E_{ci}$) del sistema

Colisión inelástica → no se conserva la energía cinética ($E_{cf} < E_{ci}$) del sistema

perfectamente inelástica → los cuerpos permanecen unidos luego de la colisión

inelástica → los cuerpos no se unen



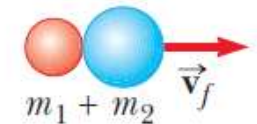
Colisiones perfectamente inelásticas:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

Antes de la colisión

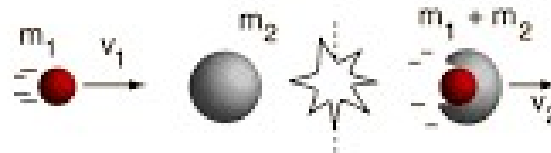


Después de la colisión



$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

¿Qué sucede con la energía cinética? Supongamos que m_2 está en reposo:



Por la conservación del momento:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

El ratio de energías cinéticas antes y después es:

$$\frac{Ec_f}{Ec_i} = \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \right]^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

La fracción de energía cinética perdida es:

$$\frac{Ec_i - Ec_f}{Ec_i} = \frac{\left[1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right] Ec_i}{Ec_i} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

EJEMPLO**El péndulo balístico**

El péndulo balístico es un aparato que se usa para medir la rapidez de un proyectil que se mueve rápidamente, como una bala. Un proyectil de masa m_1 se dispara hacia un gran bloque de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres ligeros. El proyectil se incrusta en el bloque y todo el sistema se balancea hasta una altura h . ¿Cómo se determina la rapidez del proyectil a partir de una medición de h ?

$$v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

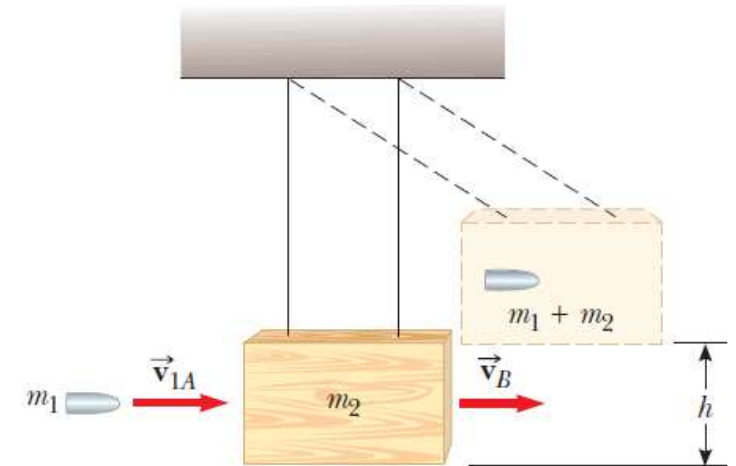
$$K_B = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$$

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gh}$$



Colisiones elásticas:

$$p = cte \rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$E_c = cte \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

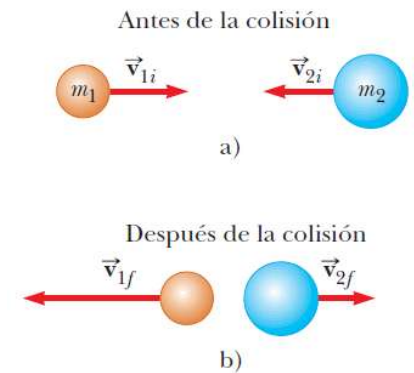
Si se conocen las masas y las velocidades iniciales, se tiene:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

Tarea:

- Analizar si $m_1 = m_2$
- Analizar si $v_{2i} = 0$
- Analizar si $m_1 = m_2$ y $v_{2i} = 0$



Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

EJEMPLO Una colisión nuclear. Un protón (p) de masa 1.01 u (unidad unificada de masa atómica) que viaja con una rapidez de 3.60×10^4 m/s tiene una colisión elástica frontal contra un núcleo ($m_{\text{He}} = 4.00$ u) de helio (He) inicialmente en reposo. ¿Cuáles serán las velocidades del protón y del núcleo de helio después de la colisión? (Como se mencionó en el capítulo 1, $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg, aunque no necesitaremos este dato). Suponga que la colisión ocurre en espacio casi vacío.

