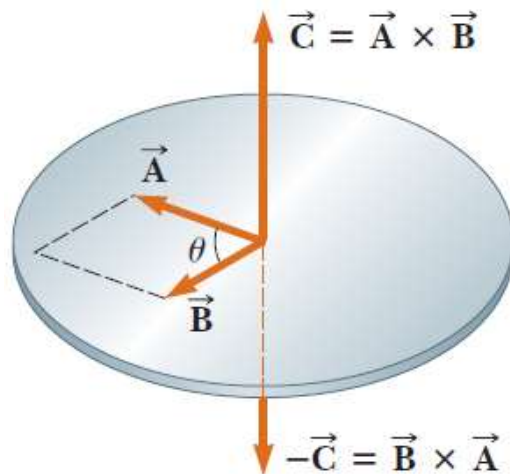


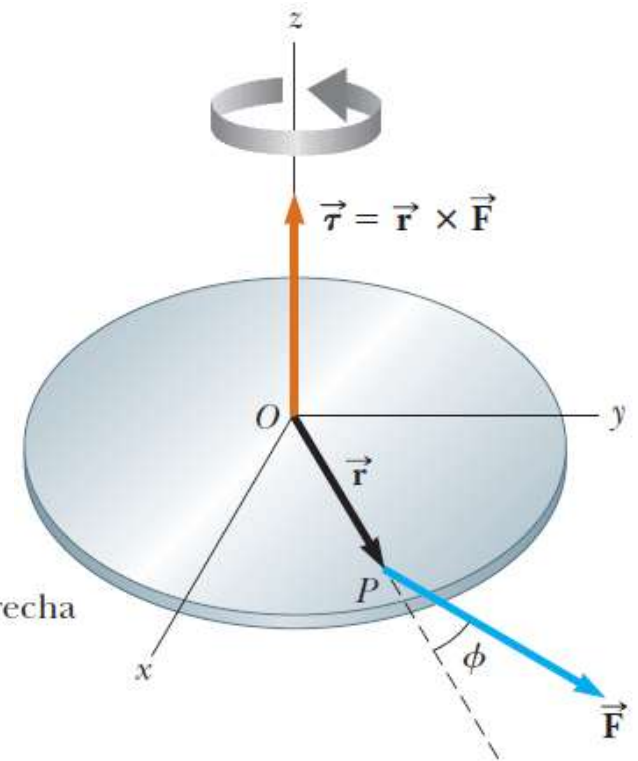
Torque de una fuerza (revisión):

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

El vector momento de torsión $\vec{\tau}$ se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición $\vec{r}$ y el vector fuerza aplicada $\vec{F}$.



Regla de la mano derecha



Momento angular de una partícula:

Consideremos una partícula de masa m ubicada en la posición vectorial $\mathbf{r}$ y móvil con cantidad de movimiento lineal $\mathbf{p}$

Habíamos visto que:

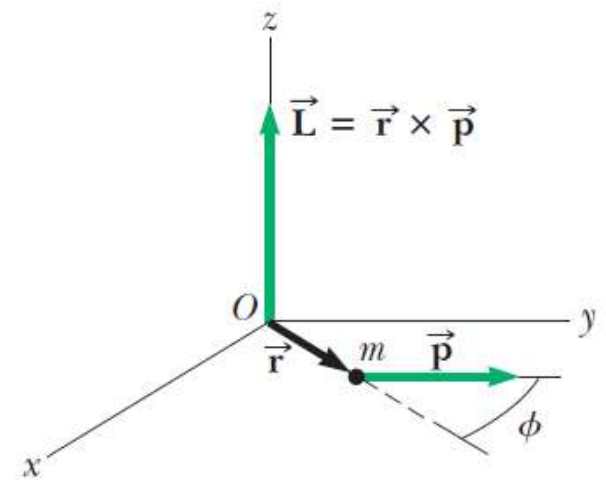
$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Calculemos el torque:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Por otra parte tenemos que:

$$d\vec{\mathbf{r}}/dt = \vec{\mathbf{v}} \rightarrow m\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{p}} \rightarrow \vec{\mathbf{v}} \text{ y } \vec{\mathbf{p}} \text{ son paralelos} \rightarrow \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$$



