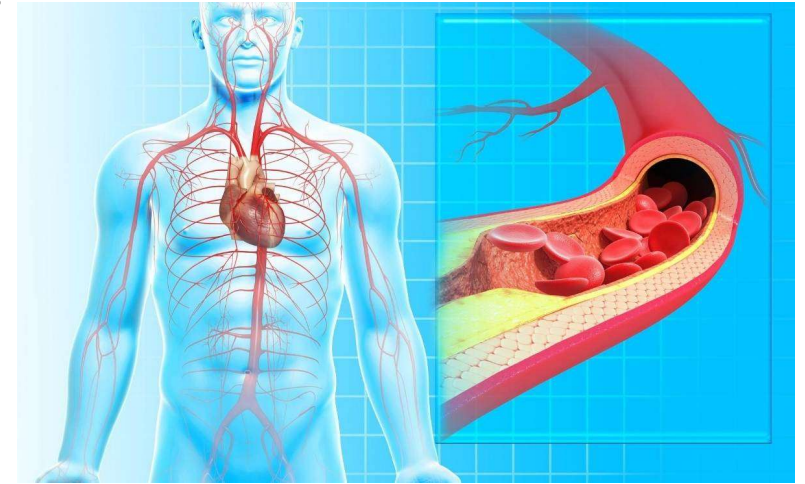


Dinámica de Fluidos:

Hasta el momento, el estudio de los fluidos se restringió a fluidos en reposo. Ahora la atención se dirige a los fluidos en movimiento.



Fluidos ideales:

Corresponde a una caracterización simplificada de los fluidos.

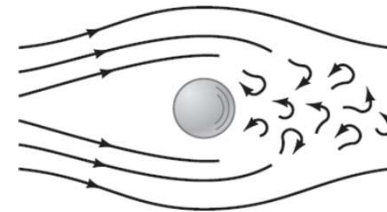
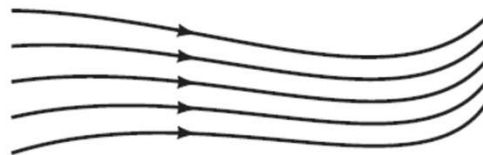
Incompresible: su densidad no varía con la presión (lo opuesto de incompresible: **compresible**)

$$\rho = cte.$$

Estacionario: sus parámetros no dependen del tiempo (lo opuesto de estacionario: **no estacionario**)

Laminar: desplazamiento en forma de capas o láminas. En este tipo de flujo cada partícula de fluido sigue una trayectoria uniforme, denominada **línea de flujo** o **línea de corriente**, y esas trayectorias no se cruzan entre sí (lo opuesto de laminar: **turbulento**)

Laminar



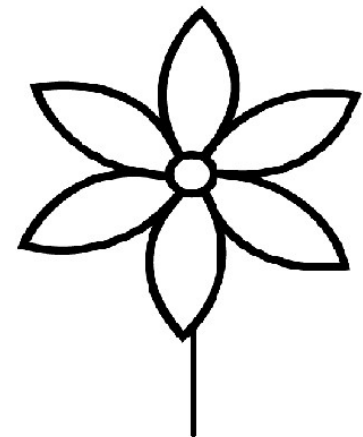
Turbulento

No viscoso: el flujo laminar no presenta fricción interna entre capas (lo opuesto de no viscoso: **viscoso**)

Irrotacional: este tipo de flujo implica que un elemento de fluido no posee una velocidad angular neta, y se elimina la posibilidad que aparezcan remolinos (lo opuesto de irrotacional: **rotacional**)



aspas curvadas en direcciones opuestas

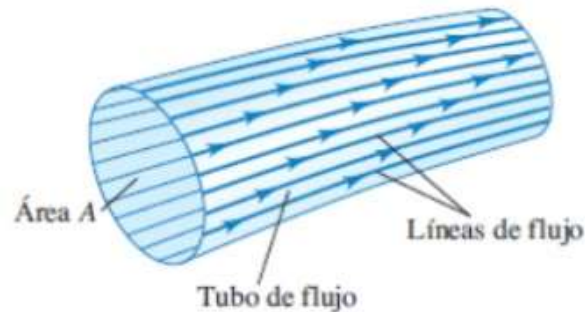


aspas en un plano

Línea de flujo o línea de corriente: es la trayectoria que sigue un elemento de fluido. Tangente a la misma se encuentra el vector velocidad.

Tubo de flujo: superficie que forma un conjunto de líneas de flujo.

Vena líquida: volumen de líquido delimitado por el tubo de flujo. La superficie de contorno limitante puede ser una pared sólida (tubería), el propio líquido o la atmósfera.



Conservación de la masa:

Ecuación de continuidad:

$$\text{flujo de masa} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 \Delta \ell_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1$$

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$$

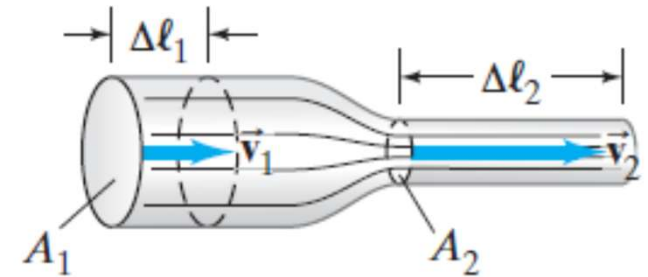
Caudal másico

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

Caudal volumétrico

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$[\rho = \text{constante}]$



EJEMPLO ESTIMACIÓN

Flujo de la sangre. En los seres humanos, la sangre fluye del corazón a la aorta, de donde pasa a las arterias mayores. Estas se ramifican para formar las arterias menores (arteriolas), las cuales a la vez se ramifican en miríadas de pequeños capilares. La sangre regresa al corazón a través de las venas. El radio de la aorta es de aproximadamente 1.2 cm y la sangre, al pasar por ella, lleva una rapidez aproximada de 40 cm/s. Un capilar típico tiene un radio de aproximadamente 4×10^{-4} cm y la sangre fluye por él con una rapidez de 5×10^{-4} m/s. Es-time cuántos capilares hay en el cuerpo.

PLANTEAMIENTO Suponemos que la densidad de la sangre no varía de forma significativa entre la aorta y los capilares. Por la ecuación de continuidad, la tasa de flujo de volumen en la aorta debe ser igual a la tasa de flujo de volumen en *todos* los capilares. El área total de todos los capilares está dada por el área de un capilar multiplicada por N , el número total de capilares.