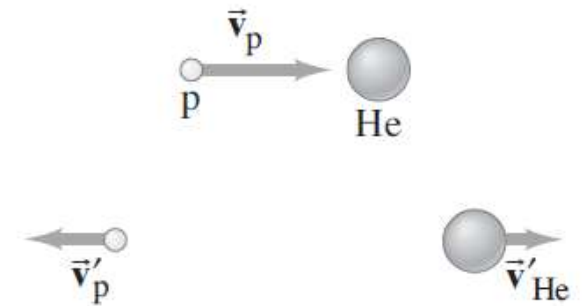
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Combinando ambas ecuaciones resulta:

$$v'_p = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_p + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{\text{He}}$$

$$v'_{\text{He}} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_p + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{\text{He}}$$



$$v'_{\text{He}} = \frac{2m_p v_p}{m_p + m_{\text{He}}} = 1.45 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$v'_p = -2.15 \times 10^4 \text{ m/s}$$

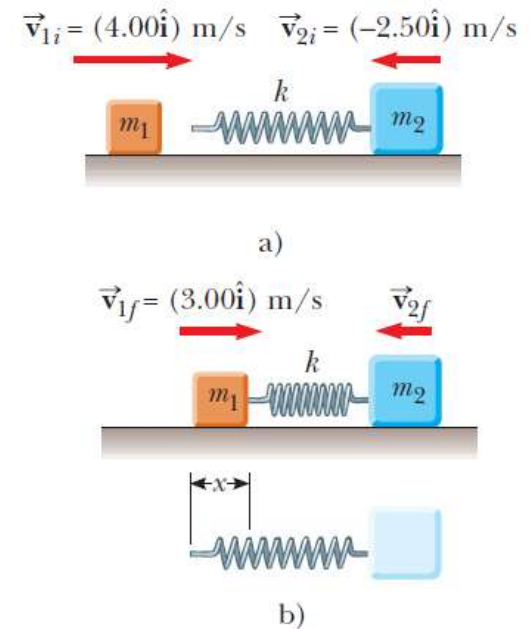
EJEMPLO**Un colisión de dos cuerpos con un resorte**

Un bloque de masa $m_1 = 1.60 \text{ kg}$ inicialmente móvil hacia la derecha con una rapidez de 4.00 m/s sobre una pista horizontal sin fricción y choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2.10 \text{ kg}$ que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 2.50 m/s , como se muestra en la figura. La constante de resorte es 600 N/m .

A) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión.

B) Durante la colisión, en el instante en que el bloque 1 se mueve hacia la derecha con una velocidad de $+3.00 \text{ m/s}$, como en la figura, determine la velocidad del bloque 2.

C) Determine la distancia que se comprime el resorte en dicho instante.



Un bloque móvil se aproxima a un segundo bloque en movimiento que está unido a un resorte.

A) Conservación de p

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s}) = (1.60 \text{ kg})v_{1f} + (2.10 \text{ kg})v_{2f}$$

$$1.15 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (1.60 \text{ kg})v_{1f} + (2.10 \text{ kg})v_{2f}$$

Conservación de E_c conduce a

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

$$4.00 \text{ m/s} - (-2.50 \text{ m/s}) = 6.50 \text{ m/s} = -v_{1f} + v_{2f}$$

$$10.4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = -(1.60 \text{ kg})v_{1f} + (1.60 \text{ kg})v_{2f}$$

$$11.55 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = (3.70 \text{ kg})v_{2f}$$

$$v_{2f} = \frac{11.55 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{3.70 \text{ kg}} = 3.12 \text{ m/s}$$

$$6.50 \text{ m/s} = -v_{1f} + 3.12 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = -3.38 \text{ m/s}$$

B)

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s}) = (1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})v_{2f}$$

$$v_{2f} = -1.74 \text{ m/s}$$

C)

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{1}{2}(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2.10 \text{ kg})(2.50 \text{ m/s})^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}(1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2.10 \text{ kg})(1.74 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(600 \text{ N/m})x^2$$

$$x = 0.173 \text{ m}$$

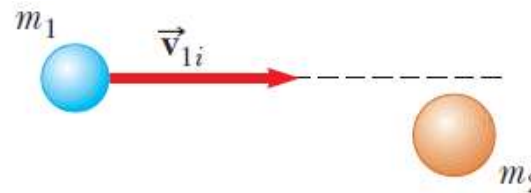
Importante: U es la **energía potencial interna** del sistema de dos partículas.