Entonces, si sumamos un término nulo a:

$$\vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

nos queda:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

que se puede escribir en forma compacta como:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

Llamamos *momento angular* a la cantidad $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$

Finalmente:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Entonces:

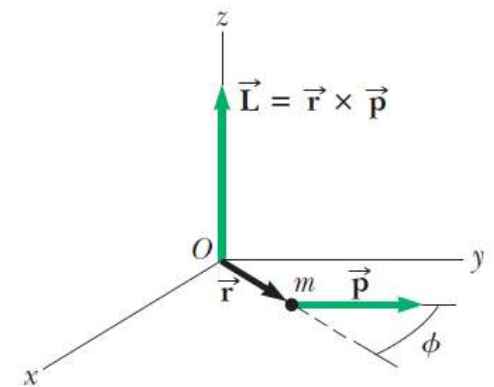
La cantidad de **movimiento angular** instantánea $\vec{L}$ de una partícula en relación con un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula $\vec{r}$ y su cantidad de movimiento lineal instantánea $\vec{p}$:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

El momento de torsión que actúa sobre una partícula es igual a la relación de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula.

$$L = mvr \sin \phi$$

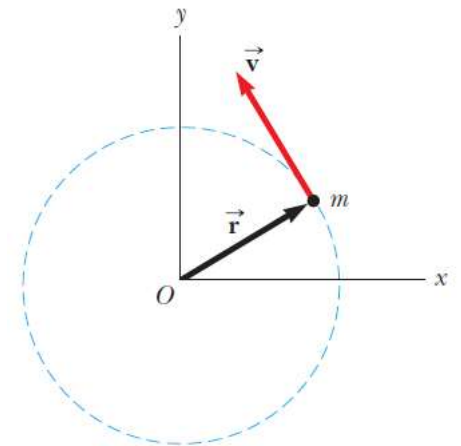
$$[L]_{SI} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$



EJEMPLO**Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular**

Una partícula se mueve en el plano xy en una trayectoria circular de radio r , como se muestra en la figura. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular en relación con un eje a través de O cuando su velocidad es $\vec{v}$.

$$L = mvr \sin 90^\circ = mvr$$



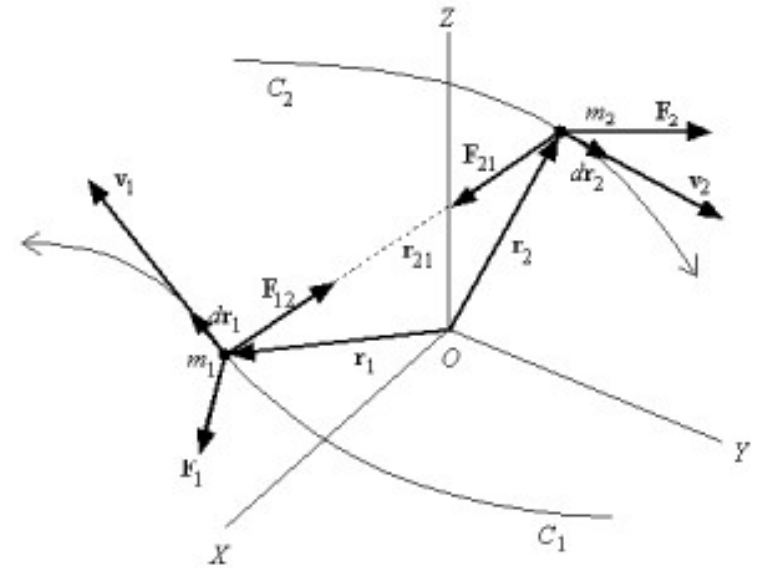
Este valor de L es constante porque los tres factores a la derecha son constantes. La dirección de $\vec{L}$ también es constante, aun cuando la dirección de $\vec{p} = m\vec{v}$ siga cambiando. Para verificar esta afirmación, aplique la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}$ en la figura. Su pulgar apunta hacia arriba y se aleja de la página, así que esta es la dirección de $\vec{L}$. En consecuencia, se puede escribir la expresión vectorial $\vec{L} = (mvr)\hat{k}$. Si la partícula se moviera en sentido de las manecillas del reloj, $\vec{L}$ apuntaría hacia abajo y adentro de la página y $\vec{L} = -(mvr)\hat{k}$. **Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante en torno a un eje a través del centro de su trayectoria.**