SOLUCIÓN Sea A_1 el área de la aorta y A_2 el área de *todos* los capilares a través de los cuales fluye la sangre. Entonces $A_2 = N\pi r_{\text{cap}}^2$ donde $r_{\text{cap}} \approx 4 \times 10^{-4}$ cm es el radio promedio estimado de un capilar. De la ecuación de continuidad, tenemos

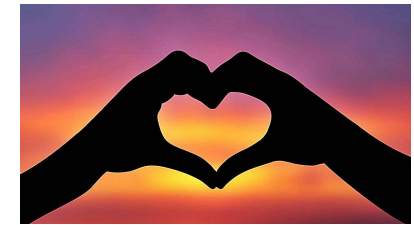
$$v_2 A_2 = v_1 A_1$$

$$v_2 N \pi r_{\text{cap}}^2 = v_1 \pi r_{\text{aorta}}^2$$

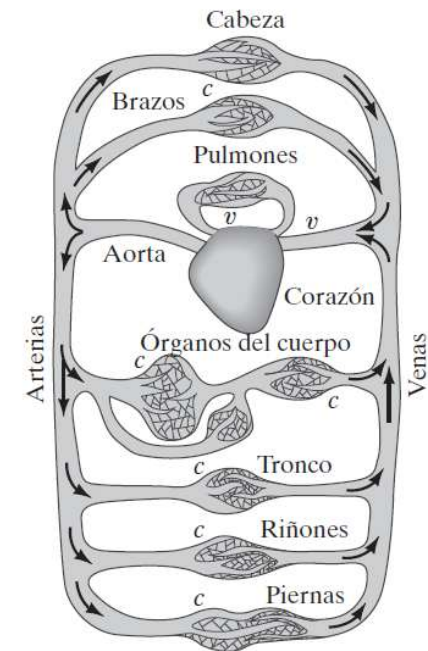
por lo que

$$N = \frac{v_1}{v_2} \frac{r_{\text{aorta}}^2}{r_{\text{cap}}^2} = \left(\frac{0.40 \text{ m/s}}{5 \times 10^{-4} \text{ m/s}} \right) \left(\frac{1.2 \times 10^{-2} \text{ m}}{4 \times 10^{-6} \text{ m}} \right)^2 \approx 7 \times 10^9,$$

o aproximadamente 10 mil millones de capilares.



Sistema circulatorio humano.



v = válvulas
 c = capilares

EJEMPLO Regar un jardín

Un jardinero usa una manguera de 2.50 cm de diámetro para llenar una cubeta de 30.0 L. El jardinero nota que tarda 1.00 min para llenar la cubeta. Luego acopla una boquilla con una abertura de 0.500 cm² de área de sección transversal. La boquilla se sostiene de tal modo que el agua se proyecta horizontalmente desde un punto a 1.00 m sobre el suelo. ¿Sobre qué distancia horizontal se puede proyectar el agua?

$$A = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \left[\frac{(2.50 \text{ cm})^2}{4} \right] = 4.91 \text{ cm}^2$$

$$Av = 30.0 \text{ L/min} = \frac{30.0 \times 10^3 \text{ cm}^3}{60.0 \text{ s}} = 500 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$v_1 = \frac{500 \text{ cm}^3/\text{s}}{A} = \frac{500 \text{ cm}^3/\text{s}}{4.91 \text{ cm}^2} = 102 \text{ cm/s} = 1.02 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_{xi} = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$v_{xi} = \frac{4.91 \text{ cm}^2}{0.500 \text{ cm}^2} (1.02 \text{ m/s}) = 10.0 \text{ m/s}$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

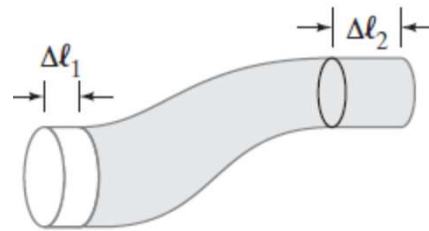
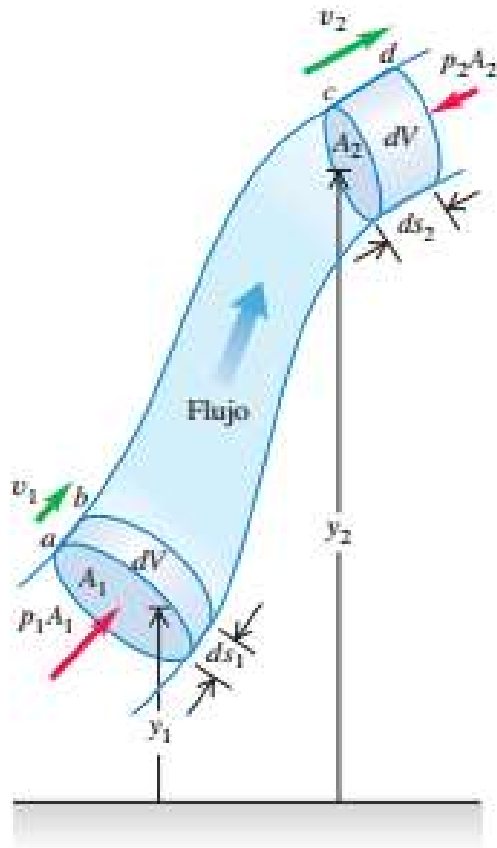
$$-1.00 \text{ m} = 0 + 0 - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2(1.00 \text{ m})}{9.80 \text{ m/s}^2}} = 0.452 \text{ s}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + (10.0 \text{ m/s})(0.452 \text{ s}) = 4.52 \text{ m}$$

Conservación de la energía

Ecuación de Bernoulli:



$$W_1 = F_1 \Delta \ell_1 = P_1 A_1 \Delta \ell_1$$

$$W_2 = -P_2 A_2 \Delta \ell_2$$

$$W_3 = -mg(y_2 - y_1)$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W = P_1 A_1 \Delta \ell_1 - P_2 A_2 \Delta \ell_2 - mgy_2 + mgy_1$$

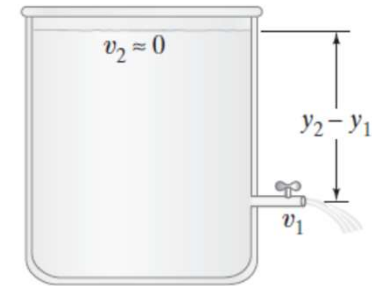
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = P_1 A_1 \Delta \ell_1 - P_2 A_2 \Delta \ell_2 - mgy_2 + mgy_1$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_1 - P_2 - \rho gy_2 + \rho gy_1$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2$$