Colisiones en dos dimensiones:

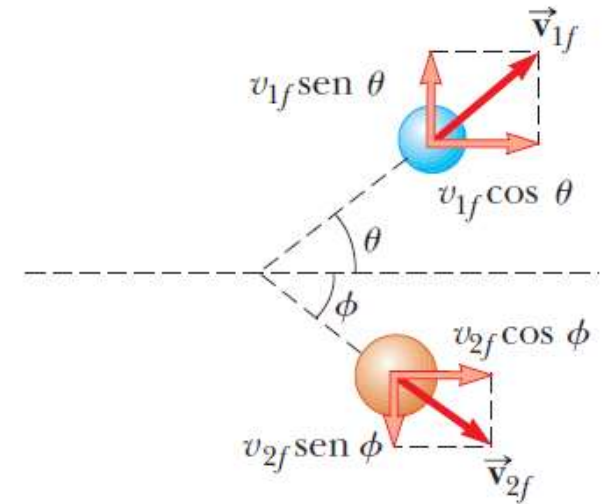
Supongamos una colisión elástica entre dos partículas

Planteo:

- $p = cte$
- $E_c = cte$



a) Antes de la colisión



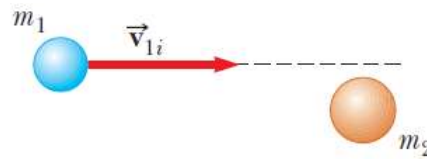
b) Después de la colisión

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

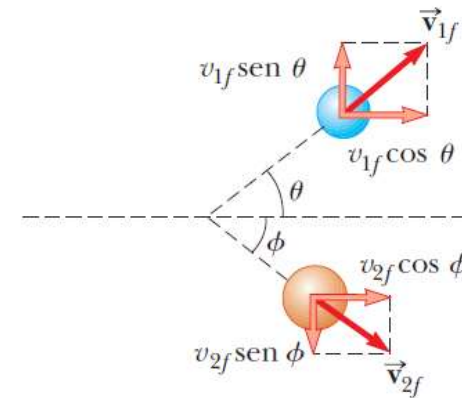
$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Supongamos que m_2 está en reposo. De la conservación de $\mathbf{p}$ tenemos:



a) Antes de la colisión



b) Después de la colisión

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$



$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi$$

EJEMPLO**Colisión protón-protón**

Un protón choca elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. El protón que entra tiene una rapidez inicial de $3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$ y hace una colisión oblicua con el segundo protón, como en la figura. (En separaciones cercanas, los protones ejercen una fuerza electrostática repulsiva mutua.) Después de la colisión, un protón se aleja en un ángulo de 37.0° hacia la dirección de movimiento original y el segundo se desvía a un ángulo ϕ con el mismo eje. Encuentre las magnitudes de velocidad finales de los dos protones y el ángulo ϕ .

$$v_{1f} \cos 37^\circ + v_{2f} \cos \phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} \sin 37.0^\circ - v_{2f} \sin \phi = 0$$

$$v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.50 \times 10^5 \text{ m/s})^2 = 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

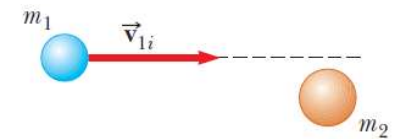
$$v_{2f} \cos \phi = 3.50 \times 10^5 \text{ m/s} - v_{1f} \cos 37.0^\circ$$

$$v_{2f} \sin \phi = v_{1f} \sin 37.0^\circ$$

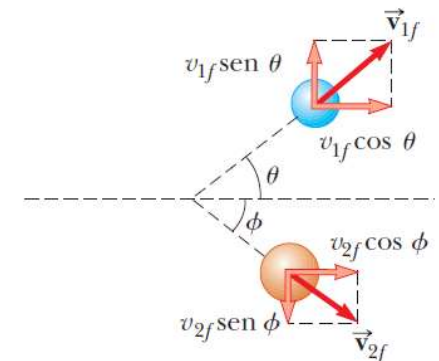
$$v_{2f}^2 \cos^2 \phi + v_{2f}^2 \sin^2 \phi$$

$$= 1.23 \times 10^{11} \text{ m}^2/\text{s}^2 - (7.00 \times 10^5 \text{ m/s})v_{1f} \cos 37.0^\circ + v_{1f}^2 \cos^2 37.0^\circ$$

$$+ v_{1f}^2 \sin^2 37.0^\circ$$



a) Antes de la colisión



b) Después de la colisión

Reemplazando y despejando:

$$v_{2f}^2 = 1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2$$

$$v_{1f}^2 + [1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5)v_{1f} + v_{1f}^2] = 1.23 \times 10^{11}$$