Momento angular de un sistema de partículas:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_n = \sum_i \vec{L}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$



Los momentos de torsión que actúan sobre las partículas del sistema son aquellos asociados con fuerzas internas entre las partículas y aquellos asociados con fuerzas externas. Sin embargo, el momento de torsión neto asociado con todas las fuerzas internas es cero.

Recordar que la tercera ley de Newton dice que las fuerzas internas entre las partículas del sistema son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

Se tiene entonces:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

La cantidad de movimiento angular total de un sistema varía con el tiempo sólo si un momento de torsión externo neto actúa sobre el sistema.

La ecuación anterior es la representación matemática de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema no aislado**.

Si un sistema no es aislado en el sentido que existe un momento de torsión neto sobre él, el momento de torsión es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de momento angular.

EJEMPLO**Un sistema de objetos**

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura. El radio de la polea es R , y la masa del borde delgado es M . Los rayos de la polea tienen masa despreciable. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los dos objetos, con los conceptos de cantidad de movimiento angular y momento de torsión.

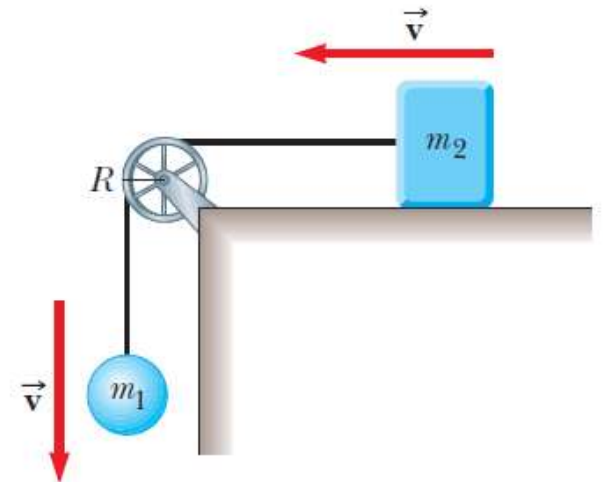
$$L = m_1 v R + m_2 v R + M v R = (m_1 + m_2 + M) v R$$

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1 g R = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2 + M) v R]$$

$$m_1 g R = (m_1 + m_2 + M) R \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$



Momento angular de un objeto rígido giratorio:

Momento angular en torno al eje z: $m_i v_i r_i$

Velocidad tangencial: $v_i = r_i \omega$

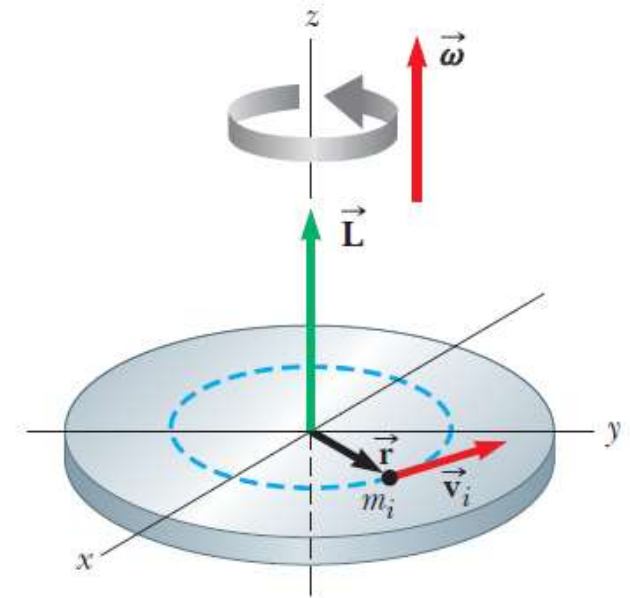
Se toma $\mathbf{L}$ en dirección de ω , entonces: $L_i = m_i r_i^2 \omega$