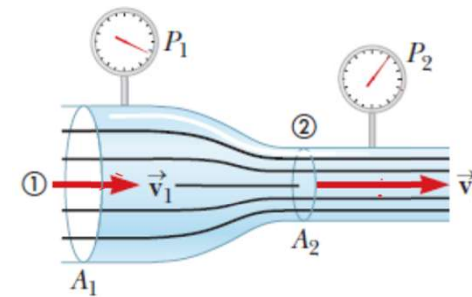
Aplicaciones:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2$$
$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}.$$



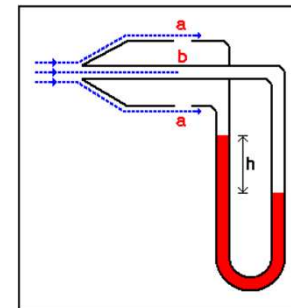
Tubo Venturi:

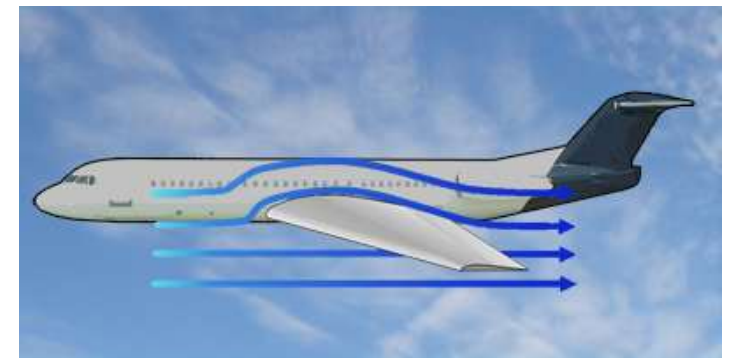
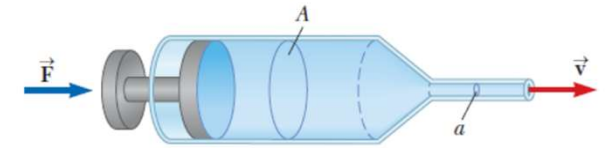
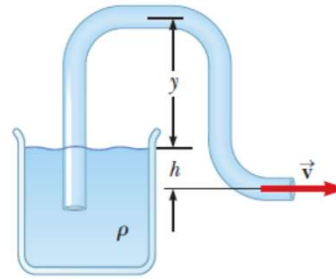
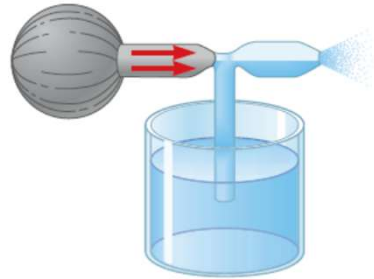
$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$



Tubo Pitot:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

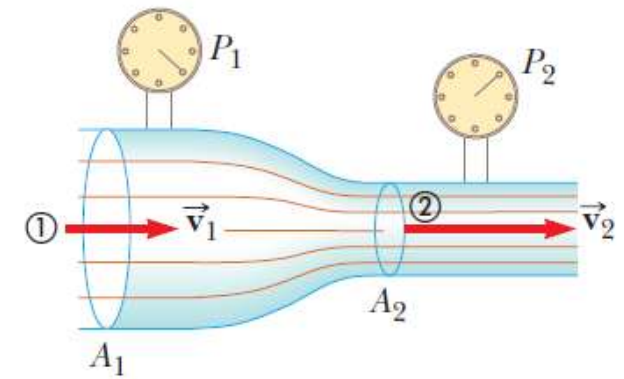




EJEMPLO

El tubo Venturi

La tubería horizontal constreñida que se ilustra en la figura, conocida como *tubo Venturi*, se usa para medir la rapidez de flujo de un fluido incompresible. Determine la rapidez del flujo en el punto 2 de la figura si se conoce la diferencia de presión $P_1 - P_2$.



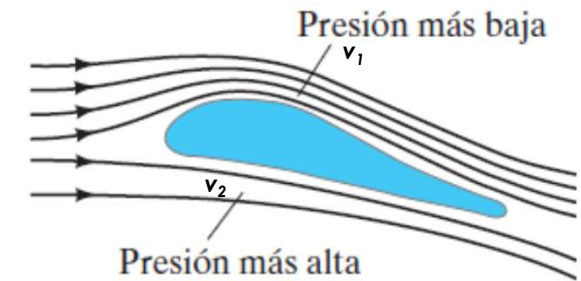
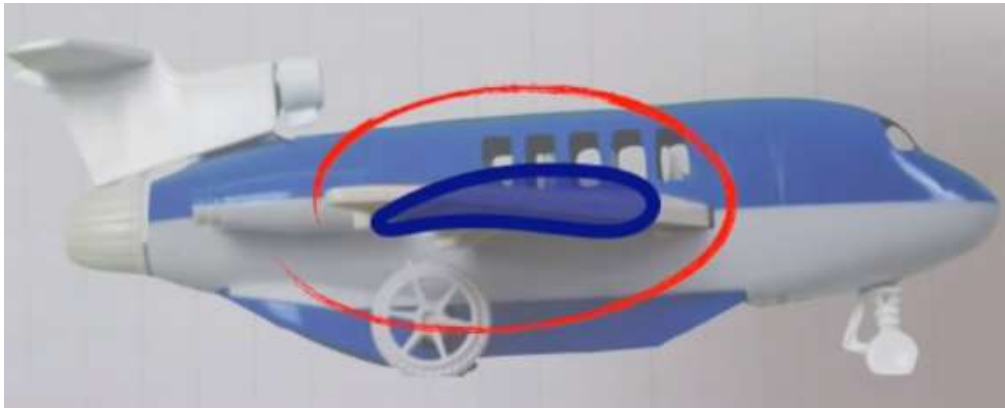
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Ala de un avión:

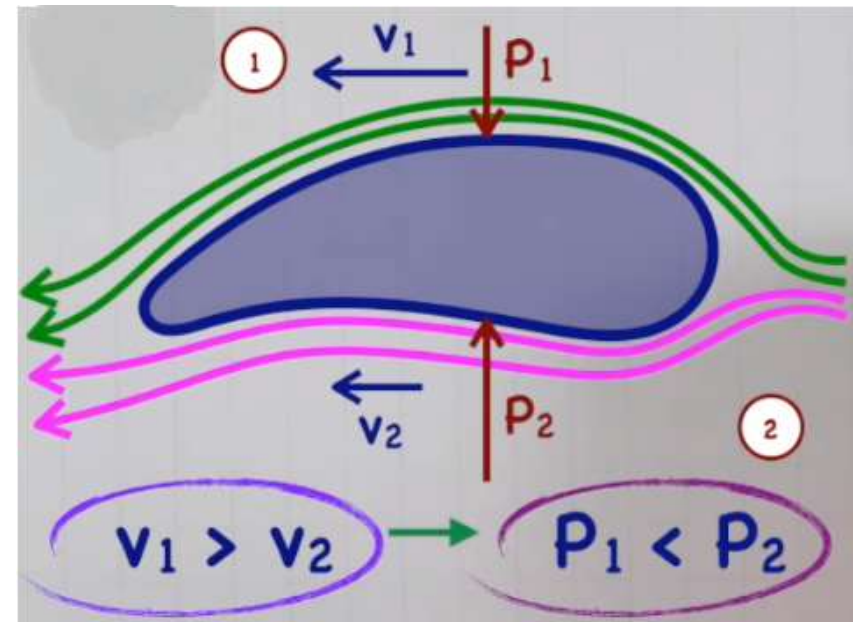
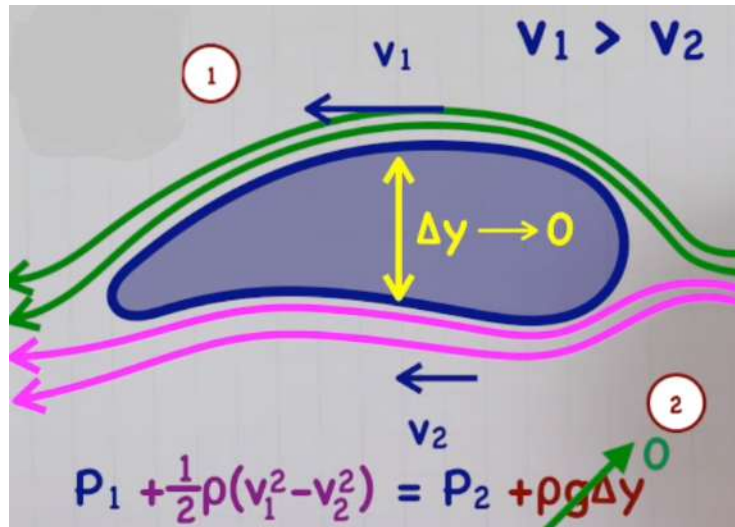


$$v_1 > v_2$$

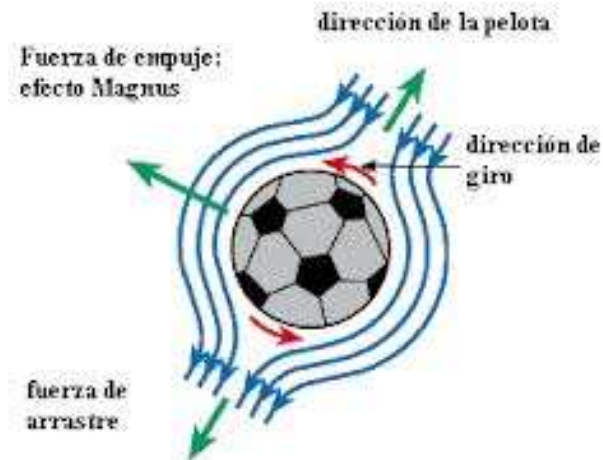
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

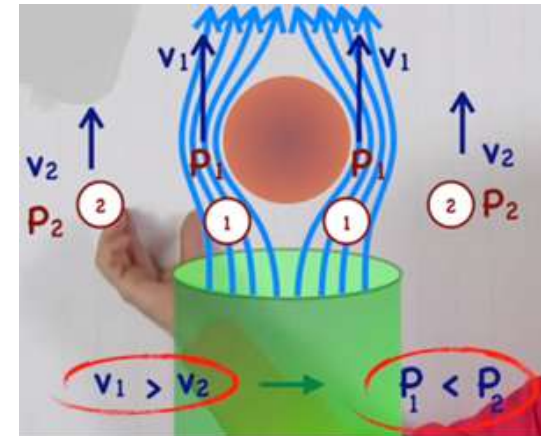
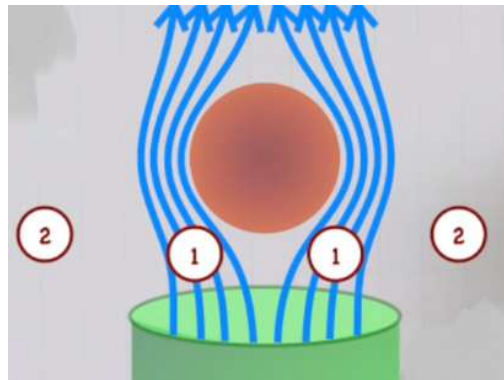
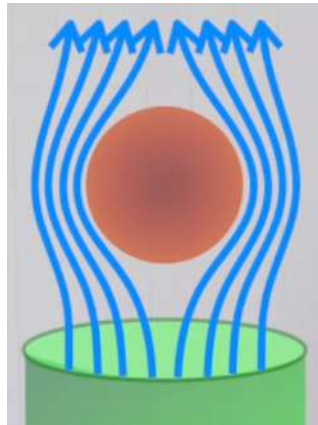
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = p_2 + \rho g(y_2 - y_1)$$



Lanzamiento de una pelota con “comba”:



Sostener una pelota:



Comentarios finales sobre las ecuaciones presentadas:

Ecuación de continuidad:

$$\rho A v = cte.$$

derivando

$$d(\rho A v) = 0$$

$$\rho A dv + \rho v dA + A v d\rho = 0$$

Ecuación de continuidad en forma diferencial:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0$$

Volumen de control: es un volumen fijo en el espacio, o en movimiento a través del cual fluye el fluido.

Superficie de control: la superficie limitando el volumen de control.

Ejemplo Presión de agua en el hogar

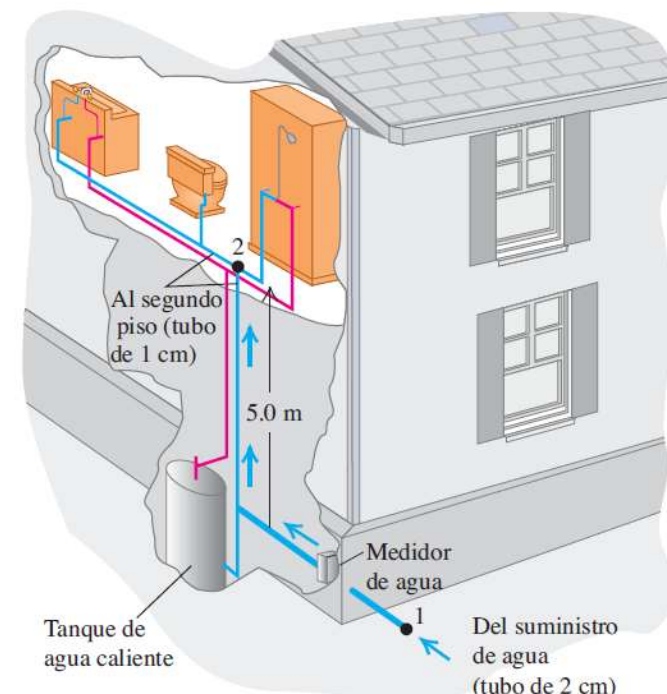
En una casa entra agua por un tubo con diámetro interior de 2.0 cm a una presión absoluta de 4.0×10^5 Pa (unas 4 atm). Un tubo de 1.0 cm de diámetro va al cuarto de baño del segundo piso, 5.0 m más arriba. La rapidez de flujo en el tubo de entrada es de 1.5 m/s. Calcule la rapidez de flujo, la presión y la tasa de flujo de volumen en el cuarto de baño.