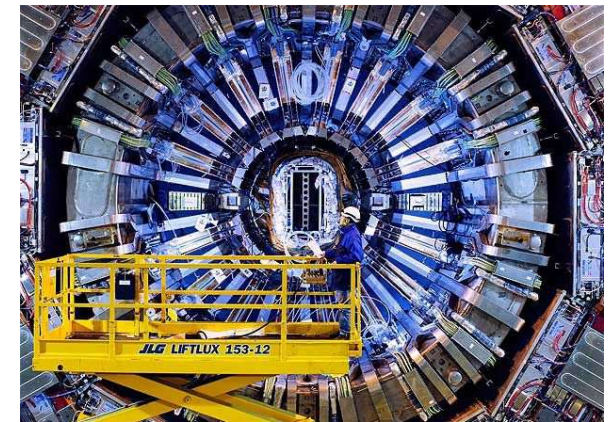
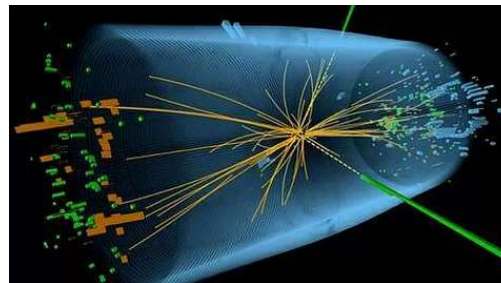
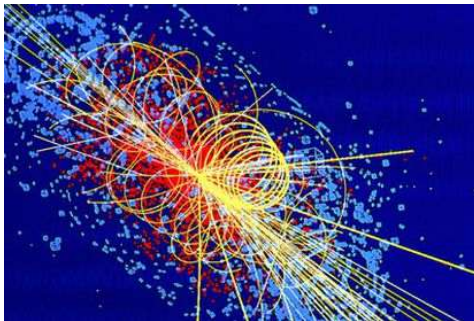
$$2v_{1f}^2 - (5.59 \times 10^5)v_{1f} = (2v_{1f} - 5.59 \times 10^5)v_{1f} = 0$$

$$2v_{1f} - 5.59 \times 10^5 = 0 \rightarrow v_{1f} = 2.80 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$v_{2f} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - v_{1f}^2} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - (2.80 \times 10^5)^2}$$
$$= 2.11 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{v_{1f} \sin 37.0^\circ}{v_{2f}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{(2.80 \times 10^5) \sin 37.0^\circ}{2.11 \times 10^5} \right) = 53.0^\circ$$

La “realidad”:



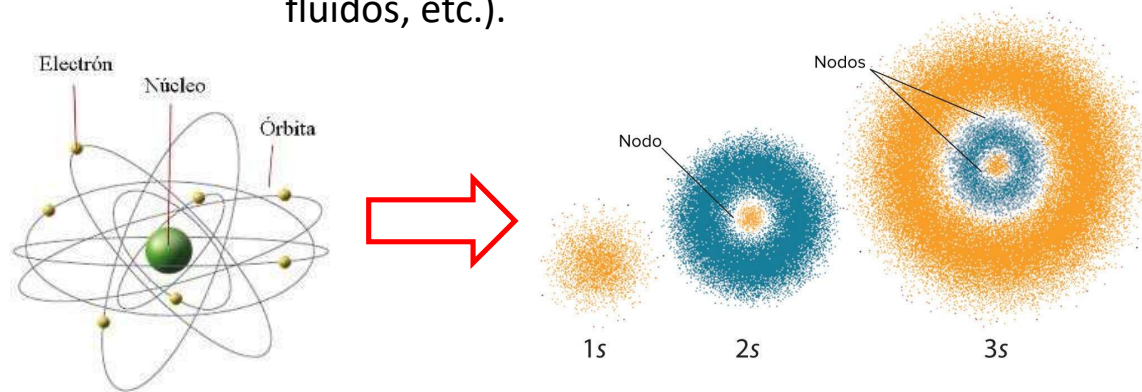
Sistema de partículas:

Consideramos un sistema de partículas como un **conjunto de N partículas que se mueven por separado**, si bien interactúan entre sí y están sometidos a fuerzas externas.

El número de partículas que forman un sistema puede ser muy variado e ir desde 2 (por ejemplo, al estudiar un átomo de hidrógeno), hasta cantidades gigantescas (por ejemplo, en 1 litro de agua hay del orden de 10^{24} partículas).