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

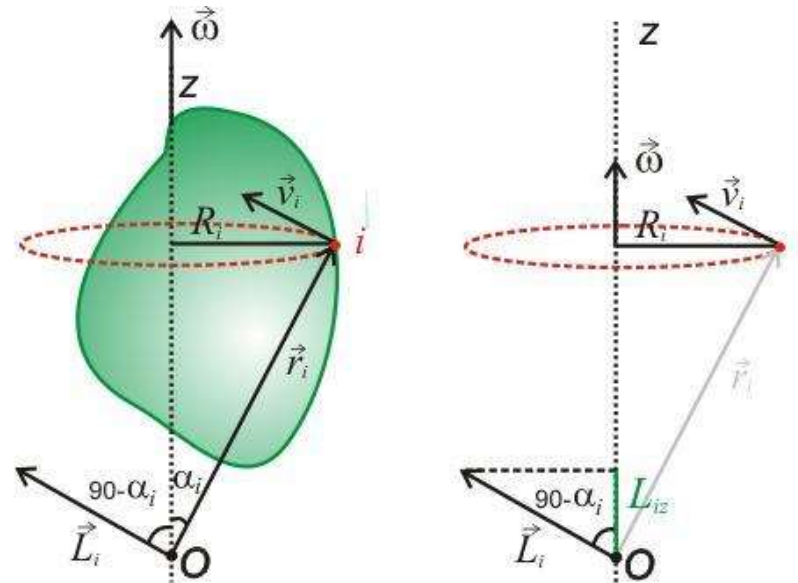
$$L_z = I\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$



Si un objeto simétrico da vueltas en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa, puede escribir la ecuación en forma vectorial como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, donde $\vec{L}$ es la cantidad de movimiento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación. Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si $\vec{L}$ representa la componente de cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.



Sistema aislado. Conservación del momento angular:

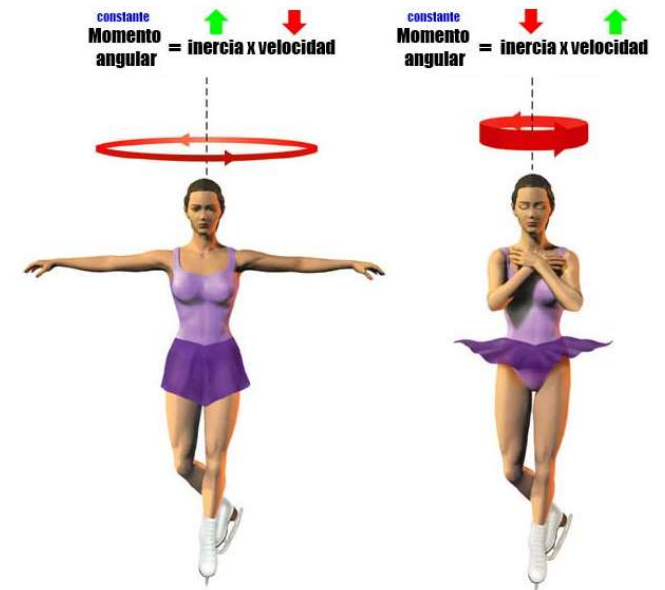
La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum \vec{L}_n$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante}$$



Entonces:

$$\text{Para un sistema aislado} \begin{cases} E_i = E_f & (\text{si no hay transferencia de energía}) \\ \vec{p}_i = \vec{p}_f & (\text{si la fuerza externa neta es cero}) \\ \vec{L}_i = \vec{L}_f & (\text{si el momento de torsión externo neto es cero}) \end{cases}$$



El trompo:

Movimiento de precesión de un trompo que gira en torno a su eje de simetría. a) Las únicas fuerzas externas que actúan en el trompo son la fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza gravitacional $M\vec{g}$. La dirección de la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ es a lo largo del eje de simetría. La regla de la mano derecha indica que $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times M\vec{g}$ está en el plano xy . b) La dirección de $\Delta\vec{L}$ es paralela a la de $\vec{\tau}$ en a). Ya que $\vec{L}_f = \Delta\vec{L} + \vec{L}_i$, el trompo precede en torno al eje z .

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