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi (1.0 \text{ cm})^2}{\pi (0.50 \text{ cm})^2} (1.5 \text{ m/s}) = 6.0 \text{ m/s}$$

Nos dan p_1 y v_1 , y podemos obtener p_2 con la ecuación de Bernoulli,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) - \rho g (y_2 - y_1) = 4.0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &\quad - \frac{1}{2} (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (36 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2.25 \text{ m}^2/\text{s}^2) \\ &\quad - (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (9.8 \text{ m/s}^2) (5.0 \text{ m}) \\ &= 4.0 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.17 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.49 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 3.3 \times 10^5 \text{ Pa} = 3.3 \text{ atm} \end{aligned}$$

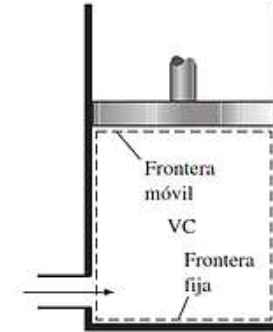
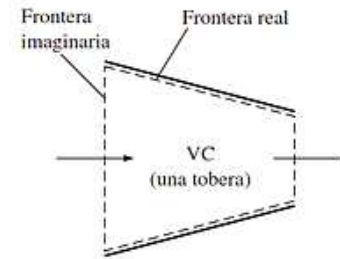
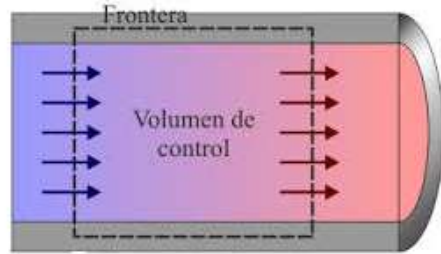
¿Qué presión tiene el agua en el cuarto de baño del segundo piso de esta casa?



La tasa de flujo de volumen es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= A_2 v_2 = \pi (0.50 \times 10^{-2} \text{ m})^2 (6.0 \text{ m/s}) \\ &= 4.7 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0.47 \text{ L/s} \end{aligned}$$

Ésta es una tasa de flujo razonable para un lavabo o ducha. Advierta que, al cerrar el agua, v_1 y v_2 son cero, el término $\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$ de la ecuación de la presión desaparece, y la presión sube a 3.5×10^5 Pa.



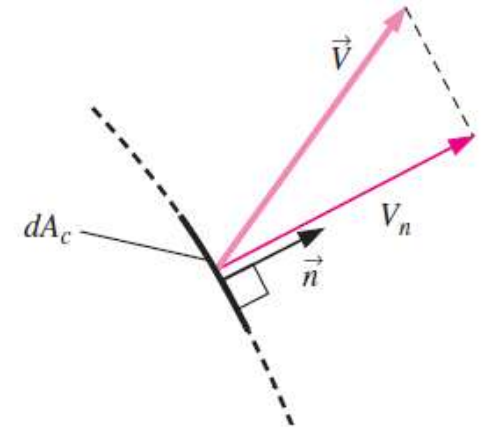
Ecuación general de conservación de la masa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{volumen de control}} \rho dV + \sum_{\text{entrada}} \int_A \rho v_n dA - \sum_{\text{salida}} \int_A \rho v_n dA = 0$$

variación de masa
en el volumen de
control

flujo de entrada
a través de la
superficie de
control

flujo de salida
a través de la
superficie de
control



Ecuación de Bernoulli:

En caso de haber elementos en la tubería que agreguen o quiten energía (caso estacionario):

$$(P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2) - (P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1) \\ = \rho(e_B + e_V + e_T + e_C + e_R)$$

donde:

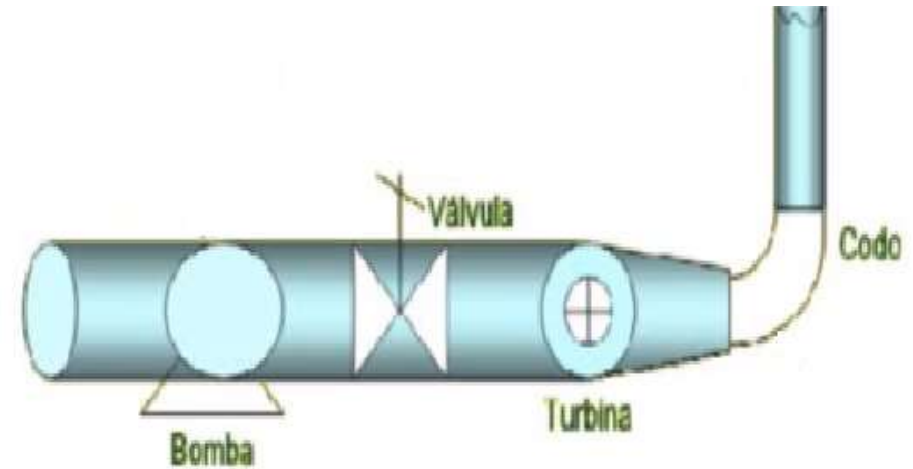
e_B = energía por unidad de masa
aportada por la bomba

e_V = energía por unidad de masa
perdida en la válvula

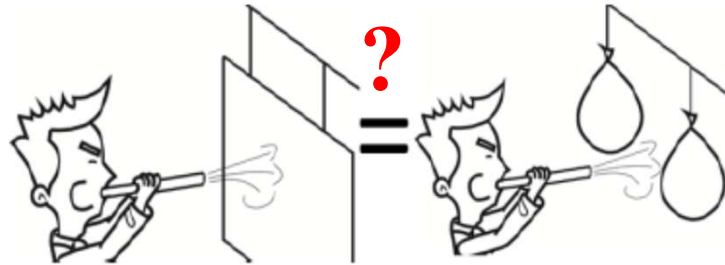
e_T = energía por unidad de masa
perdida en la turbina