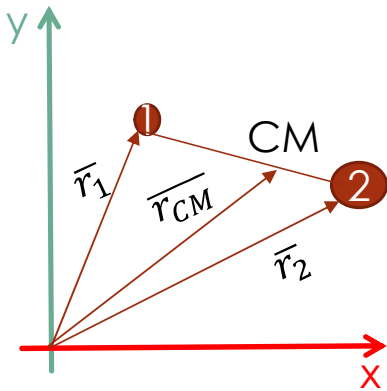
Cuando el **número de partículas es reducido se puede abordar el problema dinámico analizando cada una por separado**.

Cuando es **elevado, es preciso recurrir a promedios y descripciones colectivas** (como la termodinámica estadística, o la mecánica de fluidos, etc.).



SISTEMA DE PARTICULAS

Si yo tengo un sistema formado por dos partículas M_1 y M_2 en un plano coordenado xy , para cada masa voy a poder definir su correspondiente vector posición $\mathbf{r}$. Asimismo, voy a poder definir el vector posición del centro de masa del sistema



El valor de los vectores $\mathbf{r}$ dependerá del sistema coordenado que se elija. Según el sistema de coordenadas establecido, y sabiendo que la posición del CM depende de la masa de las partículas:

$$\begin{aligned}M_T x_{CM} &= M_1 x_1 + M_2 x_2 \\M_T y_{CM} &= M_1 y_1 + M_2 y_2 \\M_T z_{CM} &= M_1 z_1 + M_2 z_2\end{aligned}$$

En líneas generales

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{1}{M_T} \sum_i^n M_i x_i \\y_{CM} &= \frac{1}{M_T} \sum_i^n M_i y_i \\z_{CM} &= \frac{1}{M_T} \sum_i^n M_i z_i\end{aligned}$$

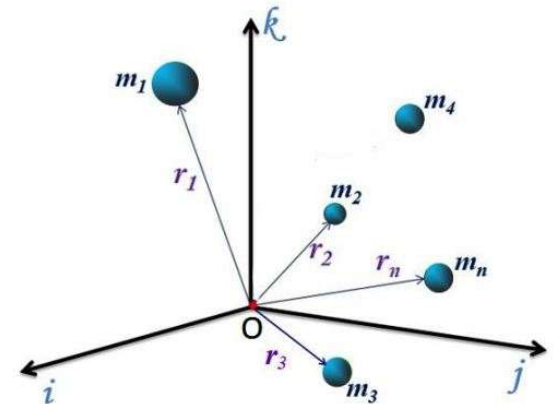
Movimiento de un sistema de partículas (traslación):

Consideremos un sistema de partículas formados por masas m_i , tal que la suma de las masas sea M

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$M\vec{v}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}}$$

La **cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa**. En otras palabras, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{v}_{\text{CM}}$.

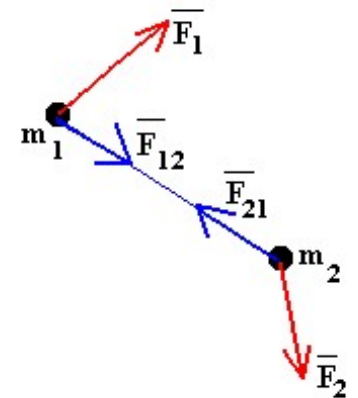


$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema pueden incluir tanto fuerzas externas (desde afuera del sistema) y fuerzas internas (desde dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1.

En consecuencia, cuando en la ecuación se suman todas las fuerzas internas, se cancelan en pares y se encuentra que la fuerza neta en el sistema la causan *solamente* las fuerzas externas.



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

Resumiendo:

El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Integrando:

$$\int \sum \vec{F}_{\text{ext}} dt = \int M \vec{a}_{\text{CM}} dt = \int M \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} dt = M \int d\vec{v}_{\text{CM}} = M \Delta \vec{v}_{\text{CM}}$$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}_{\text{tot}}$$

Si la fuerza neta (resultante) sobre un sistema es cero, entonces:

$$M \vec{a}_{\text{CM}} = M \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

$$M \vec{v}_{\text{CM}} = \vec{p}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad (\text{cuando } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0)$$

EJEMPLO**El cohete que explota**

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de 450 m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

$$\vec{p}_i = M\vec{v}_i = M(300\hat{j} \text{ m/s})$$

$$\vec{p}_f = \frac{M}{3}(240\hat{i} \text{ m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{j} \text{ m/s}) + \frac{M}{3}\vec{v}_f$$

$$\frac{M}{3}\vec{v}_f + \frac{M}{3}(240\hat{i} \text{ m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{j} \text{ m/s}) = M(300\hat{j} \text{ m/s})$$

$$\vec{v}_f = (-240\hat{i} + 450\hat{j}) \text{ m/s}$$