e_C = energía por unidad de masa perdida en los codos

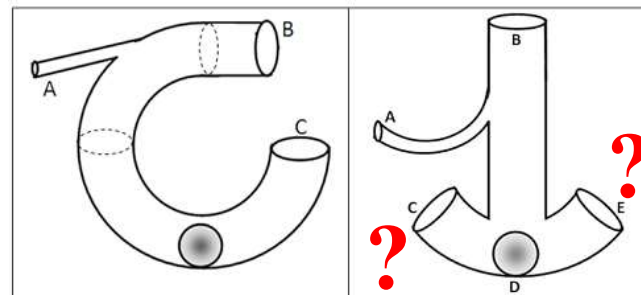
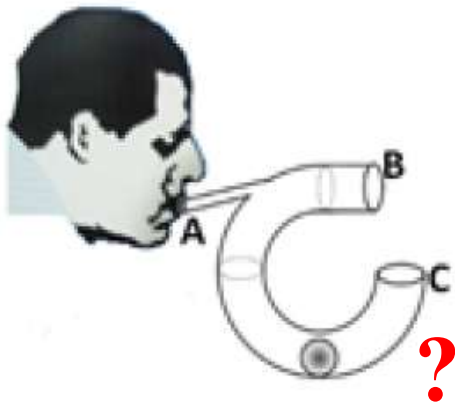
e_R = energía por unidad de masa perdida en las rugosidades de las paredes



Experiencias discrepantes a partir de la ecuación de Bernoulli:

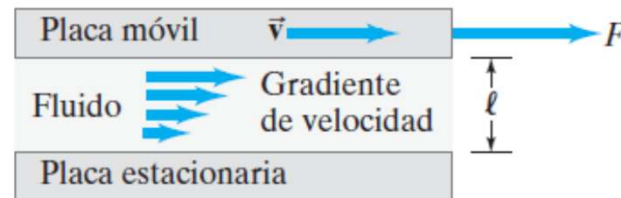


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$



Fluidos reales:

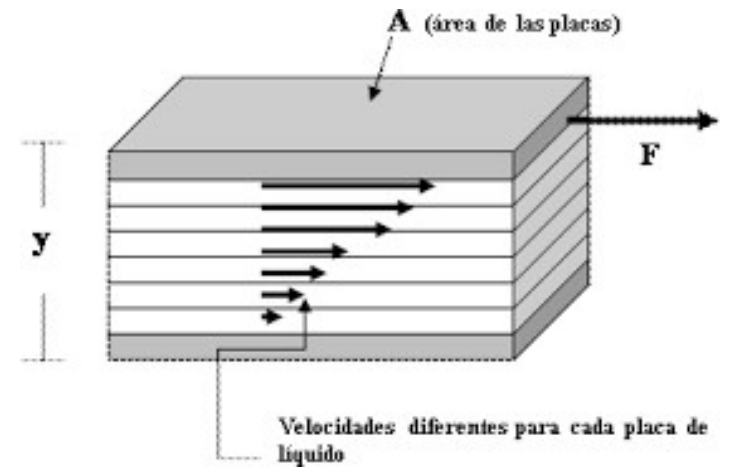
Viscosidad:



$$F = \eta A \frac{v}{\ell}$$

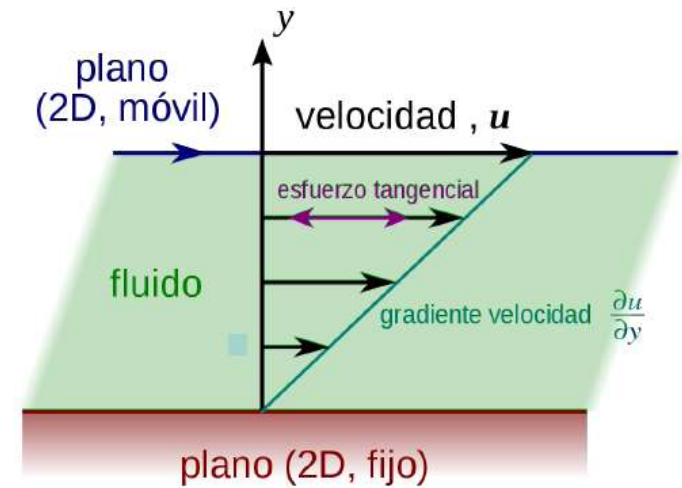
Coeficientes de viscosidad		
Fluido	temperatura en °C)	Coeficiente de viscosidad, η (Pa · s) [†]
Agua	(0°)	1.8×10^{-3}
	(20°)	1.0×10^{-3}
	(100°)	0.3×10^{-3}
Sangre entera (37°)		$\approx 4 \times 10^{-3}$
Plasma sanguíneo (37°)		$\approx 1.5 \times 10^{-3}$
Alcohol etílico (20°)		1.2×10^{-3}
Aceite para motor (30°) (SAE 10)		200×10^{-3}
Glicerina (20°)		1500×10^{-3}
Aire (20°)		0.018×10^{-3}
Hidrógeno (0°)		0.009×10^{-3}
Vapor de agua (100°)		0.013×10^{-3}
[†] 1 Pa · s = 10 P = 1000 cP.		

$$F = \eta A \frac{v}{y}$$



Esfuerzo de corte:

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$



Viscosidades aproximadas de los productos comunes a temperatura ambiente de 21 °C (70 °F)	
Material	Viscosidad en centipoise
Aire	0,01 cps
Metanol	0,5 cps
Agua	1 cps
Leche	3 cps
Glicol etileno	15 cps
Vino	25 cps
SAE 10 Aceite de motor	85 a 140 cps
SAE 20 Aceite de motor	140 a 420 cps
SAE 30 Aceite de motor	420-650 cps
SAE 40 Aceite de motor	650 a 900 cps
Aceite Castrol	1.000 cps
Miel Karo	5.000 cps
Miel	10.000 cps
Chocolate	25.000 cps
Salsa de tomate	50.000 cps
Mostaza	70.000 cps
Crema	100.000 cps
Manteca de cacahuete	250.000 cps
Compuestos asfalto	500.000 cps
Polímeros fundidos	1.000.000 cps
Masillas	2.000.000 cps
Compuestos de caucho	5.000.000 cps

Ecuación para la velocidad:

$$p_1 A - p_2 A + F = 0$$

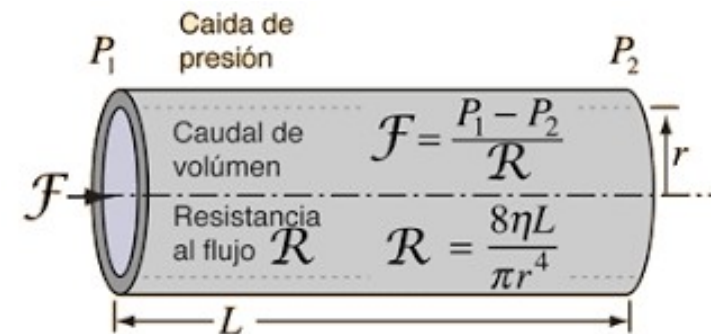
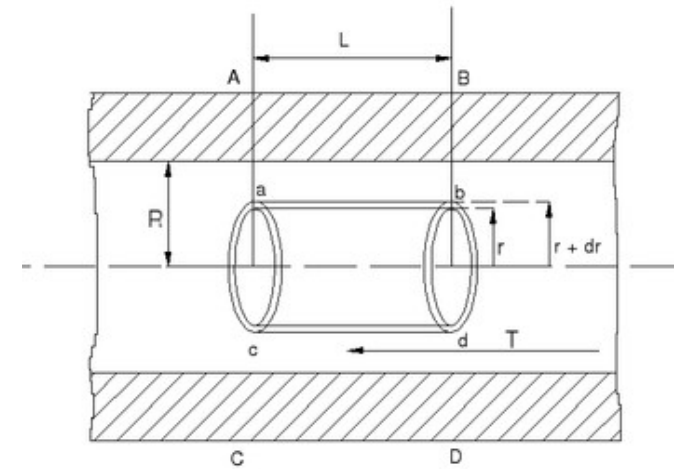
$$\frac{F}{A_L} = \eta \frac{dv}{dr}$$

$$F = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$$

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\pi r^2 \Delta p = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$$

$$r \Delta p = -2L \eta \frac{dv}{dr}$$



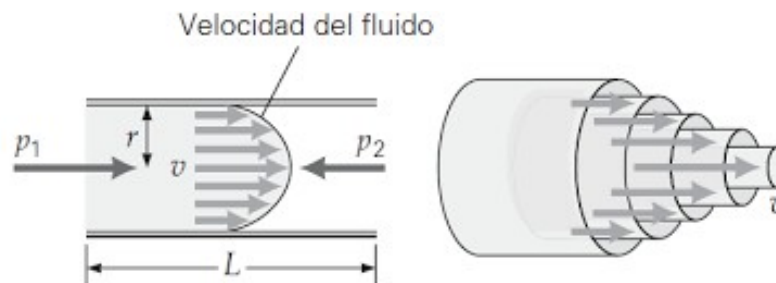
$$dv = -\frac{\Delta p}{2L\eta} r dr$$

$$v = -\frac{\Delta p}{4L\eta} r^2 + C$$

$$C = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2$$

$$v = \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

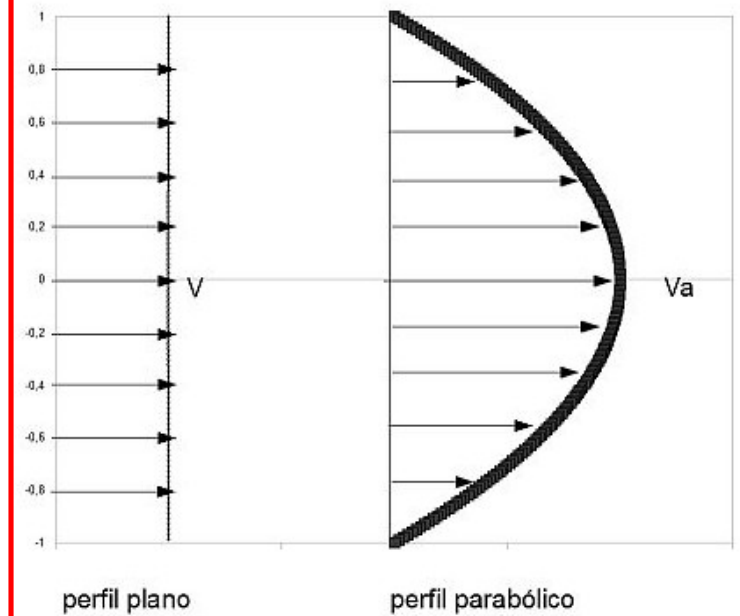
$$v_{max} = \frac{\Delta p}{4L\eta} R^2$$



PERFILES DE VELOCIDAD DEL FLUJO EN UN TUBO

fluido ideal
viscosidad = 0

fluido real
viscosidad = cte



Caudal. Ecuación de Poiseuille:

$$dQ = 2\pi r dr v$$

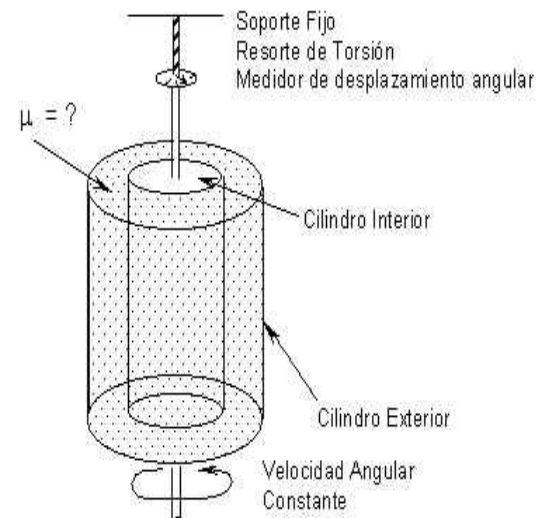
$$dQ = 2\pi r dr \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta p}{4L\eta} (R^2 - r^2) dr =$$

$$= \frac{\pi \Delta p}{2L\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi \Delta p}{2L\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

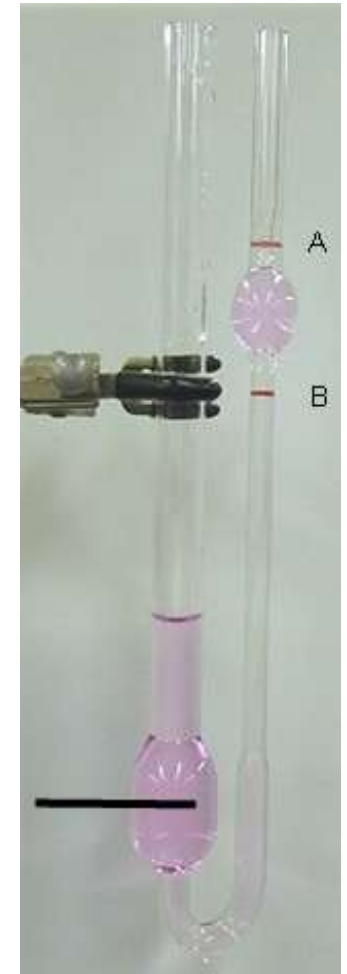
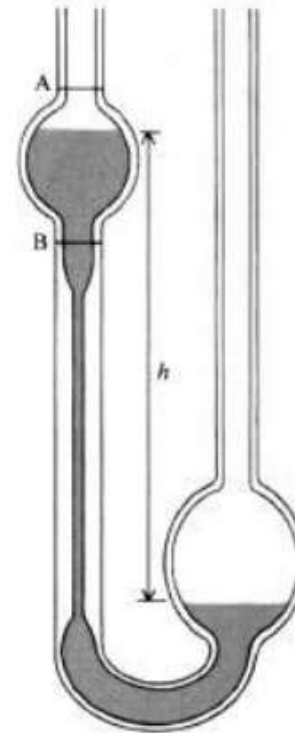
$$Q = \frac{\Delta p \pi R^4}{8L\eta}$$

Viscosímetros:



EL VISCOSÍMETRO DE OSTWALD

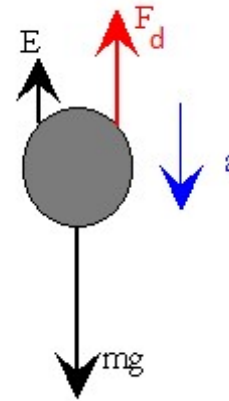
Instrumento de vidrio, posee un ensanchamiento en forma de ampolla provista de sendos enrrases, conectado a un tubo capilar vertical que se une a un segundo ensanchamiento destinado a la colocación de la muestra en una primera operación, y del agua o líquido de referencia en otra operación complementaria. El conjunto se introduce en un baño termostático para fijar la temperatura con precisión. Es indispensable la concreción de este valor, porque la magnitud de la *viscosidad*, o de su inverso la fluidez, son altamente dependientes de la temperatura. En el viscosímetro de Ostwald se calcula la viscosidad de un líquido mediante la medida del tiempo que tarda en atravesar un tubo capilar, que como su nombre indica es lo suficientemente estrecho como para apreciar una dificultad notable en el paso del líquido.



Ley de Stokes:

$$F_d = 6\pi R\eta v$$

$$V_s = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho_p - \rho_f)}{\eta}$$



donde:

V_s es la velocidad de caída de las partículas (**velocidad límite**)

g es la **aceleración de la gravedad**,

ρ_p es la **densidad** de las partículas y

ρ_f es la **densidad** del fluido.

η es la **viscosidad** del fluido.

r es el radio equivalente de la partícula.



Régimen laminar y turbulento. Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho v_s D}{\mu}$$

$$Re = \frac{v_s D}{\nu}$$

donde:

ρ : densidad del fluido

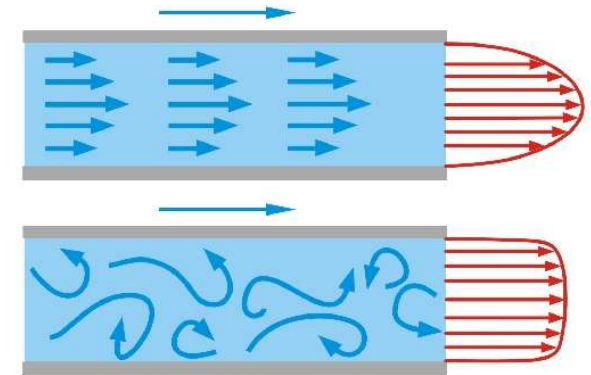
v_s : velocidad característica del fluido

D : diámetro de la tubería a través de la cual circula el fluido o longitud característica del sistema

μ : viscosidad dinámica del fluido

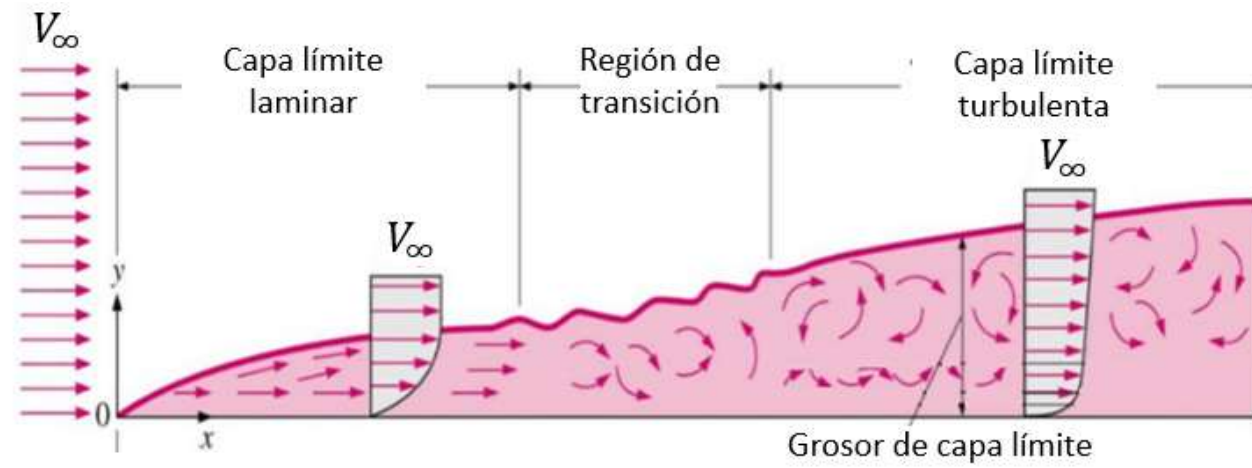
ν : viscosidad cinemática del fluido (m²/s)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} .$$



- Para valores de $Re \leq 2100$ (para flujo interno en tuberías circulares) el flujo se mantiene estacionario y se comporta como si estuviera formado por láminas delgadas, que interactúan sólo en función de los esfuerzos tangenciales existentes. Por eso a este flujo se le llama **flujo laminar**. El colorante introducido en el flujo se mueve siguiendo una delgada línea paralela a las paredes del tubo.
- Para valores de $2100 \leq Re \leq 4000$ (para flujo interno en tuberías circulares) la línea del colorante pierde estabilidad formando pequeñas ondulaciones variables en el tiempo, manteniéndose sin embargo delgada. Este régimen se denomina de transición.
- Para valores de $Re \geq 4000$, (para flujo interno en tuberías circulares) después de un pequeño tramo inicial con oscilaciones variables, el colorante tiende a difundirse en todo el flujo. Este régimen es llamado **turbulento**, es decir caracterizado por un movimiento desordenado, no estacionario y tridimensional.

Capa límite:



Transiciones:

